Il numero reale r si dice la <u>parte standard</u> di β.

5. I sottoinsiemi "interni" di ${}^*\mathcal{E}$.

Data la struttura $\mathcal{E} = (E,Q)$ introdotta al n. 1, possiamo associarle la struttura

$$\hat{\mathcal{E}} = (\mathcal{P}(E), \hat{Q}),$$

dove $\hat{Q}$ è un insieme di relazioni in $\mathcal{P}(E)$, cioé fra sottoinsiemi di E.

Costruiamo una μ-potenza ${}^*\hat{\mathcal{E}}$, prendendo ancora $J = N$ e μ agglutinata, con valore 1 sui sottoinsiemi il cui complementare è finito.

Sia ${}^*\mathcal{P}(E)$ il sostegno di ${}^*\hat{\mathcal{E}}$: allora, se $\xi \in {}^*\mathcal{P}(E)$, un rappresentante di tale classe è una successione $(A(i))$ di sottoinsiemi $A(i) \subseteq E$.

Possiamo "identificare" $\xi \in {}^*\mathcal{P}(E)$ con un elemento dell'insieme $\mathcal{P}({}^*E)$, cioé con un sottoinsieme $G \subseteq {}^*E$, nel modo seguente:
gli elementi di G sono <u>tutte e sole le classi</u> $[e(i)]$ di successioni in E tali che

$$e(i) \in A(i) \quad \text{q.o.} \quad \text{per} \quad i \in N.$$

Pertanto:

$${}^*\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{P}({}^*E) .$$

Quindi chiameremo sottoinsiemi di ${}^*E$ anche gli elementi di ${}^*\mathcal{P}(E)$, a patto di intendere ciò nel senso della suddetta identificazione, cioé definendo una

$$\Phi : {}^*\mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}({}^*E)$$

tale che

$$\Phi([A(i)]) = \{[e(i)] \in {}^*E : e(i) \in A(i) \text{ q.o. per } i \in N\} = G.$$

Esistono tuttavia elementi di $\mathcal{P}({}^*E)$ che <u>non</u> appartengono a ${}^*\mathcal{P}(E)$: per esempio, E stesso (o, più precisamente, $\psi(E)$: cfr. n. 2); se fosse $E \in {}^*\mathcal{P}(E)$ (cioé se E fosse rappresentabile come l'insieme G) allora dovrebbe aversi $e \in A(i)$ q.o. per $i \in N$, <u>per ogni $e \in E$</u>; ciò implicherebbe $A(i) = E$ q.o., ma la classe $[A(i)] = [E] \in {}^*\mathcal{P}(E)$ individua (tramite Φ) l'insieme ${}^*E \in \mathcal{P}({}^*E)$, e <u>non</u> l'insieme E.

Quei particolari sottoinsiemi di $^*E$, che sono anche elementi di $^*\mathcal{P}(E)$, si dicono sottoinsiemi <u>interni</u> di $^*\mathcal{E}$.

Osserviamo che gli elementi $[e(i)] \in {}^*E$ si possono evidentemente riguardare come sottoinsiemi "interni", perché ognuno di essi si può ottenere considerando la successione di singoletti $A(i) = \{e(i)\}$.

<u>Esempio 1</u>. Abbiamo visto, alla fine del n. 3, che $^*\mathbb{N}$ <u>non</u> è bene ordinato.(11)

E' interessante osservare che, se ci limitiamo a considerare i sottoinsiemi "interni" di $^*\mathbb{N}$, cioé gli elementi di $^*\mathcal{P}(N)$ ognuno di essi ha minimo.(12)

Sia infatti $\xi \in {}^*\mathcal{P}(N)$ rappresentato dalla successione $(A(i))$, con $A(i) \subseteq N$; consideriamo $[a(i)] \in {}^*N$, elemento di ξ tale che $a(i) = \min A(i)$, e sia poi $[x(i)]$ un qualunque elemento di ξ.

Si ha $x(i) \geq a(i)$ q.o. per $i \in N$,

cioé

$$[x(i)] \overset{*}{\geq} [a(i)]$$

<u>Esempio 2.</u> Il sottoinsieme degli infinitesimi $R_0 \subset {}^*R$ <u>non</u> è "interno": osserviamo infatti che, se

$$[\varepsilon(i)] \in R_0,$$

si ha anche

$$[n\,\varepsilon(i)] \in R_0 \qquad \text{per ogni} \quad n \in N$$

(in particolare, per $\varepsilon(i) = \frac{1}{i}$ si ha $[\frac{n}{i}] \in R_0$); allora se R_0 fosse immagine secondo Φ di un elemento $[A(i)] \in {}^*\mathcal{P}(R)$, si avrebbe, per ogni $n \in N$, $\frac{n}{i} \in A(i)$ q.o. per $i \in N$, e quindi, in particolare (per $n = i$), $1 \in A(i)$ q.o. per $i \in N$, da cui $1 \in R_0$ (contraddizione).

---

(11) l'insieme N_1 dei naturali infiniti non ha minimo.

(12) ciò non esclude, naturalmente, che possano esistere sottoinsiemi <u>non</u> "interni" che abbiano minimo: per esempio, N.