1 - Introduzione -

Nello studio di problemi integro-differenziali, molto spesso non basta stabilire l'esistenza e unicità della soluzione, ma occorre sapere se certe proprietà che si suppongono sui dati del problema (in particolare le condizioni iniziali) continuano a valere per la soluzione.

Ad esempio, nel caso in cui la soluzione indichi una densità di particelle, non avrebbe senso una soluzione negativa, quindi è opportuno controllare che la soluzione sia positiva, supposto (ovviamente) che la condizione iniziale lo sia.

Quando si traduce il problema integro-differenziale in una formulazione astratta, cioé in un opportuno spazio funzionale l'indagine precedente può consistere nello stabilire se la soluzione appartiene ad un cono[1] chiuso Q di uno spazio di Banach X, o più in generale ad un chiuso supposto sempre che la condizione iniziale vi appartenga.

In questo lavoro illustreremo un metodo abbastanza semplice per stabilire un'appartenenza della soluzione $u(t) = u(t,u_0)$ del problema di Cauchy:

(1.1) $\frac{du}{dt} = Au + Fu \qquad t \in [0,T] \quad ; \quad u(o) = u_0 \in D(A) \cap Q,$ ad un cono chiuso Q di uno spazio di Banch X.

Nel corso del lavoro supporemo che A sia un operatore lineare definito in $D(A)$ e generatore di un semigruppo di operatori $\{z(t);\ t \geq 0\}$ lineari e limitati (cfr. n. 2 per le definizioni), mentre $F : X \to X$ è in ge

---

([1]) Se X è uno spazio vettoriale sul corpo $\mathbb{K}$ (dei reali $\mathbb{R}$ o dei complessi $\mathbb{C}$) e $Q \subseteq X$, diremo che Q è un cono di X se:

(1.2) $x,y \in Q,\ \alpha \geq 0 \Longrightarrow x + y \in Q\ ,\ \alpha x \in Q.$

Dalla definizione segue che un cono è un particolare insieme convesso.

nerale un operatore non lineare, ma sufficientemente regolare per garantire l'esistenza e l'unicità, almeno locale, della soluzione della (1.1)

Altri autori si sono occupati di questo problema ed anche in modo più sistematico, però, specialmente in vista delle possibili applicazioni, a volte le trattazioni appaiono piuttosto elaborate e con ipotesi difficili da verificare nei problemi concreti.

In particolare citeremo esplicitamente il libro di Martin [13] ed i lavori di M. Iannelli [8] e [9]. In [13] si sfrutta un'idea di Nagnuno [14] esposta nel caso $X = \mathbb{R}^n$ e che si può così sintetizzare: dato il problema di Cauchy

(1.3) $\frac{du}{dt} = A(t,u) \quad u(0) = u_o \in Q \subseteq \mathbb{R}^n$ con Q chiuso, A continua e localmente lipschitziana rispetto ad u in $[0,T] \times Q$, se

$$(1.4) \quad \liminf_{h \to o+} \frac{d(u + h\, A(t,u);Q)}{h} = 0$$

per $(t,u) \in [0,T] \times Q$ e $|u - u_o| < r$ (con r opportuno) allora esiste (localmente) una sola soluzione di (1.3) ed appartiene a Q (cioè $u(t) \in Q$ per $t \in [0,r]$ con r opportuno ed $r \leq T$).

La (1.4) è abbastanza intuitiva se si osserva che $u_o + h\, A(0,u_o)$ è la tangente alla curva integrale $(t,u(t))$ nel punto $(0,u_o)$, ma non sempre la (1.4) è facile da verificare.

Nel testo di Martin la stessa idea viene riproposta in X di dimensione infinita, e si danno delle condizioni sufficienti, oltre alla (1.4), che assicurano l'esistenza della soluzione di (1.3) e la sua appartenenza ad un sottoinsieme Q di X nei casi in cui Q è un cono, oppure un convesso oppure un chiuso oppure un insieme localmente chiuso, cioè è chiuso in $X : Q \cap \bar{B}(u,r)$ con $u \in Q$, r opportuno e $\bar{B}(u,r) = \{v \in X;\ |v-u| \leq r\}$.

Martin raccoglie in [13] una buona parte dei risultati in questo settore ed in particolare quelli relativi ad equazioni semilineari ed autonome cioé del tipo (1.1.)(cfr. n. 2) . Tale trattazione è quindi ben più generale di quanto ci proponiamo di fare in queste pagine, il cui scopo, ripetiamo, è sopratutto d'illustrare ai "non addetti ai lavori", un metodo che ci è stato suggerito dallo studio di alcuni problemi di Fisica Matematica.

Riporteremo alcuni di questi problemi per illustrare tale tecnica.

Infine vogliamo esplicitamente osservare che, stabilita l'esistenza e l'unicità di una soluzione locale e la sua appartenenza ad un cono, a volte questo fatto può essere utile per maggiorare $|u(t;u_0)|$ e trovare la soluzione globale (cfr. ad esempio [3], [4] , [5] e [7]) .

2. Preliminari e risultati principali.

Sia X uno spazio di Banach (reale o complesso) con norma $|\cdot|$ ed A un operatore con dominio $D(A)$ e codominio $R(A)$ in X.

Seguendo T.Kato (cfr. [10] pag. 485), diremo che $A \in \mathcal{G}(M,b)$ se

(2.1) A è lineare, chiuso e $D(A)$ è denso in X.

(2.2) Detto $\rho(A)$ l'insieme risolvente di A, è

$$(b,+\infty) = \{z \in \mathbb{R};\ z > b\} \subset \rho(A) \quad \text{e}$$

$$|(zI-A)^{-k}| \leq M(z-b)^{-k}\ ,\quad z > b,\ k = 1,2,3,\ldots$$

(qui $|\cdot|$ è la norma in $\mathcal{B}(X)$ spazio degli operatori lineari e limitati in X).

In questo caso A genera un semigruppo di operatori $\{z(t);\ t \geq 0\}$ lineari e limitati con le seguenti proprietà:

(2.3) $Z(0) = I \quad , \ Z(t+s) = Z(t)Z(s) \qquad t,s \geq 0$

(2.4) $t \to Z(t)x$ è continua per ogni $x \in X$

(2.5) $t \to Z(t)x$ è derivabile per ogni $x \in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt} Z(t)x = Z(t)Ax = A\,Z(t)x \qquad t \geq 0$$

(2.6) $|Z(t)| \leq M \exp(bt), \qquad t \geq 0$

A volte $Z(t)$ viene denotato con $\exp(tA)$. Nel seguito supporremo che $A \in \mathcal{G}(M,b)$ con $b \geq 0$. Nel caso in cui $b < 0$ si ottengono risultati migliori in quanto

$$|Z(t)\ x| \leq M \exp(bt)\ |x| \leq M\ |x|\ .$$

E'solo per non dovere esaminare continuamente i due casi, che considereremo quello dei due che presenta maggiori difficoltà (almento dal punto di vista dei calcoli).

Al problema (1.1) si vuole associare l'equazione integrale

(2.7) $u = Pu$

dove

(2.8) $(Pu)(t) = v_o(t) + \int_o^t Z(t-s)F(u(s))ds$

(2.9) $v_o(t) = Z(t)u_o$.

Ogni soluzione della (2.7) è detta una soluzione "mild" della (1.1) (cfr. [6]) ed in generale tale soluzione non è anche soluzione della (1.1) (cioé soluzione "forte"), mentre ogni soluzione della (1.1) è soluzione della (2.7). Sotto opportune ipotesi per la F, come la derivabilità secondo Frechét e la continuità di $F'_u v$ rispetto ad u(cfr. [1] , [11] ,[12],[15]), una soluzione della (2.7) è anche soluzione della (1.1).

Nel seguito ci occuperemo della (2.7), anche perché dal punto di vista fisico, quest'ultima è molto spesso più significativa della (1.1).

In [13] pag. 354 è provato il seguente

<u>TEOREMA</u>. Se $A \in \mathcal{G}(1,b)$, Q è un sottoinsieme chiuso di X tale che

(2.10) $Z(t) : Q \to Q$ per ogni $t \geq 0$

(2.11) $F : Q \to X$ è continua

(2.12) $\lim_{h\to 0^+} d(x+h\, F(x); Q)/h = 0$ per ogni $x \in Q$

(2.13) esiste un $\omega \in \mathbb{R}$ tale che $m_-[x-y, Fx - Fy] \leq \omega|x - y|$ per ogni $x,y \in Q$, dove

$$m_{\pm}[x,y] = \lim_{h \to 0\pm} (|x+hy| - |x|)/h$$

(si dice che $F - \omega I$ è dissipativa, e questo porta $I - hF$ è ingettiva, $(I - hF)^{-1}$ è lipschitziana con $|(I - hF)^{-1}| \leq (1 - h\omega)^{-1}$ per ogni $h > 0$ con $h\omega < 1$).

Orbene, sotto le precedenti ipotesi, esiste una sola soluzione $u(t;u_o)$ di (2.7) su $[0,+\infty)$ per ogni $u_o \in Q$.

Inoltre se definiamo la famiglia $S = \{S(t);\ t \geq 0\}$ di applicazioni da Q su Q con:

(2.14) $S(t)u_o = u(t;u_o)$ per ogni $t \geq 0$ e $u_o \in Q$

allora S è un semigruppo di operatori non lineari su Q ed $A + F$ con $D(A+F) = D(A) \cap Q$) è il suo generatore (le definizioni di semigruppo di operatori non lineari e di generatore sono analoghe, pur di sostituire al concetto di operatore lineare limitato, quello di operatore lipschitziano, cfr. [13] pag. 248).

Noi ci occuperemo in un primo tempo non tanto delle condizioni che garantiscono l'esistenza e l'unicità della soluzione della (2.7) (cosa che vedremo nel n. 3), quanto delle condizioni che ci permettono di affermare che se $u_o \in Q$ anche $u(t,u_o) \in Q$.

Pertanto supporremo, come già detto, che Q sia un cono chiuso in X, $A \in \mathcal{G}(M,b)$ con $b \geq 0$ ed $F : X \to X$ sia non lineare ma sufficientemente regolare per garantire l'esistenza e l'unicità, almeno locale (in $[0,T]$) della soluzione di (2.7).

L'operatore P è definito in $Y = C([0,T];\ X)$ che è uno spazio di Banach con la norma $||u|| = \sup\{|u(t)|;\ t \in [0,T]\}$.

Denoteremo con

$$B(u_o,r) = \{u \in X; |u - u_o| \leq r\} \quad \text{se} \quad u_o \in X$$

$$B_Y(v_o,r) = \{v \in Y ; ||v - v_o|| \leq r\} \quad \text{se} \quad v_o \in Y$$

e con C_r un insieme di X o di Y contenuto in $B(o,r)$ o in $B_Y(o,r)$.

Si ha il seguente

LEMMA (1) . Supponiamo che:

(A) Posto $v_{n+1} = Pv_n$ per $n \in \{0,1,2,...\} = \underline{N}$, la successione delle approssimazioni successive $\{v_n ; n \in \underline{N}\}$, converga all'unica soluzione $u(t;u_o)$ della (2.7),

(B) $Z(t)Q \subset Q \qquad t \in [0,T]$

(C) $F(Q) \subset Q$.

Allora se $u_o \in Q$, anche $u(t;u_o) \in Q$ per $t \in [0,T]$.

DIM.

Denotato con $Y_Q = \{u \in Y; u(t) \in Q \quad \text{per} \quad t \in [0,T]\}$ dalle ipotesi fatte segue allora che se $D(P)$ è il dominio di P risulta

$P(D(P) \cap Y_Q) \subset Y_Q$ e quindi $v_n \in Y_Q$ per $n \in \underline{N}$. Inoltre Y_Q è chiuso e quindi $u(t;u_o) = \lim v_n(t) \in Q$ per $n \to \infty$ C.V.D

Del Lemma (1) si può dare una versione locale con ipotesi più facilmente verificabili in pratica:

LEMMA (2). Supponiamo che:

(A') C_r sia un chiuso limitato di Y tale che $v_o \in C_r$, $P : C_r \to C_r$ e posto $v_{n+1} = Pv_n$ per $n \in \underline{N}$ risulta convergente la successione delle approssimazioni successive all'unica soluzione u della (2.7)

(B) $Z(t)Q \subset Q$ per $t \in [0,T]$

(C') Posto $C_{rQ} = \{v \in C_r \; ; \; v(t) \in Q$ per $t \in [0,T]\}$ risulta :

$$F(v(t) \in Q \quad \text{per} \quad v \in C_{rQ} \quad \text{e per} \quad t \in [0,T].$$

Allora se $u_o \in Q$ anche $u(t;u_o) \in Q$ per $t \in [0,T]$.

DIM.

Sotto le ipotesi (A')(B) (C') risulta $P : C_{rQ} \to C_{rQ}$ e quindi segue facilmente l'asserto C.V.D.

OSSERVAZIONE (1) L'ipotesi (B) non la si è indebolita in quanto di solito è verificata. Si tenga presente che come C_r si può prendere $B_Y(v_o,r)$.

Nel seguito fisseremo la nostra attenzione sul caso locale.

Quando l'ipotesi (C') non è verificata, può allora essere utile il seguente metodo.

Supponiamo che:

(D) Esiste $a > 0$ tale che posto

(2.15) $F_1 = F + aI$

risulti

(2.16) $F_1(v(t)) \in Q$ per $v \in C_{rQ}$ e per $t \in [0,T]$.

In questo caso il problema (1.1) può scriversi:

(2.17) $\dfrac{du}{dt} = A_1 u + F_1 u$, $u(o) = u_o$ dove $A_1 = A - aI$.

Per un noto teorema di perturbazione [10] pag. 495) anche A_1 genera un semigruppo di operatori lineari e limitati e precisamente il semigruppo:

(2.18) $Z_1(t) = \exp(-at)Z(t)$.

Se vale la (B) risulta anche $Z_1(t)Q \subset Q$.

La versione "mild" del problema (2.17) è

(2.19) $u = P_1 u$

con

(2.20) $P_1 u(t) = w_o(t) + \int_o^t Z_1(t-s)F_1(u(s))ds$

(2.21) $w_o(t) = \exp(-at)\, Z(t)u_o$.

Se F è sufficientemente regolare, l'ipotesi (A') del Lemma (2) è verificata anche per P_1, ma non necessariamente nello stesso intervallo $[0,T]$ e quindi da (B) e (D) segue l'asserto del Lemma (2).

Si ha quindi il seguente

TEOREMA (1). Se del Lemma (2) sono verificate le ipotesi (B)(D) ed (A') per P_1 su un chiuso limitato contenente w_o, allora se $u_o \in Q$ anche $u(t;u_o) \in Q$ in un opportuno intervallo $[0,T]$.

3. PARTICOLARI TIPI DI OPERATORI F

Al fine di chiarire meglio il metodo tratteremo il problema (1.1) con F di tipo particolare.

Supponiamo inizialmente che per $u,v \in X$ risulti:

(3.1) $|F(u) - F(v)| \leq k(|u| + |v|)\ |u-v|$

(3.2) $|F(u)| \leq k|u|^2$

con k costante positiva.

Tenendo presente che l'ipotesi $A \in G(M,b)$ porta che

(3.3) $|Z(t)| \leq M \exp(bt)$ per $t \geq 0$,

risulta $||v_0|| \leq M \exp(bT)\ |u_0|$ e posto

$$N = M \exp(bt)\ |u_0| + r$$

non appena si prende $u,v \in B_Y(v_0,r)$ risulta

$$||F(u) - F(v)|| \leq 2kN\ ||u - v||$$

$$||F(u)|| \leq kN^2$$

e poi

$$||P(u) - P(v)|| \leq M(\exp(bT)-1)/b\ 2kN\ ||u-v||$$

$$||P(u) - v_0|| \leq M(\exp(bT)-1)/b\ kN^2.$$

Posto:

(3.4) $$p = M(\exp(bT)-1)/b\ 2KN^2/r$$

si ottiene

(3.5) $$||P(u) - P(v)|| \leq p\ ||u-v||$$

(3.6) $$||P(u) - v_0\ || \leq pr.$$

La p riguardata come funzione di T è crescente, inoltre $p(T) \to 0$ se $T \to 0+$, quindi per T sufficientemente piccolo risulta $p = p(T) < 1$ e dopo ciò dalla (3.5) e (3.6) segue che P trasforma $B_Y(v_0,r)$ in sé ed è contrattivo. Per un teorema di punto fisso, esiste una ed una sola soluzione $u \in B_Y(v_o,r)$ dell'equazione (2.7). Pertanto sotto le ipotesi (3.1) e (3.2) è verificata la (A') del Lemma (2).

Supponiamo ora che sia verificata la (D). Risulta per $t \geq 0$

$$|Z_1(t)| \leq M \exp(t(b-a)) \tag{3.7}$$

Si hanno due casi: $b - a > 0$ oppure $b - a \leq 0$.

Poniamo

$$M_1 = \begin{cases} M \exp(T(b-a)) \, |u_o| & \text{se } b-a>0 \\ M \, |u_o| & \text{se } b-a\leq 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Risulta $||w_o|| \leq M_1$ e posto

$$N_1 = M_1 + r$$

si ha se $u,v \in B_Y(w_o,r)$:

$$||F_1(u) - F_1(v)|| \leq (2kN_1+a) \quad ||u-v|| \tag{3.9}$$

$$||F_1(u)|| \leq (kN_1 + a) \, N_1 \tag{3.10}$$

$$||P_1(u) - P_1(v)|| \leq p_1||u-v|| \tag{3.11}$$

$$||P_1(u) - w_o|| \leq p_1 r \tag{3.12}$$

con

$$p_1 = M(\exp(T(b-a))-1)/(b-a)(2kN_1+a)N_1/r \ . \tag{3.13}$$

Anche qui per T opportuno risulterà $p_1 = p_1(T) < 1$ e quindi anche P_1 verifica l'ipotesi (A') del Lemma (2). In generale la costante T relativa a p e quella relativa a p_1 saranno diverse, comunque si osservi che, data la crescenza della funzione $h(x) = (\exp(xT)-1)/x$ per $x = 0$ e $h(o) = T$, risulterà $p_1 \leq p$ se $(2kN_1+a)N_1 \leq 2kN^2$ cioè se

(3.14) $$(N_1+a')N_1 \leq N^2$$

avendo posto $2ka' = a$. Poiché per definizione risulta $N_1 \leq N$, la (3.14) sarà verificata se

(3.15) $$N_1 + a' \leq N.$$

La (3.15) è poi verificata se

(3.16) $$a' \leq M \exp(bT)\ |u_o| - M_1 .$$

La (3.16) può a volte essere utile per orientare nella scelta di a.

Osserviamo ancora che sicuramente $p_1 \leq p$ se si verificano le seguenti disuguaglianze per $u,v \in C_{rQ}$ con $C_r = B_Y(w_o,r)$:

(3.17) $$||F_1(u)-F_1(v)|| \leq 2kN||u-v||$$

(3.18) $$||F_1(u)|| \leq kN^2 .$$

In conclusione vale il seguente

<u>TEOREMA (2)</u>. Sia $F : X \to X$ verificante le ipotesi (3.1) e (3.2), $A \in G(M,b)$ e sia verificata l'ipotesi (D), allora per ogni $u_o \in X$ esiste ed è unica la soluzione di (2.7) sull'intervallo $[0,T]$; se poi $u_o \in Q$ allora esiste ed è unica la soluzione di (2.7) e risulta $u(t;u_o) \in Q$ per $t \in [0,T_1]$ con T_1 in generale minore di T. Se alle ipotesi precedenti si aggiungono la (3.17) e (3.18) allora si ha lo stesso asserto con $T_1 = T$.

La trattazione fatta per gli operatori F che verificano la (3.1) e la (3.2) può essere generalizzata per gli operatori F che verificano le seguenti disuguaglianze:

(3.19) $$|F(u)-F(v)| \leq f(|u|,|v|)\ |u-v|$$

(3.20) $$|F(u)| \leq g(|u|)$$

con $g(.)$, $f(.,y)$, $f(x,.)$ crescenti. In tal caso se $u,v \in B_Y(v_o,r)$ risulta

(3.21) $$||F(u)-F(v)|| \leq f(N,N)||u-v||$$

(3.22) $$||F(u)|| \leq g(N).$$

Posto allora $h(N) = \max\{f(N,N)\ ,\ g(N)/r\}$ e $p = M(\exp(bT)-1)/b\ h(N)$ risulta

$$||P(u)-P(v)|| \leq p\ ||u-v||$$
$$||P(u)-v_o|| \leq pr.$$

Ora se $h(N)$ come funzione di T è continua, poiché $p(T) \to 0$ se $T \to 0+$ e $p(T) \geq 0$ per $T \geq 0$, esisterà un T' tale che $p(T) < 1$ per $T \in]0,T']$.

La P è allora contrattiva su $B_Y(v_o,r)$ con $T = T'$ e si ha il seguente

TEOREMA (3). Se nel Teorema (2) alle ipotesi (3.1) e (3.2) si sostituiscono le ipotesi (3.19) e (3.20) con f, g ed h del tipo specificato sopra, si ha la stessa tesi.

4. ESEMPI

In [2] si studia il problema (1.1) con $u = u(x,v,w)$; $x \in \underline{R}$; $v,w \in [v_1,v_2]$

$$Au = -v \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{w-v}{\tau} u\right)$$

$$F(u) = q\{(J_1u)(J_2u)-uJ_3J_1u\}\ ;\quad q > 0 \quad \text{cost.}$$

$$J_1u = \int_{v_1}^{v_2} u(x,v,w)dw$$

$$J_2u = \int_{v}^{v_2} (v'-v)u(x,v',w)dv'$$

$$J_3u = \int_{v_1}^{v} (v-v')u(x,v',w)dv'$$

$$X = \{u \in U, C.B.(\underline{R}^2 x\ [v_1,v_2])\ ;\ u(x,v,w) = 0 \quad \text{se} \quad v \notin [v_1,v_2]\}$$

$$|u| = \sup\{|u(x,v,w)|\ ;\ (x,v,w)\quad \underline{R}^2 x[v_1,v_2]\}.$$

Orbene si prova che A genera un gruppo $Z(t)$ tale che $|Z(t)| = \exp(t/\tau)$ e che vale la (3.1) e (3.2) con $k = q(v_2 - v_1)^3$.

Il problema (1.1) è equivalente al problema (2.7) perché F è derivabile secondo Frechét con derivata $F'_u v$ continua rispetto ad u.

Si è interessati, dato il significato fisico, alle soluzioni positive del problema (1.1), quando u_o è positiva.

Ora le ipotesi del Lemma (2) sono tutte verificate ad eccezione della (C'). Basta infatti prendere $u(x,v,w) = 1$ per avere

$$F(u) = (v_2 - v_1)^2(v_2+v_1-2v)/2 \notin Q$$

dove $$Q = \{u \in X; u(x,v,w) \geq 0 \quad \text{per } (x,v,w) \in \underline{R}^2 x[v_1,v_2]^2\} \quad .$$

Se però si prende

$$F_1(u) = q\{(J_1u)(J_2u) + (a-J_3J_1u)u\}$$

ed

$$a = (v_2 - v_1)^3/2\ (\exp(T/\tau)\ |u_o| + r) \tag{4.1}$$

risulta verificata la (D) ed anche la (3.17) e (3.18).

Per i dettagli si rimanda al lavoro citato, si noti solo che il valore di a dato dalla (4.1) viene determinato naturalmente imponendo che F_1 verifichi la (D). Infatti posto $C_r = B_Y(v_o,r)$, poiché se $u \in C_{rQ}$ risulta $J_1 u$, $J_2 u \in Q$, basterà imporre che sia $a - J_3 J_1 u \in Q$ cioé $J_3 J_1 u \leq a$.

Facendo i conti si ottiene

$$J_3 J_1 u \lesssim (V_2 - v_1)^3/2 \ |u| \lesssim (v_2 - v_1)^3/2 \ (\exp(T/\tau)|u_o| + r)$$

essendo $|v_o(t)| = |Z(t)u_o| \lesssim \exp(t/\tau)|u_o|$.

In [7] si studia il sistema :$(t>0, |x| < L, |\mu| \lesssim 1)$

$$(4.2)\begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial t} = -\mu v \dfrac{\partial n}{\partial x} - v\Sigma(\tau)\, n + \dfrac{1}{2} v \cdot \gamma_1(\tau) \displaystyle\int_{-1}^{1} n(x,\mu';t)d\mu' + \lambda c(x;t) \\[2ex] \dfrac{\partial c}{\partial t} = -\lambda c + \dfrac{1}{2} v\ \gamma_2(\tau) \displaystyle\int_{-1}^{1} n(x,\mu';t)d\mu' \\[2ex] \dfrac{\partial \tau}{\partial t} = D \dfrac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \dfrac{1}{2} K(\tau) \displaystyle\int_{-1}^{1} n(x,\mu';t)d\mu' \end{cases}$$

con le condizioni al contorno

$$(4.3)\begin{cases} n(-L,u;t) = 0 & \mu \in (0,1] \\ n(L,u;t) = 0 & \mu \in [-1,0) \\ \tau(-L;t) = \tau(L;t) = \tau_r \end{cases}$$

e le condizioni iniziali

$$(4.4)\quad n(x,\mu;0) = n_o(x,\mu) \ ; \ c(x;0) = c_o(x) \ ; \ \tau(x;0) = \tau_o(x)$$

dove $n = n(x,\mu;t)$; $c = c(x;t)$; $\tau = \tau(x;t)$; v,λ,D sono costanti positive

$K,\gamma_1,\gamma_2,\Sigma,\tau_r,n_o,c_o,\tau_o$ sono funzioni positive assegnate.

Posto

$$u_1(t) = n(x,\mu;t) \; ; \; u_2(t) = c(x;t); \; u_3(t) = \tau(x;t)-\tau_r \; ,$$

con ovvie notazioni, il sistema (4.2) (4.3) (4.4) diventa:

$$(4.5) \quad \begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = B_1u_1(t) - a_1(u_3(t)u_1(t)+a_2(u_3(t))J_1u_1(t)+u_2(t) \\[2ex] \dfrac{du_2}{dt} = -\lambda u_2(t) + a_3(u_3(t))J_2u_1(t) \\[2ex] \dfrac{du_3}{dt} = B_3u_3(t) + a_4(u_3(t))J_2u_1(t) \\[2ex] u_1(0) = n_o \; ; \; u_2(0) = c_o \; ; \; u_3(0) = \tau_o - \tau_r \end{cases}$$

dove $u_i(t) \in X_i$ per $t \geq 0$ e X_i sono gli spazi di Hilbert:

$$X_1 = L^2([-L,L] \times [-1,1]) \; ; \; X_2 = X_3 = L^2([-L,L]).$$

Le condizioni al contorno sono inglobate negli insiemi di definizione degli operatori B_1 e B_3 come segue

$$D(B_1) = \{f_1 \in X_1; \; \mu \frac{\partial f_1}{\partial x} \in X_1 \; , \; f_1(-L,\mu) = 0 \quad \text{per} \quad \mu \in (0,1],$$

$$f_1(L,\mu) = 0 \quad \text{per} \quad \mu \in [-1,0)\}$$

$$D(B_3) = \{f_3 \in X_3; \; f_3(-L) = f_3(L) = 0\}.$$

Sulle a_i, che si considerano funzioni da X_3 in $X_\infty = L^\infty([-L,L])$, si fanno le seguenti ipotesi:

(I1) $0 \leq a_i' \leq a_i(f_3(x)) \leq a_i'' < +\infty$ per $f_3 \in X_3$ e per $|x| \leq L$, con a_i', a_i'' costanti opportune e $i = 1, 2,3,4$;

(I2) $|a_i(f_3)-a_i(g_3)|_\infty \leq \bar{a}_i |f_3 - g_3|_3$ per $f_3, g_3 \in X_3$ ed $\bar{a}_i$ costanti positive;

(I3) Esiste $b_{if_3} = (da_i)/(df_3)$ (derivata di Frechét) per ogni $f_3 \in X_3$ ed appartiene a $\mathcal{B}(X_3, X_\infty)$ (cfr. [10] pag. 149)

(I4) per ogni $g_3 \in X_3$, $|b_{if_3}g_3 - b_{if_3'}g_3|_\infty \to 0$ se $|f_3 - f_3'|_3 \to 0$.

Posto $u = (u_1, u_2, u_3)$; $u_0 = (n_0, c_0, \tau_0 - \tau_r)$ il problema (4.5) si può sintetizzare col problema astratto (1.1) avendo posto

$$A = \begin{pmatrix} B_1, & 0, & 0 \\ 0, & -\lambda I, & 0 \\ 0, & 0, & B_3 \end{pmatrix} \qquad D(A) = D(B_1) \times X_2 \times D(B_3)$$

$$F(f) = \begin{pmatrix} -a_1(f_3)+a_2(f_3)J_1 f_1 + f_2 \\ a_3(f_3)J_2 f_1 \\ a_4(f_3)J_2 f_1 \end{pmatrix} \qquad D(F) = X = X_1 \times X_2 \times X_3$$

con prodotto scalare

$$(f,g) = (f_1, g_1)_1 + (f_2, g_2)_2 + \delta_0^2 (f_3, g_3)_3$$

dove $\delta_0^2 = D/K_0 L^2$ e K_0 è un fissato valore di K.

Si definisce poi

$$X_1^+ = \{f_1 \in X;\ f_1(x,\mu) \geq 0 \quad \text{q.o. su} \quad [-L,L]x[-1,1]\}$$

$$X_2^+ = \{f_2 \in X_2\ ;\ f_2(x) \geq 0 \quad \text{q.o. su} \quad [-L,L]\}$$

$$Q = \{u = (u_1,u_2,u_3)\ ;\ u_i \in X_i^+ \quad i = 1,2\}$$

$$A_1 f = Af - a_1'' f_1$$

$$F_1(f) = F(f) + a_1'' f_1$$

Orbene si prova che:

a) $A_1 \in \mathcal{G}(1,-z_o)$ con $z_0 = \min\{a_1'',\ \lambda,\ D/2L^2\} \geq 0$

b) se $f \in Q$ allora $\exp(tA_1)f \in Q$

c) se $f \in Q$ allora $F_1(f) \in Q$.

Si prova inoltre che per F_1 vale la (30) con

$$f(|u|,|v|) = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2\ (|u|^2 + |v|^2))^{\frac{1}{2}}$$

e con α_1 ed α_2 costanti opportune. Poiché inoltre $F_1(0) = 0$, dalla (3.19) segue la (3.20) con $g(|u|) = f(|u|,\ 0)|u|$ .Queste ultime proprietà assicurano la stretta contrattività dell'operatore P_1(cfr. (2.20) su $B_\gamma(w_o,r)$. Si conclude che la soluzione del problema appartiene al cono Q.

Una maggiorazione "a priori" di $|u(t;u_o)|$ assicura poi l'esistenza globale della soluzione "mild" che si dimostra essere anche soluzione "forte".

Lecce, Aprile 1978

BIBLIOGRAFIA

[1] V.Barbu - Non linear semigroups and differential equations in Banach spaces. Editura Academiei Bucuresti Romania, Noordhoff International Publishing Leyden The Netherlands 1976

[2] E.Barone-A.Belleni Morante - A non linear initial value problem arising from kinetic theory of vehicular traffic. Transport Theory Statist. Phys. In corso di stampa.

[3] E.Barone - Su un'equazione semilineare con termine non-lineare dipendente da un parametro, Ric. di Mat. 26 (1977) 41-62.

[4] E.Barone - Un modello matematico di traffico automobilistico con "mollificatore", Riv.Mat.Univ. Parma (in corso di stampa)

[5] A.Belleni-Morante,G.Frosali - Global solution of a Non linear Initial value Problem of Vehicular Traffic, Bollettino U.M.I. (5) 14 - A(1977),71-81.

[6] F.E.Browder - Non linear equation of evolution, Ann.of Math. 80 (1964) 485 - 523.

[7] G.Busoni-V.Capasso -A.Belleni-Morante, Global solution of a non linear neutron trasport problem with temperature feedback,J.Nonlinear Analysis (in corso di stampa).

[8] M.Iannelli - Non linear semigroups on cones of a non reflexive Banach, space, Boll.U.M.I. 3 (1970) 412-419.

[9] I.Iannelli - A note on some linear non contraction semigroups Boll. U.M.I. 6 (1970) 1015 - 1025 .

[10] T.Kato - Perturbation theory for linear operators. Springer Verlag N.Y. 1966.

[11] Y.Kömura - Non linear semigroups in Hilbert spaces. J.Math. Soc. Japan 19 (1967) 493 - 507.

[12] Y.Kömura - Differentiability of non linear semigroups. J.Math. Soc. Japan 21 (1969) 375 - 402.

[13] R.H.Martin JR. - Non linear operators and differential equations in Banach spaces, J.Wiley & Sons Inc. 1976

[14] M.Nagumo - Über die laga der integralkurven gewöhnlicher differentialgleichungen, Proc. Phys. - Math. Soc. Jap. 24 (1942), 551 - 559.

[15] I.Segal - Non linear semigroups. Ann. of. Math. 78