$\mu(\{i_0\}) = 1$, due elementi f e g di F sono equivalenti se e solo se

$$f(i_0) = g(i_0) .$$

Pertanto, dato un qualunque elemento

$$[f(i)] \in {}^*E ,$$

si ha

$$[f(i)] = \{f \in F : f(i_0) = e_0 \in E\},$$

e allora

$$[f(i)]$$

è necessariamente immagine (secondo φ) di $e_0 \in E$, cioé φ è, in tal caso, anche suriettiva. Ciò vuol dire che ${}^*E$ <u>non</u> costituisce un'estensione <u>propria</u> di E.

Viceversa, sia ora μ una massa arbitraria, ma <u>non</u> concentrata in <u>un</u> punto $i_0 \in J$ (cioé μ può essere, per esempio, concentrata in più punti, agglutinata, non atomica, continua: cfr., per questa terminologia, [8]).

Allora esiste $I \subseteq J$, con $\mu(I) = 1$ e $\text{card } I > 1$.

Se $\text{card } I \leq \text{card } E$, possiamo definire una funzione <u>iniettiva</u>

$$f : I \to E$$

(ed ogni suo prolungamento a tutto J individua lo stesso elemento

$[f(i)]$ di ${}^*E$).

Ne segue che, per qualunque $e \in E$, <u>non</u> può aversi $f(i) = e$ q.o. in J, e quindi

$$[f(i)] \in {}^*E - \varphi(E) ,$$

cioé ${}^*E$ è un'estensione <u>propria</u> di E.

3. La struttura ${}^*\mathbb{N}$

Sia $\mathfrak{E} = \mathbb{N}$, struttura dei naturali; J sia l'insieme N dei naturali come insieme di indici, e μ sia una massa su $\mathcal{P}(N)$, non concentrata, con

$\mu(N) = 1$.

In particolare, possiamo prendere (come nella trattazione classica) una μ avente codominio $\{0,1\}$ e tale che $\mu(Y) = 1$ se l'insieme $N-Y$ è finito.

Allora il filtro

$$\{ X \subseteq N : \mu(X) = 1\} ,$$

è necessariamente un ultrafiltro $\mathcal{U}$ in N, non principale (essendo μ non concentrata). Detto Q l'insieme delle relazioni in N, si considera

$$\mathbb{N}_{\mathcal{U}} = (F, {}^*Q),$$

dove F è l'insieme delle <u>successioni</u> in N (o "aritmetiche").

La struttura

$${}^*\mathbb{N} = ({}^*N, {}^*Q) ,$$

che si ottiene da $\mathbb{N}_{\mathcal{U}}$ con il procedimento descritto al n. 1, è una μ-potenza (in particolare, un'ultrapotenza) di $\mathbb{N}$, che è un'estensione <u>propria</u> di $\mathbb{N}$.[5]

Sia

$$\varphi : N \to {}^*N , \qquad \text{con } \varphi(m) = [m] ;$$

si individua un elemento di ${}^*N$ che "non proviene" (mediante φ) da alcun elemento di N, definendo la funzione iniettiva (introdotta alla fine del n.2) $f : N \to N$ mediante la $f(i) = i$.

Allora la classe $[i]$ è un elemento di ${}^*N$ che risulta "star-maggiore" di ogni elemento di N, cioè

$$[m] \stackrel{*}{<} [i] , \qquad \text{per ogni } m \in N;$$

infatti, la relazione (elemento di ${}^*Q$) sopra scritta significa che, per ogni

---

(5) ${}^*\mathbb{N}$ si dice un modello elementare non-standard dell'aritmetica.

(fissato) $m \in N$, si ha:

$$m < i \quad \text{q.o.} \quad \text{per} \quad i \in N,$$

e questa disuguaglianza non è soddisfatta solo per $i = \{1,2,...m\}$, insieme μ-nullo.

Ogni "numero" di $^*N$ che, come $[i]$, risulta $\overset{*}{}$maggiore di un qualunque "numero" $[m]$ di N, si dice un naturale infinito.

In $^*N$ non è, quindi, vuoto il seguente insieme dei naturali infiniti:

$$N_1 = \{[\nu(i)] \in {}^*N : [m] \overset{*}{<} [\nu(i)] \ , \ \forall\, m \in N\} \quad (6)$$

Ogni numero di $^*N$ che non appartenga ad N_1 si dice naturale finito.

Si può verificare che in $^*\mathbb{N}$ valgono le solite proprietà delle operazioni aritmetiche. Una proprietà di $\mathbb{N}$ che, invece, non si "trasferisce" in $^*\mathbb{N}$ è il buon ordinamento.

Per convincersene, basta considerare, per esempio, l'insieme N_1 dei naturali infiniti: è chiaro che esso non può contenere un elemento minimo ν_0, perché se $\nu_0 \in N_1$, allora anche $\nu_0 - 1 > m$ per ogni $m \in N$, cioé $\nu_0 - 1 \in N_1$.

4. La struttura $^*\mathbb{R}$.

Con procedimento del tutto analogo a quello del n. 3, si può costruire una μ-potenza $^*\mathbb{R}$ a partire da $\mathbb{R}$, struttura dei reali, sempre assumendo come insieme degli indici $J = N$ (e quindi considerando successioni reali $(a(i))$ in luogo di successioni aritmetiche).

Anche $^*\mathbb{R}$ è un'estensione propria di $\mathbb{R}$(7), e non è vuoto il seguente

(6) Più semplicemente si può scrivere:
$N_1 = \{\nu \in {}^*N : m < \nu \ , \ \forall\, m \in N\}$, a patto di attribuire il corretto significato ad ogni simbolo.

(7) $^*\mathbb{R}$ si dice un modello elementare non-standard dell'analisi.