6. I sottoinsiemi "*finiti" di $^*E$.

Data la struttura $\mathcal{E} = (E,Q)$, consideriamo

$$\hat{\mathcal{E}}_F = (\mathcal{P}_F(E),\ Q_F),$$

dove $\mathcal{P}_F(E)$ è l'insieme dei sottoinsiemi finiti di E, e Q_F un insieme di relazioni in $\mathcal{P}_F(E)$.

Consideriamo una μ-potenza $^*\hat{\mathcal{E}}_F$ (fissando l'attenzione, in particolare, sul sostegno $^*\mathcal{P}_F(E)$ ed assumendo, al solito, $J = N$ e μ agglutinata su J).

Ogni elemento di $^*\mathcal{P}_F(E)$ può essere identificato (come si è fatto al n. 5) con un elemento di $\mathcal{P}(^*E)$: questi particolari sottoinsiemi interni di $^*E$, così ottenuti, si dicono * finiti. (Un insieme * finito è dunque un sottoinsieme di $^*E$, i cui elementi $[a(i)]$ si possono ottenere "estraendo" la successione $(a(i))$ da una successione $(A(i))$ di sottoinsiemi di E q.o. finiti per $i \in N$).

Ogni sottoinsieme finito di E è anche * finito (ma non viceversa!). Infatti se

$$D = \{e_1, e_2, \ldots e_p\} \subset E\ ,$$

e consideriamo la successione (D), l'insieme * finito che essa individua è proprio $\{e_1, e_2, \ldots e_p\}$, perché ogni successione $e(i)$ di elementi di E, ottenuta tramite Φ da (D), ha codominio D, e quindi dà luogo ad una partizione finita di N in p insiemi

$$M_k = \{i \in N : e(i) = e_k\}, \qquad k = 1,2,\ldots p;$$

uno solo, M_h, di essi, ha misura 1, e pertanto

$$[e(i)] = e_h;$$

d'altra parte è ovvio che ogni $e_k (k = 1,2,\ldots p)$ si può ottenere in questo modo.

Un semplice esempio di insieme *finito che <u>non</u> è sottoinsieme finito di E si può dare per $E = N$, considerando il "segmento iniziale"

$$S = \{1,2,\ldots n,\ldots \nu\}$$

di $^*N$, dove ν è un numero naturale <u>infinito</u> (cfr. n. 3).

Per verificare che S è *finito, basta osservare che S è immagine secondo Φ dell'elemento $[A(i)] \in {}^*\mathcal{P}_F(N)$ rappresentato da

$$A(i) = \{1,2,\ldots i\} .$$

Gli insiemi interni e gli insiemi *finiti hanno particolare importanza in molte applicazioni dei metodi non standard dell'analisi, per esempio, nella cosiddetta "teoria della misura non standard" ([1] , [2]).

In particolare, questa teoria permette un nuovo approccio alle misure semplicemente additive: così il concetto di "massa", che interviene, nella nostra impostazione, a livello di costruzione della teoria non-standard, può essere a sua volta approfondito mediante la teoria stessa: verrebbe spontaneo dire ... "il cerchio si chiude", se non ci si trovasse, invece, di fronte ad un vasto campo di ricerche che ... si apre!