Abstract.

An unified exposition of fiber bundles with structure is given. Vector and principal fiber bundles result as particular cases.

Riassunto

In questa nota diamo un'esposizione unificante di fibrato con fibra strutturata, nella quale rientrano, come casi particolari, i fibrati vettoriali e principali.


## 0 - Fibrati topologici

Richiamiamo, innanzitutto, alcune nozioni sui fibrati topologici.

(0.1) Definizione

Dicesi "fibrato topologico (localmente banale)" ogni tripla

$$\eta \equiv (E,\pi,B),$$

dove $E$ e $B$ sono spazi topologici e

$$\pi : E \to B$$

è un'applicazione continua e suriettiva, i quali verificano la seguente condizione:

F.T. esistono a) un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in I}$ di $B$,

b) uno spazio topologico $F$,

c) una famiglia di omeomorfismi $\{\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F\}_{i\in I}$,

tali che $\alpha$) $\forall\ i \in I$, il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\Phi_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_i \times F \arrow[dl, "\pi^1"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

E è "lo spazio totale"; B è "la base; $\pi$ è "la proiezione"; $\pi^{-1}(b)$ è "la fibra" su $b \in B$; F è "una fibra tipo"; ogni aperto U, tale che $\pi^{-1}(U)$ è omeomorfo a $U \times F$, è "semplice"; $(U_i, \Phi_i)$ è "una carta"; $\{(U_i,\Phi_i)\}_{i\in I}$ è "un atlante"; se $U_i \cap U_{ji} \neq \Phi$, allora l'applicazione

$$\Phi_{ji} : U_i \cap U_i \to \text{Omeo } (F)$$

data da
$$\Phi_{ji}(b)(f) \equiv \pi^2(\Phi_j \circ \Phi_i^{-1})(b,f) \ ,$$
è "un cambiamento di carta" .

(0.2) La famiglia dei cambiamenti di carta gode delle seguenti proprietà.

Proposizione

Sia $\eta \equiv (E,\pi,B)$ un fibrato topologico. Sia $\{(U_i,\Phi_i)\}_{i\in I}$ un atlante ed F la relativa fibra tipo.

Allora i cambiamenti di carta

$$\Phi_{ji} : U_i \cap U_j \to \text{Omeo } (F)$$

sono applicazioni continue (la topologia di Omeo (F) è quella compatti-aperti) e valgono le seguenti proprietà(*)

a) $\Phi_{kj} \circ \Phi_{ji} = \Phi_{ki}$ su $U_i \cap U_j \cap U_k$

b) $\Phi_{ii} = id_F$ su $U_i$ $\dot{-}$

La famiglia $\{U_i, \Phi_{hk})\}_{i\in I,(h,k)\in I \times I}$ si dice "il cociclo" relativo all'atlante $\{(U_i,\Phi_i)\}_{i\in I}$ .

(0.3) Definizione

Siano $\eta \equiv (E,\pi,B)$ ed $\eta' \equiv (E',\pi',B')$ due fibrati topologici.

Dicesi " omomorfismo di $\eta$ in $\eta'$ ogni applicazione continua

$$H : E \to E'$$

che soddisfa alle seguenti condizioni:

a) $H$ manda fibre in fibre, ossia esiste $h : B \to B'$ tale che il seguente diagramma commuti

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{H} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow[h]{} & B' \end{array}$$

(se tale $h$ esiste è unica),

b) $\forall\, b \in B$ l'applicazione indotta

$$H_b : \pi^{-1}(b) \to \pi'^{-1}(h(b))$$

(*) Il simbolo "o" denota la composizione nello spazio funzionale, per applicazioni a valori in tale spazio.

è continua.

Si vede che $h : B \to B$ risulta continua.

Siano $\{U_i,\Phi_i\}_{i\in I}$ e $\{U'_i, \Phi'_i\}_{i\in I'}$ atlanti di $\eta$ ed $\eta'$ rispettivamente, Se $U_i \cap h^{-1}(U_j) \neq \emptyset$, allora l'applicazione

$$H_{ji} : U_i \cap h^{-1}(U'_j) \to C(F,F'),$$

data da
$$H_{ji}(b)(f) \equiv \pi^2(\Phi'_j \circ H \circ \Phi_i^{-1})(b,f),$$

è detta "l'espressione locale dell'omomorfismo", relativa a $U_i \cap h^{-1}(U'_j)$.

(0.4) La famiglia delle espressioni locali di un omomorfismo gode delle seguenti proprietà.

Proposizione

Siano $\eta \equiv (E,\pi,B)$ ed $\eta' \equiv (E',\pi',B')$ due fibrati topologici e siano $\{U_i,\Phi_i)\}_{i\in I}$ ed $F$, $\{(U'_i,\Phi'_i)\}_{i\in I'}$ ed $F'$ due atlanti e le relative fibre tipo di $\eta$ ed $\eta'$ rispettivamente. Sia $H : E \to E'$ un omomorfismo.

Allora le espressioni locali

$$H_{ji} : U_i \cap h^{-1}(U'_{ij}) \to C(F,F')$$

sono applicazioni continue (la topologia di $C(F,F')$ è quella compatti-aperti) e valgono le seguenti proprietà:

a) $(\Phi'_{ij} \circ H) \circ H_{jk} = H_{ik}$ su $U_k \cap h^{-1}(U'_j \cap U'_i)$

b) $H_{ij} \circ \Phi_{jk} = H_{ik}$ su $U_j \cap U_k \cap h^{-1}(U'_i)$.

Fibrati topologici con fibra strutturata

(1.1)

Sia $\mathfrak{F}$ una sottocategoria della categoria degli spazi topologici. La categoria massimale generata da $\mathfrak{F}$ è la categoria $\bar{\mathfrak{F}}$ così definita:

$\alpha$) gli oggetti di $\bar{\mathfrak{F}}$ sono le coppie $\xi \equiv (X,\{s_i\}_{i\in I})$, dove

a) $X$ è un insieme;

b) $s_i$ è una biiezione $s_i : X \to F_i$, con $F_i \in \mathrm{Ogg}\,\mathfrak{F}$;

c) $s_j \circ s_i^{-1} : F_i \to F_j$ è un isomorfismo di $\mathfrak{F}$, $\forall\ i,j \in I$;

d) se $s_k : X \to F_k$, con $F_k \in \mathrm{Ogg}\,\mathfrak{F}$ è una biiezione, tale che

$s_k \circ s_i^{-1} : F_i \to F_k$, con $i \in I$, è un isomorfismo, allora $k \in I$;

$\beta$) gli omomorfismi di $\bar{\mathfrak{F}}$ sono

$$\mathrm{Hom}(\xi,\xi') \equiv \{s'^{-1}_{i'} \circ f \circ s_i : X \to X' \mid i\in I, i'\in I', f \in \mathrm{Hom}(F_i, F')\}.$$

Osserviamo anche che una famiglia $\{s_i\}_{i\in I}$ che soddisfa alla proprietà a),b) e c) è estendibile in un sol modo ad una che gode anche della proprietà d).

La categoria $\bar{\mathfrak{F}}$ risulta essere in modo naturale una sottocategoria della categoria degli spazi topologici. Pertanto $\mathrm{Hom}(F,F')$ risulta un un sottospazio topologico di $C(F,F')$ ed $\mathrm{Aut}(F)$ risulta un sottospazio topologico di $\mathrm{Hom}(F,F)$.

Definizione

Sia $\mathfrak{F}$ una sottocategoria della categoria degli spazi topologici. Si dice che $\mathfrak{F}$ è una "categoria di struttura" se $\mathfrak{F}$ coincide con $\bar{\mathfrak{F}}$, identificando ogni oggetto $X$ di $\mathfrak{F}$ con la coppia $(X,\{s_i\}_{i\in I}$, dove $s_i$ sono gli isomorfismi $X \to F_i$.

Sia ora $\mathfrak{F}$ una categoria i cui oggetti sono tutti gli spazi topologici con certe operazioni continue i quali godono di certe proprietà ed i cui morfismi sono tutte le applicazioni continue che conservano le operazioni. Allora possiamo considerare $\mathfrak{F}$, in modo naturale, come una categoria di struttura, in quanto possiamo ricostruire univocamente le operazioni, per mezzo delle biiezioni.

Sia dunque $\mathfrak{F}$ una categoria di struttura data.

(1.2) Definizione.

Si dice "fibrato topologico (localmente banale) con struttura nella categoria $\mathfrak{F}$ "ogni quaterna

$$\eta \equiv (E,\pi,B,J),$$

dove $E$ e $B$ sono spazi topologici,

$$\pi : E \to B$$

è un'applicazione continua e suriettiva e $J$ è un'applicazione

$$J : B \to \mathrm{Ogg}\,\mathfrak{F}$$

(mediante la quale identifichiamo $\pi^{-1}(b)$ con $J(b)$, $\forall\, b \in B$), i quali verificano la seguente condizione:

F.T.S. esistono a) un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in I}$ di $B$,

b) un oggetto $F$ di $\mathfrak{F}$,

c) una famiglia di omeomorfismi $\{\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F\}_{i\in I}$,

tali che $\alpha$) $\forall\, i \in I$, il seguente diagramma sia commutativo

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\Phi_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_i \times F \arrow[dl, "\pi^1"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

$\beta$) $\forall\, i \in I$, $b \in U_i$ l'applicazione indotta

$$\Phi_{ib} : \pi^{-1}(b) \to F$$

sia un isomorfismo.

In particolare un fibrato topologico con struttura in $\mathfrak{F}$ è un fibrato topologico.

Osserviamo però, che un fibrato topologico con struttura in $\mathfrak{F}$ non è semplicemente un fibrato topologico, con assegnata la categoria $\mathfrak{F}$, ma l'appartenenza di ciascuna fibra alla categoria va esplicitamente specificata.
Si noti che in un fibrato topologico a fibra strutturata i cambiamenti carta hanno valori in Aut(F).

## 2 - Omomorfismi di fibrati con fibra strutturata

(2.1) Definizione

Siano $\eta \equiv (E,\pi,B,J)$ ed $\eta' \equiv (E',\pi',B',J')$ due fibrati topologici con struttura in $\mathfrak{F}$.

Dicesi "omomorfismo di $\eta$ in $\eta'$" ogni applicazione continua

$$H : E \to E' ,$$

che soddisfa alle seguenti condizioni:

a) $H$ manda fibre in fibre, ossia esiste $h : B \to B'$ tale che il seguente diagramma commuti

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{H} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{h} & B' \end{array}$$

(se tale $h$ esiste è unica),

b) $\forall\, b \in B$ l'applicazione indotta

$$H_b : \pi^{-1}(b) \to \pi^{-1}(h(b))$$

è un omomorfismo di $\mathfrak{F}$.

In particolare, un omomorfismo di fibrati topologici con struttura in $\mathfrak{F}$ è un omomorfismo di fibrati topologici.

L'insieme dei fibrati topologici con struttura in $\mathfrak{F}$ forma una categoria.

Si noti che, per gli omomorfismi di fibrati topologici a fibra struttura ta, le espressioni locali hanno valori in Hom(F,F')

$$H_{ji} : U_i \cap h^{-1}(U'_j) \to \mathrm{Hom}(F,F') \;.$$

3 - Ricostruzione di fibrati e di omomorfismi.

Sia $\mathfrak{F}$ una categoria di struttura.

(3.1) Possiamo ricostruire un fibrato con struttura in $\mathfrak{F}$ mediante il suo atlante.

Proposizione.

Sia $B$ uno spazio topologico, $E$ un insieme, $\pi : E \to B$ un'applicazione suriettiva, $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $B$, $F$ un oggetto di $\mathfrak{F}$, $\{\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F\}_{i\in I}$ una famiglia di biiezioni, i quali soddisfano alle seguenti condizioni:

a) $\forall\ i \in I$, il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\Phi_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_i \times F \arrow[dl, "\pi^1"] \\
& U_i &
\end{tikzcd}$$

b) se $U_i \cap U_j \neq 0$, l'applicazione $\Phi_{ji}$ abbia valori in Aut(F), ossia

$$\Phi_{ji} : U_i \cap U_j \to \mathrm{Aut}(F)$$

e l'applicazione indotta

ta, le espressioni locali hanno valori in $\mathrm{Hom}(F,F')$

$$H_{ji} : U_i \cap h^{-1}(U'_j) \to \mathrm{Hom}(F,F') .$$

3 - Ricostruzione di fibrati e di omomorfismi.

Sia $\mathfrak{F}$ una categoria di struttura.

(3.1) Possiamo ricostruire un fibrato con struttura in $\mathfrak{F}$ mediante il suo atlante.

Proposizione.

Sia $B$ uno spazio topologico, $E$ un insieme, $\pi : E \to B$ un'applicazione suriettiva, $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $B$, $F$ un oggetto di $\mathfrak{F}$, $\{\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F\}_{i \in I}$ una famiglia di biiezioni, i quali soddisfano alle seguenti condizioni:

a) $\forall\ i \in I$, il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\Phi_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_i \times F \arrow[dl, "\pi^{1}"] \\
& U_i &
\end{tikzcd}$$

b) se $U_i \cap U_j \neq 0$, l'applicazione $\Phi_{ji}$ abbia valori in $\mathrm{Aut}(F)$, ossia

$$\Phi_{ji} : U_i \cap U_j \to \mathrm{Aut}(F)$$

e l'applicazione indotta

$$(U_i \cap U_j) \times F \to F$$

sia continua[*].

Allora esiste in $E$ un'unica struttura topologica tale che $\forall\ i \in I$, $\Phi_i$ sia un omeomorfismo. Per tale topologia $\pi$ è continua. Inoltre esiste un'applicazione $J : B \to \mathrm{Ogg}\ \mathfrak{F}$ tale che

$$\eta : (E,\pi,B,J)$$

sia un fibrato topologico con struttura in $\mathfrak{F}$ .

Dimostrazione.

L'applicazione $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F \to (U_i \cap U_j) \times F$ è un omeomorfismo per la condizione b). Pertanto esiste un'unica struttura topologica su $E$ per cui i $\Phi_i$ siano omeomorfismi. $\pi$ risulta continua perché localmente è composizione di applicazioni continue. Infine basta considerare la $J$ determinata dalla famiglia di biiezioni $\{\Phi_{ib} : \pi^{-1}(b) \to F\}_{i \in I}$ , $\forall\ b \in B$ .

(3.2) Possiamo ricostruire, a meno di isomorfismi, un fibrato con struttura in $\mathfrak{F}$ mediante i suoi cambiamenti di carta.

Proposizione

Sia $B$ uno spazio topologico, sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $B$, sia $F$ un oggetto di $\mathfrak{F}$ e, se $U_i \cap U_j \neq 0$,

---

(*) Se $F$ è localmente compatto, basta supporre che $\Phi_{ji}$ sia continua.

siano

$$\Phi_{ji} : U_i \cap U_j \to \mathrm{Aut}(F)$$

delle applicazioni tali che le applicazioni indotte $(U_i \cap U_j) \times F \to F$ siano continue(*) e

a) $\Phi_{kj} \cdot \Phi_{ji} = \Phi_{ki}$

b) $\Phi_{ii} = id_F$.

Allora esiste un fibrato topologico $\eta \equiv (E,\pi,B,J)$ di fibra tipo $F$, con struttura in $\mathfrak{J}$, definito a meno di isomorfismi, per il quale le $\Phi_{ji}$ siano i cambiamenti di carta.

Dimostrazione

Come spazio totale basta considerare $E \equiv \bigsqcup_{i\in I} U_i \times F)/_\sim$, dove la relazione di equivalenza $\sim$ è definita da

$$(i,b,f) \sim (j,b',f') \Longleftrightarrow b = b' \ , \quad \Phi_{ji}(b)(f) = f' \ .$$

$E$ è uno spazio topologico e $\pi$, definito da $\pi([i,b,f]) \equiv b$, è continua e suriettiva.

La famiglia di applicazioni $\{\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F\}_{i\in I}$,

data da $\{\Phi_i : [i,b,f] \to (b,f)\}_{i\in I}$

costituisce un atlante, di cui $\Phi_{ji}$ sono i cambiamenti di carta.

Si vede infine che se $\eta'$ è un fibrato che soddisfa alle condizioni richieste, allora esiste un isomorfismo $\eta \to \eta'$ .

---

(*) Se $F$ è localmente compatto, basta supporre che $\Phi_{ji}$ sia continua.

(3.3) Possiamo ricostruire un omomorfismo di fibrati a struttura in $\mathfrak{F}$ mediante le espressioni locali.

Proposizione

Siano $\eta \equiv (E,\pi,B,J)$ ed $\eta' \equiv (E',\pi',B',J')$ due fibrati a struttura in $\mathfrak{F}$ di fibra tipo $F$ ed $F'$ rispettivamente e siano $\{(U_i,\Phi_i)\}_{i\in I}$ ed $\{(U'_j,\Phi'_j)\}_{j\in I'}$ due atlanti di $\eta$ ed $\eta'$, rispettivamente.

Sia $h : B \to B'$ un'applicazione continua e, se $U_i \cap h^{-1}(U_j) \neq \emptyset$, siano

$$H_{ji} : U_i \cap h^{-1}(U'_j) \to C(F,F')$$

applicazioni tali che le applicazioni indotte $(U_i \cap h^{-1}(U'_j)) \times F \to F'$ siano continue(*) e

a) $H_{kj} \circ \Phi_{ji} = H_{ki}$

b) $(\Phi_{kj} \circ h) \circ H_{ji} = H_{ki}$ .

Allora esiste un unico omomorfismo $H : E \to E'$ sopra ad $h$ per il quale le $H_{ji}$ siano le espressioni locali.

Dimostrazione

L'applicazione $H : E \to E'$

data da $H : e \to \Phi_j^{-1}(h(\pi(e))_{,} H_{ji}(\pi(e))(\pi^2(\Phi_i(e)))$ ,

la quale risulta indipendente dalla scelta delle carte, è un omomorfismo.

Si verifica poi che tale $H$ è unica.

(*) Se $F$ è localmente compatto, basta supporre che $H_{ji}$ sia continua.

## 4 - Fibrati vettoriali.

Un primo esempio di fibrati con struttura è dato da quelli vettoriali.

Gli spazi vettoriali topologici costituiscono una categoria di struttura.

Gli spazi vettoriali (topologici) a dimensione finita, o a dimensione $n$ fissata, costituiscono pure una categoria di struttura.

(4.1) Definizione

Dicesi "fibrato vettoriale topologico (localmente banale)" ogni fibrato topologico

$$(E, \pi, B, J)$$

con struttura nella categoria $\mathfrak{F}$ degli spazi vettoriali topologici $\dot{-}$

## 5 - Fibrati principali

Un secondo esempio di fibrati con struttura è data da quelli principali. Premettiamo la definizione di spazio affine di un gruppo e di omomorfismo di spazi affini.

(5.1) Definizione

Sia $\bar{G}$ un gruppo topologico.

Si dice "spazio affine sinistro(destro)" di $\bar{G}$ ogni terna

$$A \equiv (G, \bar{G}, \tau),$$

dove $G$ è uno spazio topologico e

$$\tau : G \times \bar{G} \to G$$

è un'applicazione continua, i quali soddisfano alle seguenti condizioni:

a) $\tau_g \circ \tau_{g'} = \tau_{gg'}$ $\qquad (\tau_g \circ \tau_{g'} = \tau_{g'g})$ , $\forall\, g,g' \in \bar{G}$;

b) $\tau_1 = id_G$ ,

c) $q \in G,\ \tau(g,q) = q \Rightarrow g = 1$;

d) $\exists\ q \in G$ per cui $\tau_q(\bar{G}) = G$ .

(5.2) Definizione

Siano $A \equiv (G,\bar{G},\tau)$ ed $A' \equiv (G',\bar{G}',\tau')$ due spazi affini sinistri(destri).

Si dice omomorfismo di $A$ in $A'$ ogni applicazione

$$f : G \to G'$$

tale che esista un'applicazione (detta "la derivata")

$$D f \in \mathrm{Hom}\ (\bar{G},\bar{G}')$$

per cui $f(\tau(q,g)) = \tau'(f(q),\ D f(g))$, $\qquad \forall (q,g) \in G \times \bar{G}$ .

Se $D f$ esiste, allora essa è unica. Inoltre ogni omomorfismo $f$ risulta essere un'applicazione continua.

Gli spazi affini sinistri(destri) costituiscono una categoria di struttura.

Gli spazi affini sinistri(destri), relativi ad un gruppo topologico fissato, costituiscono una categoria di struttura.

Osserviamo che vale la regola della catena per le derivate. Esiste dunque un funtore covariante dalla categoria degli spazi affini (sinistri o destri) a quella dei gruppi topologici che associa ad ogni spazio affine $G$ il gruppo $\bar{G}$ e ad ogni morfismo $f$ la sua derivata $Df$.

Sia dunque $\mathfrak{F}_{\bar{G}}$ la categoria degli spazi affini sinistri(destri) relativi ad un gruppo topologico $\bar{G}$.

(5.3) Definizione

Dicesi "fibrato principale topologico sinistro(destro)(localmente banale)", di gruppo strutturale $\bar{G}$," ogni fibrato topologico

$$\mu \equiv (P, \amalg, B, Y)$$

con struttura nella categoria $\mathfrak{F}_{\bar{G}}$ degli spazi affini sinistri(destri) di $\bar{G}$.

Si noti che $\mu$ ha struttura anche nella categoria degli spazi affini sinistri (destri).

(5.4) Proposizione

Sia $\mu \equiv (P, \amalg, B, Y)$ un fibrato principale sinistro(destro), di gruppo strutturale $\bar{G}$.

Allora ogni elemento $g \in \bar{G}$ determina un automorfismo di $\mu$ su $B$

$$T_g : P \to P$$

dato da $$T_g : p \to \tau_{\mu(p)}(g,p),$$

dove $\tau_{\mu(p)}$ è la traslazione relativa alla fibra $\overset{-1}{\amalg}(\amalg(p))$.

Pertanto $\bar{G}$ opera su $P$ a sinistra (destra) fedelmente ed effettivamente (e transitivamente su ciascuna fibra), tramite l'applicazione indotta

$$T : \bar{G} \times P \to P.$$

## 6 - Fibrati associati ad un fibrato principale

Sia $\mathfrak{F}$ una categoria di struttura; sia $\bar{G}$ un gruppo topologico e sia $\mathfrak{F}_{\bar{G}}$ la categoria degli spazi affini destri di $\bar{G}$.

(6.1) Osservazione. Se $\bar{G}$ opera a sinistra su uno spazio topologico $F$, mediante l'applicazione $\sigma : \bar{G} \times F \to F$, allora $\bar{G}$ opera a destra su $F$ mediante l'applicazione continua

$$\sigma : \bar{G} \times F \to F,$$

data da $$\sigma' : (g,f) \to \sigma(g^{-1},f) \ .$$

(6.2) Proposizione

Sia $\mu \equiv (P, \amalg, B, Y)$ un fibrato principale topologico destro di gruppo strutturale $\bar{G}$.

Sia $F$ un oggetto di $\mathfrak{F}$, sul quale $\bar{G}$ opera a sinistra, mediante l'applicazione

$$\sigma : \bar{G} \times F \to F,$$

tale che $$\sigma_g \in \mathrm{Aut}(F) \ , \qquad \forall g \in \bar{G} \ .$$

a) Sia $Q \equiv P \times F_{/\bar{G}}$ lo spazio topologico quoziente relativo alla relazione di equivalenza indotta dalle orbite di $\bar{G}$ il quale opera a destra su $P \times F$ mediante l'applicazione continua

$$T \times \sigma' : P \times F \to P \times F.$$

b) Sia $\tilde{\amalg} : P \times F \to Q$ la proiezione canonica.

Sia $\tilde{\pi} : Q \to B$ l'unica applicazione tale che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc} P \times F & \xrightarrow{\overset{1}{\pi}} & P \\ \tilde{\mu} \downarrow & & \downarrow \mu \\ Q & \xrightarrow[\tilde{\pi}]{} & B \end{array}$$

c) Sia $C : P \to Ogg\, \mathfrak{F}$ l'applicazione costante $C : p \to F$.

Sia $\tilde{\gamma} : Q \to Ogg\, \mathfrak{F}_{\bar{G}}$ l'applicazione indotta dalla famiglia di biiezioni

$$\{t_{q,f} : \tilde{\mu}^{-1}(q) \to \mu^{-1}(\tilde{\pi}(q))\}_{q \in Q, f \in \overset{2}{\pi}(\tilde{\mu}^{-1}(q))}$$

date da $\{t_{q,f} : (p,f) \to p\}$.

Sia $\tilde{J} : B \to Ogg\, \mathfrak{F}$ l'applicazione indotta dalla famiglia di biiezioni

$$\{s_{b,p} : \tilde{\pi}^{-1}(b) \to F\}_{p \in \mu^{-1}(b)}$$

date da $\{s_{b,p} : [p,f] \to f\}_{p \in \mu^{-1}(b)}$ .

d) Allora $\phi \equiv (P\times F, \overset{1}{\pi}, P, C)$ è un fibrato topologico con struttura in $\mathfrak{F}$, di fibra tipo $F$;

$\nu \equiv (P\times F, \tilde{\mu}, Q, \tilde{\gamma})$ è un fibrato (principale destro) topologico con struttura in $\mathfrak{F}_{\bar{G}}$;

$\psi \equiv (Q, \tilde{\pi}, B, \tilde{J})$ è un fibrato topologico con struttura in $\mathfrak{F}$.

c) Inoltre $\overset{1}{\pi}$ è un omomorfismo di $\nu$ in $\mu$, su $\tilde{\pi}$;

$\tilde{\mu}$ è un omomorfismo di $\phi$ in $\psi$, su $\mu$.

Tale risultato suggerisce la seguente definizione.

(6.3) Definizione

Sia $\mu \equiv (P, \underline{\mu}, B, y)$ un fibrato principale topologico destro di gruppo strutturale $\bar{G}$ .

Sia $F$ un oggetto di $\mathfrak{F}$ .

Si dice <u>"fibrato topologico, di fibra di tipo F, associato a $\mu$"</u> ogni coppia

$$(\psi, \tilde{\underline{\mu}}) \; ,$$

dove $\psi \equiv (Q, \tilde{\pi}, B, \tilde{J})$ è un fibrato topologico con struttura in $\mathfrak{F}$, di fibra tipo $F$ e $\tilde{\underline{\mu}} : P \times F \to Q$ è un'applicazione continua, tali che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc} P \times F & \xrightarrow{\pi^{1}} & B \\ {\scriptstyle \tilde{\underline{\mu}}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \underline{\mu}} \\ Q & \xrightarrow[\tilde{\pi}]{} & B \end{array} \qquad \dot{-}$$

## 7 - Relazione tra fibrati associati e ricostruzione di fibrati

Sia $\mathfrak{F}$ una categoria di struttura. Sia $F$ un oggetto di $\mathfrak{F}$ e supponiamo che

$$\bar{G} \equiv \mathrm{Aut}(F)$$

sia un gruppo topologico.

Sia poi $\mathfrak{F}_{\bar{G}}$ la categoria degli spazi affini destri di $\bar{G}$ .

Si osservi ora che un cociclo a valori in $\bar{G} \equiv \mathrm{Aut}(F)$, relativamente alla categoria $\mathfrak{F}$ , è anche un cociclo a valori in $\mathrm{Aut}(\bar{G})$, relativamente alla categoria $\mathfrak{F}_{\bar{G}}$ , in quanto $\bar{G}$ opera a destra su se stesso. Pertanto, da un tale cociclo si può ricostruire sia un fibrato con struttura in $\mathfrak{F}$ , sia un fibrato (principale) con struttura in $\mathfrak{F}_{\bar{G}}$.

(7.1) Proposizione

Sia $B$ uno spazio topologico, sia $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $B$, sia $F$ un oggetto di $\mathcal{F}$ e, se $U_i \cap U_j \neq 0$, siano

$$\Phi_{ji} : U_i \cap U_j \to \mathrm{Aut}(F) \equiv \bar{G}$$

delle applicazioni tali che le applicazioni indotte $(U_i \cap U_j) x\ F \to F$ siano continue(*) e

a) $\Phi_{kj} \cdot \Phi_{ji} = \Phi_{ki}$,

b) $\Phi_{ii} = id_F$.

Sia $\eta \equiv (E,\pi,B,J)$ il fibrato topologico con struttura in $\mathcal{F}$ ottenuto per ricostruzione e sia $\eta \equiv (P,\mu,B,Y)$ il fibrato topologico (principale) con struttura in $\mathcal{F}_{\bar{G}}$ ottenuto per ricostruzione.

Sia $\nu \equiv (PxF_{/\bar{G}}, \tilde{\pi}, B, \tilde{\bar{D}})$ il fibrato associato a $P$, di fibra di tipo $F$.

Allora, l'applicazione

$$P \times F_{/\bar{G}} \to E$$

data da

$$\Big[[i,b,g],f\Big] \to [i,b,g(f)]$$

è ben definita ed è un isomorfismo di $\nu$ in $\eta$.

Dimostrazione

L'applicazione $P \times F_{/\bar{G}} \to E$ è ben definita perché abbiamo:

$$\Big[[i,b,g]f,\Big] = \Big[[j,b,\Phi_{ji}(f)g],f\Big] \to [j,b,\Phi_{ji}(b)(g(f))] = [i,b,g(f)],$$

(*) Se $F$ è localmente compatto, basta supporre che $\Phi_{ji}$ sia continua.

$$\Big[[i,b,g],f\Big] = \Big[[i,b,gg'],g'^{-1}(f)\Big] \to [i,b,gg'y'^{-1}(f)] = [i,b,g(f)] \ .$$

La biiezione inversa è data da

$$[i,b,f] \to [[i,b,1],f],$$

che è pure ben definita, perché abbiamo:

$$[i,b,f] = [j,b,\Phi_{ji}(b)(f)] \to [[j,b,1],\Phi_{ji}(b)(f)] = [[j,b,\Phi_{ji}(b)],\Phi_{ji}(b)(f)] =$$

$$= [[i,b,1],f] \ .$$

Si verifica poi che tali applicazioni sono continue .

Bibliografia

1) Bourbaky, Variétés differentiables et analytiques 1971

2) " , Topologie Générale 1967 - 1971

3) Lãng S. , Differential Manifolds 1972

4) Pham Mań Quam, Introduction à la géometrie des varietes differentiables 1968

5) Godbillon, Géométrie differentielle et Mécanique analytique 1969

6) Stenrood The Topology of fibre bundles 1951

7) Husemoller - Fibre Bundles 1974