1. ULLA RAPPRESENTAZ.ONE NON-STANDARD DELLE MISURE E DEI FUNZIONALI.

hiameremo misura initamente additiva (abbr. m.f.a.) una funzione d'insieme m definita su una algebra di sottoinsiemi di un dato insieme X, a valori nella retta reale estesa $\bar{R}^+ = \{x : x \geq 0\} \cup \{+\infty\}$, tale che:

$$(1.1) \qquad m(A \cup B) = m(A) + m(B) \qquad \text{se} \quad A \cap B = \emptyset$$

$$(1.2) \qquad m(\emptyset) = 0$$

Se in più $m(X) = 1$, essa si dirà misura di probabilità finitamente additiva (abbr. m.p.f.a.).

Sia dato un insieme X che pensiamo essere sulla base di una superstruttura. Si consideri un insieme F $*$-finito, $F \subseteq {}^*X$. Definiamo una funzione d'insieme

$$(1.3) \qquad c_F : {}^*\mathcal{P}(X) \to {}^*[0,1]$$

mediante

$$(1.4) \qquad c_F(Y) = \frac{||Y \cap F||}{||F||}, \qquad Y \in {}^*\mathcal{P}(X)$$

Per le proposizioni 3 e 4, $Y \cap F$ è $*$-finito e $||Y \cap F|| \leq ||F||$, per cui $c_F(Y) \in {}^*[0,1]$.

Proprietà:

$$(1.5) \qquad Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \Longrightarrow c_F(Y_1 \cup Y_2) = c_F(Y_1) + c_F(Y_2)$$

$$(1.6) \qquad c_F({}^*X) = 1$$

Se X è infinito (come sempre supporremo per non cadere in casi banali) possiamo prendere F tale che $||F|| \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$; in tal caso vale anche

(1.7) $\qquad c_F(A) \approx 0 \qquad$ se A è <u>finito</u>.

Mediante c_F possiamo definire una m.p.f.a. $m_F : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ attraverso il seguente diagramma:

$$
(1.8) \qquad
\begin{array}{ccc}
{}^*\mathcal{P}(X) & \xrightarrow{\ c_F\ } & {}^*[0,1] \\
\uparrow{\scriptstyle *} & & \downarrow{\scriptstyle st} \\
\mathcal{P}(X) & \overset{m_F}{\dashrightarrow} & [0,1]
\end{array}
$$

Cioé, per ogni $A \subseteq X$, $m_F(A) = st\ c_F({}^*A)$.

Ricordando che $*$ è un omomorfismo booleano di $\mathcal{P}(X)$ in ${}^*\mathcal{P}(X)$, che **st** di $\theta({}^*\mathbf{R})$ in $\mathbf{R}$, dalle proprietà (1.5), (1.6) si ricava che m_F è una m.p.f.a. definita su $\mathcal{P}(X)$ e nulla sugli insiemi finiti qualora $||F|| \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$.

<u>Osservazione</u>. $c_F \circ * : \mathcal{P}(X) \to {}^*[0,1]$ è una "misura" di prob. f.a. a valori in ${}^*[0,1]$. Se lavoriamo in un allargamento non-standard, si può prendere F $*$-finito tale che $X \subseteq F \subseteq {}^*X$. In tal caso, se $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$ $\quad {}^*A \cap F \neq \emptyset$; così $\quad ||{}^*A \cap F|| \neq 0$. Cioé: c_F <u>$\circ$ $*$ si annulla solo sull'insieme vuoto.</u>

Gli insiemi di misura nulla secondo m_F vengono ad avere misura infinitesima secondo $c_F \circ *$. Una teoria quantitativa del "grado" di misura nulla di un insieme viene affrontata nella seconda parte di [26].

A questo punto enunciamo un teorema di rappresentazione che afferma che ogni m.p.f.a. definita su $\mathcal{P}(X)$, o meglio su una sottoalgebra $\mathcal{B}$ di $\mathcal{P}(X)$, e nulla sui punti, si può ottenere come descritto prima.

TEOREMA 1 : Si consideri $(X,\mathcal{B},m)$, dove X è un insieme infinito, $\mathcal{B}$ è una sottoalgebra di $\mathcal{P}(X)$, $m : \mathcal{B} \to [0,1]$ è una m.p.f.a. nulla sui punti. Allora esiste un F $*$-finito, $X \subseteq F \subseteq {}^*X$, tale che $m = m_F$.

Un cenno della dimostrazione di tale teorema sarà dato più avanti, per ora discutiamolo un po'.

Osservazione 1.1. Innanzitutto si ritrova un noto risultato che dice che ogni misura definita su una sottoalgebra si può estendere ad una m.f.a. definita su tutto $\mathcal{P}(X)$. Veramente il teorema 1 è stato enunciato solo per misure di probabilità, ma un teorema analogo anche per misure a valori sulla retta estesa verrà dato più avanti.

Osservazione 1.2. Insiemi $*$-finiti diversi E,F possono dar luogo a $m_E = m_F$. Vale infatti: se E,F sono due insiemi $*$-finiti tali che

$F \subseteq E$, $\dfrac{||F||}{||E||} \approx 1$, allora $m_F = m_E$ (più in generale basterebbe

$\dfrac{||E \cap F||}{||E||} \approx 1$)

$$\text{Verifica : } \frac{||{}^*A \cap E||}{||E||} - \frac{||{}^*A \cap F||}{||E||} \leq \frac{||E-F||}{||E||} = \frac{||E|| - ||F||}{||E||} \approx 0$$

$$\text{Per cui } \quad c_F({}^*A) = \frac{||{}^*A\cap F||}{||F||} = \frac{||{}^*A\cap F||}{||E||} \cdot \frac{||E||}{||F||} \approx \frac{||{}^*A\cap F||}{||E||} \approx \frac{||{}^*A\cap E||}{||E||} = c_E({}^*A)$$

Osservazione 1.3. Anche l'integrale ha una rappresentazione non-standard data da:

Se f è una funzione limitata su X, cioè appartenente allo spazio di Banach delle funzioni limitate, da noi denotato $B(X)$, ed è integrale secondo m, ed F è un qualunque $*$-finito per cui $m = m_F$ allora

(1.9) $$\int f dm = st\left(\frac{1}{||F||} \sum_{p\in F} {}^*f(p)\right)$$

Si noti che i sottoinsiemi $*$-finiti di ${}^*\mathbb{R}$, come è $\{{}^*f(p) : p \in F\}$, si lasciano sommare; più precisamente l'operazione di Σ definita su $\mathcal{P}_f(\mathbb{R})$ si estende a ${}^*\mathcal{P}_f(\mathbb{R})$.

La (1.9) si dimostra facilmente osservando che il funzionale a secondo membro coincide con il primo sullo spazio delle funzioni semplici. Il funzionale a secondo membro è definito su tutto $B(X)$; così si ottiene una estensione di $\int$ a tutto lo spazio.

Tale risultato, come pure il risultato ricordato nell'osservazione 1.1., è ovviamente noto ed è dimostrabile col teorema di estensione di Hahn-Banach.

In questo contesto esso sembra non far uso dell'assioma di scelta. Si ricordi invece che lavoriamo in un allargamento non-standard e che, senza l'assioma di scelta o per lo meno formulazioni un po' più deboli di esso (teorema dell'ultrafiltro), non si possono ottenere modelli non-standard.

<u>Osservazione 1.4.</u> La rappresentazione dell'integrale per le funzioni illimitate non è così generale come per le funzioni limitate. Sia $(X,\mathcal{B},m)$ uno spazio di misura, con $\mathcal{B}$ σ-algebra e m probabilità σ-additiva definita su $\mathcal{B}$. Se $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ è una funzione non-limitata e integrabile, può non valere (1.9) per ogni F per cui $m = m_F$. Tuttavia si può scegliere opportuni F per cui la (1.9) continua a valere per tutte le funzioni integrabili.

Per ottenere una dimostrazione di quanto detto nell'osservazione 1.4., si può far riferimento ad un Teorema più generale di rappresentazione dell'integrale, fatto rispetto ad una σ-misura non in generale finita (a valori in $\overline{\mathbb{R}^+}$).

<u>TEOREMA 2</u>: Sia $(X,\mathcal{B},m)$ uno spazio di misura, con $\mathcal{B}$ σ-algebra, m σ-additiva e zero sui punti. Allora esiste un insieme $*$-finito F, $X \subseteq F \subseteq {}^*X$, un $\omega \in {}^*N \setminus N$ tale che

$$\int f \, dm \approx \frac{1}{\omega} \sum_{p \in F} {}^*f(p) \qquad (\approx \text{ è definita in } \overline{{}^*R} = {}^*R \cup \{-\infty,+\infty\})$$

per tutte le funzioni su X misurabili e aventi valori in $\bar{R} = R \cup \{-\infty,+\infty\}$.

<u>COROLLARIO</u>: Nel caso che m sia una probabilità si può prendere $\omega = F$.

<u>Dimostrazione</u>. In tal caso infatti $1 = \int 1 \, dm \approx \frac{||F||}{\omega}$.

Per dare uno sketch della dimostrazione del Teorema 2 enunciamo un Lemma che è la chiave di esso.

<u>LEMMA 1</u> : Sia $(X,\mathcal{B},m)$ uno spazio di misura, come nel Teorema 1. Si indichi con S lo spazio delle funzioni positive misurabili, con S_I lo spazio delle funzioni positive integrabili ($f \in S_I \Rightarrow \int f dm < +\infty$).

Siano $f_1, f_2, \dots f_k \in S_I$, $f_{k+1}, \dots f_n \in S \setminus S_I$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, $K \in \mathbf{N}$ e $G \subseteq X$, G finito.

Allora esistono un sottoinsieme finito $F \subseteq X$ tale che $G \subseteq F$ e un numero naturale $r \in \mathbf{N}$ tale che

$$\left| T_{F,r}(f_i) - \int f_i \, dm \right| < \varepsilon \qquad i = 1,\dots k.$$

$$T_{F,r}(f_i) \geq K \qquad i = k+1,\dots,n$$

dove
$$T_{F,r}(f) = \frac{1}{r} \sum_{x \in F} f(x)$$

Sketch della dimostrazione del Teorema 2:

Sarà sufficiente considerare le funzioni non negative; per il caso generale si tenga presente la decomposizione $f = f^+ - f^-$. Si considera una relazione binaria $H(x,y)$ definita dalla congiunzione delle seguenti formule:

H1) $\quad x = <f,\varepsilon,K,a> \in S \times R^+ \setminus \{0\} \times \mathbb{N} \times \mathcal{X}$

H2) $\quad y = (F,r) \in \mathcal{P}_f(X) \times \mathbb{N}$

H3) $\quad a \in F$

H4) $\quad f \in S_I \rightarrow |T_{F,r}(f) - \int f dm| < \varepsilon$

H5) $\quad f \in S \setminus S_I \rightarrow T_{F,r}(f) \geq K$

Il Lemma 1 dimostra che $H(x,y)$ è concorrente; cioé :

dati $x_1,\dots x_n$, esiste y tale che

$$H(x_1,y) \ \& \ H(x_2 y) \ \& \ \dots \ \dots \ \& \ H(x_n,y)$$

Allora, poiché lavoriamo in un allargamento, deve esistere un $y \in {}^*(\text{Rango } H)$ tale che vale

$$H({}^*x,y) \qquad \text{per ogni} \quad x \in \text{Dom } H.$$

Per H2) e il Principio di Transfer $y = (F,\omega)$ con $F \in {}^*\mathcal{P}_f(X)$, $\omega \in {}^*\mathbb{N}$.

Le condizioni H1) —— H5) e il Principio di Transfer danno il risultato.

Osservazioni e conclusioni.

Il Teorema 1 è stato dimostrato per la prima volta da Bernstein e Wattemberg [17], intorno al 1969, per la misura di Lebesgue su [0,1]. Essi hanno dimostrato in più che l'insieme F può essere preso in modo tale che m_F risulti una estensione invariante per traslazioni (mod. 1), ritrovando pertanto il vecchio [15] risultato di Banach. Verso il 1972 Henson [25] ha dimostrato tale teorema in forma generale seguendo una diversa linea, e inoltre il teorema di rappresentazione per gli integrali, nel caso illimitato da noi discusso nell'osservazione 1.4.

Una dimostrazione dello stesso Teorema 1 è stata data da Bonacini e Meloni [18] seguendo la linea di Bernstein - Wattemberg, ma semplificandola.

La tecnica di codesto Teorema è simile a quella sopra delineata per dimostrare il Teorema 2. Si dimostra dapprima un Lemma, analogo al Lemma 1, nel quale si considerano le funzioni semplici in luogo delle funzioni misurabili, e poi si dimostra il teorema usando una certa relazione concorrente.

Il teorema 1, insieme al teorema 2 e a molti altri teoremi di rappresentazione di forme lineari, si trova nell'articolo [35] di M. SAITO. Nella prima parte di tale articolo si trova un teorema di rappresentazione di applicazioni lineari in un contesto abbastanza generale. Da esso si ottiene un Corollario già dimostrato da Luxemburg [31], che vale la pena di ricordare.

TEOREMA 3: Sia K un campo topologico e X uno spazio vettoriale topologico sopra K.

Sia X' lo spazio delle forme lineari continue su X. Allora per ogni forma lineare P su X' esiste un punto $v_P \in {}^*X$ tale che

$$P(f) = {}^*f(v_P)$$

Da tale teorema si ha il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] \arrow[dr, tail] & X'' \arrow[d, tail] \\ & {}^*X \end{tikzcd}$$

Tale risultato fa tornare indietro ad un articolo [34] sulla rappresentazione non-standard dei funzionali sullo spazio ℓ^∞, scaturito dalla sorgente più a monte e forse più rigogliosa delle idee sopra esposte: Abraham ROBINSON (1918-1974)