Ma essendo $Y \subseteq C \subseteq B_\omega$, ne segue che $L(m)(Y) \leq L(m)(B_\omega) < L(m)(Y) + \varepsilon$.

(iii) è simile. Nel caso che $°m$ sia una misura di probabilità, l'unicità della estensione si dimostra abbastanza facilmente (cfr. [30]). Nel caso che $°m$ sia una misura non-limitata, tale dimostrazione è stata data da Henson [26].

2.3. PROBABILITA' FINITAMENTE ADDITIVA o σ-ADDITIVA?

La risposta a tale domanda sembra essere "finitamente additiva"; l'assioma di σ-additività, per una probabilità sembra pesante e innaturale, come de Finetti sostiene in [22].Tra le motivazioni addotte c'è il fatto che una probabilità σ-additiva non può essere definita in generale per tutti gli eventi a causa del teorema di Ulam, e che non si può definire una probabilità uniforme σ-additiva su uno spazio numerabile.
D'altronde non si può escludere il vantaggio tecnico che si ha quando si lavora con una misura σ-additiva. Per ripetere le parole di Halmos([24]) pag. 187) "infinite additivity does not contradict our intuitive ideas, and the theory built on it is <u>sufficiently far developed to assert that the assumption is justified by its success</u>".

Il Teorema di Loeb e i risultati conseguenti ad esso (vedi [10][11][12][28] [29]) sembrano dare un'alternativa alla disputa sopra ricordata. Sia $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ una m.p.f.a.; essa, come abbiamo visto, può essere sollevata ad una funzione di insieme interna $m = {}^*\mu : {}^*\mathcal{P}(X) \to {}^*[0,1]$ per cui $°m = st \circ m$ è una m.p.f.a. su $\mathcal{B} = {}^*\mathcal{P}(X)$. Col teorema di Loeb si estenda $°m$ a $L(m) : L(\mathcal{B}) \to [0,1]$. Allora $L(m)$ è σ-additiva ed è una "buona" misura per lavorare tecnicamente. Dentro $L(\mathcal{B})$ ci sono tutti gli eventi standard; infatti questi sono dentro $\mathcal{B}$, per il fatto che

$\mathcal{B} \supseteq \{{}^*A : A \subseteq X\}$.

(Attenzione! $L(m) \circ *$ non è σ-additiva, in generale: infatti

$$L(m) \circ * = {}^*\mu).$$

Ma c'è di più. Seguendo tale ordine di idee, uno spazio di probabilità può essere definito come una coppia (A, μ), dove A è un insieme $*$-finito e μ è una funzione interna $\mu : A \to {}^*[0,1]$ tale che $\sum_{a\in A}\mu(a) = 1$.

Se B è un sottoinsieme interno di A, si può definire $\mu(B) = \sum_{a\in B}\mu(a)$.

Una probabilità uniforme è una μ tale che $\mu\{a\} = \dfrac{1}{||A||}$.

Così una variabile aleatoria è una funzione interna $f : A \to {}^*\mathbb{R}$. Se f è a valori finiti, il valore atteso è dato da $E(f) = \mathrm{st} \sum_{a\in A} f(a)\cdot\mu(a)$.

Le definizioni date sopra sono giustificate dai teoremi seguenti (vedi [29] pag. 11). Si indichi con $\mathcal{B}$ l'algebra dei sottoinsieme di A, con $L(\mathcal{B})$ la minima σ-algebra contenente $\mathcal{B}$ e con $L(\mu)$ l'estensione di μ data dal Teorema di Loeb.

TEOREMA 5 : Data $f : A \to \mathbb{R}$ sono equivalenti

(i) f è $L(\mu)$-misurabile.

(ii) Esiste una funzione interna $g : A \to {}^*\mathbb{R}$ tale che $\mathrm{st}(g(a)) = f(a)$ per quasi tutti (risp. a $L(\mu)$ gli $a \in A$.

TEOREMA 6 : Sia $f : A \to {}^*\mathbb{R}$ una funzione interna tale che $f(a)$ è finito e sia $°f(a) = \mathrm{st}(f(a))$ quasi dappertutto. Allora

$$\int °f \, d\, L(m) = \mathrm{st} \sum_{a\in A} f(a)\mu(a).$$

Per come vadano a finire le cose seguendo tale ordine di idee, si veda [14] [16] [29] .