(fissato) $m \in N$, si ha:

$$m < i \quad \text{q.o.} \quad \text{per} \quad i \in N,$$

e questa disuguaglianza non è soddisfatta solo per $i = \{1,2,\ldots m\}$, insieme μ-nullo.

Ogni "numero" di $^*N$ che, come $[i]$, risulta *maggiore di un qualunque "numero" $[m]$ di N, si dice un naturale infinito.

In $^*N$ non è, quindi, vuoto il seguente insieme dei naturali infiniti:

$$N_1 = \{[\nu(i)] \in {}^*N : [m] \overset{*}{<} [\nu(i)] \ , \ \forall\, m \in N\} \quad (6)$$

Ogni numero di $^*N$ che non appartenga ad N_1 si dice naturale finito.

Si può verificare che in $^*\mathbb{N}$ valgono le solite proprietà delle operazioni aritmetiche. Una proprietà di $\mathbb{N}$ che, invece, non si "trasferisce" in $^*\mathbb{N}$ è il buon ordinamento.

Per convincersene, basta considerare, per esempio, l'insieme N_1 dei naturali infiniti: è chiaro che esso non può contenere un elemento minimo ν_0, perché se $\nu_0 \in N_1$, allora anche $\nu_0 - 1 > m$ per ogni $m \in N$, cioé $\nu_0 - 1 \in N_1$.

4. La struttura $^*\mathbb{R}$.

Con procedimento del tutto analogo a quello del n. 3, si può costruire una μ-potenza $^*\mathbb{R}$ a partire da $\mathbb{R}$, struttura dei reali, sempre assumendo come insieme degli indici $J = N$ (e quindi considerando successioni reali $(a(i))$ in luogo di successioni aritmetiche).

Anche $^*\mathbb{R}$ è un'estensione propria di $\mathbb{R}$(7), e non è vuoto il seguente

---

(6) Più semplicemente si può scrivere:
$N_1 = \{\nu \in {}^*N : m < \nu \ , \ \forall\, m \in N\}$, a patto di attribuire il corretto significato ad ogni simbolo.

(7) $^*\mathbb{R}$ si dice un modello elementare non-standard dell'analisi.

sottoinsieme dei numeri reali infiniti positivi:

$$R_1^+ = \{[\beta] \in {}^*R : [\alpha] \overset{*}{<} [\beta] \ , \ \forall\, \alpha \in R\}^{(8)} \ ,$$

perché almeno vi appartiene l'elemento $[i]$ (riguardando $a(i) = i$ come successione reale).

Si può dimostrare facilmente (cfr. ad es., [10]) che anche ${}^*\mathbb{R}$ (come $\mathbb{R}$) è un campo ordinato.

Allora è chiaro, dato $\beta \in {}^*R$, il significato del simbolo $|\beta|$, e pertanto possiamo definire in ${}^*R$ il sottoinsieme dei numeri reali infiniti:

$$R_1 = \{\beta \in {}^*R : \alpha < |\beta| \ , \ \forall\, \alpha \in R\} \ .$$

Ogni "numero" di ${}^*R$ che non appartenga ad R_1 si dice numero reale finito; poniamo:

$$R_F = {}^*R - R_1 = \{\beta \in {}^*R : \exists\, \alpha \in R^+ \text{ tale che } |\beta| < \alpha\}$$

Si osservi che il seguente sottoinsieme di R_F, detto insieme dei numeri reali infinitesimi, è non vuoto:

$$R_0 = \{\beta \in {}^*R : |\beta| < \alpha \quad , \ \forall\, \alpha \in R^+\}^{(9)} \ .$$

Infatti, se consideriamo la classe $\left[\frac{1}{i}\right] \in {}^*R$ e se come massa μ su $J = N$ prendiamo la stessa del n. 3 (che, in particolare, è nulla su ogni sottoinsieme finito di N), si ha, per ogni $\alpha \in R^+$,

$$\frac{1}{i} < \frac{1}{\alpha} \quad \text{q.o.} \quad \text{per } i \in N.$$

Quindi $\beta = \left[\frac{1}{i}\right] \in R_0$. Si noti che lo zero è l'unico numero reale che appartiene a R_0.

---

(8) o, più semplicemente, $R_1^+ = \{\beta \in {}^*R : \alpha < \beta, \ \forall\, \alpha \in R\}$; cfr. nota (6).

(9) Si verifica facilmente che R_F è un anello e che R_0 è un suo ideale.

Concludiamo questo paragrafo osservando che

a) poiché $^*\mathbb{R}$ è un campo ordinato che contiene propriamente $\mathbb{R}$ (più precisamente, $^*\mathbb{R}$ contiene un sottocampo ordinato isomorfo ad $\mathbb{R}$), $^*\mathbb{R}$ non può essere archimedeo (10) e neanche completo (cfr. ad es. [4] e [9]).

b) ogni numero $\beta \in R_F$ si può rappresentare in modo <u>unico</u> come $\beta = r + \varepsilon$, con $r \in R$ ed $\varepsilon \in R_0$.

Infatti, se

$$A = \{a \in R : a \leq \beta\},$$

posto

$$r = \sup A,$$

si ha

$$r \in R :$$

basta allora verificare che

$$\beta - r \in R_0.$$

Ma <u>per ogni</u>

$$\alpha \in R^+$$

si ha

$$r + \alpha > \beta,$$

e pertanto, se

$$|\beta - r| = \beta - r,$$

si ha

$$|\beta - r| < \alpha ;$$

se invece

$$|\beta - r| = r - \beta$$

non può esistere

$$\alpha_0 \in R^+$$

tale che

$$|\beta - r| \geq \alpha_0 ,$$

altrimenti

$$r - \beta \geq \alpha_0 ,$$

cioé

$$r - \frac{\alpha_0}{2} > \beta . \qquad \text{(impossibile)}$$

---

(10) nel senso usuale di "N-archimedeo": non è difficile però provare (cfr. ad. es [9]) che $^*\mathbb{R}$ è *N-archimedeo (ed è ovvio qual'è il significato da attribuire a questo termine). Un'osservazione analoga vale per la completezza.

Il numero reale r si dice la <u>parte standard</u> di β.

5. I sottoinsiemi "interni" di $^*\mathcal{E}$.

Data la struttura $\mathcal{E} = (E,Q)$ introdotta al n. 1, possiamo associarle la struttura

$$\hat{\mathcal{E}} = (\mathcal{P}(E), \hat{Q}),$$

dove $\hat{Q}$ è un insieme di relazioni in $\mathcal{P}(E)$, cioé fra sottoinsiemi di E.

Costruiamo una μ-potenza $^*\hat{\mathcal{E}}$, prendendo ancora $J = N$ e μ agglutinata, con valore 1 sui sottoinsiemi il cui complementare è finito.

Sia $^*\mathcal{P}(E)$ il sostegno di $^*\hat{\mathcal{E}}$: allora, se $\xi \in {}^*\mathcal{P}(E)$, un rappresentante di tale classe è una successione $(A(i))$ di sottoinsiemi $A(i) \subseteq E$.

Possiamo "identificare" $\xi \in {}^*\mathcal{P}(E)$ con un elemento dell'insieme $\mathcal{P}(^*E)$, cioé con un sottoinsieme $G \subseteq {}^*E$, nel modo seguente:
gli elementi di G sono <u>tutte e sole le classi</u> $[e(i)]$ di successioni in E tali che

$$e(i) \in A(i) \quad \text{q.o.} \quad \text{per} \quad i \in N.$$

Pertanto:

$$^*\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{P}(^*E) .$$

Quindi chiameremo sottoinsiemi di $^*E$ anche gli elementi di $^*\mathcal{P}(E)$, a patto di intendere ciò nel senso della suddetta identificazione, cioé definendo una

$$\Phi : {}^*\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(^*E)$$

tale che

$$\Phi([A(i)]) = \{[e(i)] \in {}^*E : e(i) \in A(i) \text{ q.o. per } i \in N\} = G.$$

Esistono tuttavia elementi di $\mathcal{P}(^*E)$ che <u>non</u> appartengono a $^*\mathcal{P}(E)$: per esempio, E stesso (o, più precisamente, $\varphi(E)$: cfr. n. 2); se fosse $E \in {}^*\mathcal{P}(E)$ (cioé se E fosse rappresentabile come l'insieme G) allora dovrebbe aversi $e \in A(i)$ q.o. per $i \in N$, <u>per ogni $e \in E$</u>; ciò implicherebbe $A(i) = E$ q.o., ma la classe $[A(i)] = [E] \in {}^*\mathcal{P}(E)$ individua (tramite Φ) l'insieme $^*E \in \mathcal{P}(^*E)$, e <u>non</u> l'insieme E.