1 - Introduzione -

Nello studio di problemi integro-differenziali, molto spesso non basta stabilire l'esistenza e unicità della soluzione, ma occorre sapere se certe proprietà che si suppongono sui dati del problema (in particolare le condizioni iniziali) continuano a valere per la soluzione.

Ad esempio, nel caso in cui la soluzione indichi una densità di particelle, non avrebbe senso una soluzione negativa, quindi è opportuno controllare che la soluzione sia positiva, supposto (ovviamente) che la condizione iniziale lo sia.

Quando si traduce il problema integro-differenziale in una formulazione astratta, cioé in un opportuno spazio funzionale l'indagine precedente può consistere nello stabilire se la soluzione appartiene ad un cono[1] chiuso Q di uno spazio di Banach X, o più in generale ad un chiuso supposto sempre che la condizione iniziale vi appartenga.

In questo lavoro illustreremo un metodo abbastanza semplice per stabilire un'appartenenza della soluzione $u(t) = u(t,u_0)$ del problema di Cauchy:

$$(1.1)\quad \frac{du}{dt} = Au + Fu \qquad t \in [0,T] \quad ; \quad u(o) = u_0 \in D(A) \cap Q,$$ ad un cono chiuso Q di uno spazio di Banch X.

Nel corso del lavoro supporemo che A sia un operatore lineare definito in $D(A)$ e generatore di un semigruppo di operatori $\{z(t);\ t \geq 0\}$ lineari e limitati (cfr. n. 2 per le definizioni), mentre $F : X \to X$ è in ge

---

([1]) Se X è uno spazio vettoriale sul corpo $\mathbb{K}$ (dei reali $\mathbb{R}$ o dei complessi $\mathbb{C}$) e $Q \subseteq X$, diremo che Q è un cono di X se:

(1.2) $x,y \in Q,\ \alpha \geq 0 \Longrightarrow x + y \in Q\ ,\ \alpha x \in Q.$

Dalla definizione segue che un cono è un particolare insieme convesso.

nerale un operatore non lineare, ma sufficientemente regolare per garantire l'esistenza e l'unicità, almeno locale, della soluzione della (1.1)

Altri autori si sono occupati di questo problema ed anche in modo più sistematico, però, specialmente in vista delle possibili applicazioni, a volte le trattazioni appaiono piuttosto elaborate e con ipotesi difficili da verificare nei problemi concreti.

In particolare citeremo esplicitamente il libro di Martin [13] ed i lavori di M. Iannelli [8] e [9]. In [13] si sfrutta un'idea di Nagnuno [14] esposta nel caso $X = \mathbb{R}^n$ e che si può così sintetizzare: dato il problema di Cauchy

(1.3) $\dfrac{du}{dt} = A(t,u) \quad u(0) = u_0 \in Q \subseteq \mathbb{R}^n$ con Q chiuso, A continua e localmente lipschitziana rispetto ad u in $[0,T] \times Q$, se

(1.4) $\liminf\limits_{h \to 0+} \dfrac{d(u + h\, A(t,u);Q)}{h} = 0$

per $(t,u) \in [0,T] \times Q$ e $|u - u_0| < r$ (con r opportuno) allora esiste (localmente) una sola soluzione di (1.3) ed appartiene a Q (cioé $u(t) \in Q$ per $t \in [0,r]$ con r opportuno ed $r \leq T$).

La (1.4) è abbastanza intuitiva se si osserva che $u_0 + h\, A(0,u_0)$ è la tangente alla curva integrale $(t,u(t))$ nel punto $(0,u_0)$, ma non sempre la (1.4) è facile da verificare.

Nel testo di Martin la stessa idea viene riproposta in X di dimensione infinita, e si danno delle condizioni sufficienti, oltre alla (1.4), che assicurano l'esistenza della soluzione di (1.3) e la sua appartenenza ad un sottoinsieme Q di X nei casi in cui Q è un cono, oppure un convesso oppure un chiuso oppure un insieme localmente chiuso, cioé è chiuso in $X : Q \cap \bar{B}(u,r)$ con $u \in Q$, r opportuno e $\bar{B}(u,r) = \{v \in X;\ |v-u| \leq r\}$.

Martin raccoglie in [13] una buona parte dei risultati in questo settore ed in particolare quelli relativi ad equazioni semilineari ed autonome cioé del tipo (1.1.)(cfr. n. 2) . Tale trattazione è quindi ben più generale di quanto ci proponiamo di fare in queste pagine, il cui scopo, ripetiamo, è sopratutto d'illustrare ai "non addetti ai lavori", un metodo che ci è stato suggerito dallo studio di alcuni problemi di Fisica Matematica.

Riporteremo alcuni di questi problemi per illustrare tale tecnica.

Infine vogliamo esplicitamente osservare che, stabilita l'esistenza e l'unicità di una soluzione locale e la sua appartenenza ad un cono, a volte questo fatto può essere utile per maggiorare $|u(t;u_0)|$ e trovare la soluzione globale (cfr. ad esempio [3], [4] , [5] e [7]) .