"continua". Ma questo teorema di decomposizione di μ assume un aspetto più significativo se, ad ogni passo, determiniamo la componente agglutinata (diciamo β_1) in modo che essa risulti "massimale" rispetto alla condizione $\mu_1 = \mu - \beta_1 \geq 0$. In tal modo β_1 risulta maggiore della corrispondente componente β considerata in [2], e si può provare che due qualunque componenti agglutinate β_i e β_j risultano "separate", nel senso che, posto (per h=i,j)

$$\mathcal{U}_h = \{E \in \mathcal{P}(\Omega) : \beta_h(E) > 0\} \quad ,$$

si ha $\mathcal{U}_i \neq \mathcal{U}_j$.

2. Premesse e richiami

Una funzione

$$\mu : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

si dirà una massa su $\mathcal{P}(\Omega)$ quando

(i) $\mu(E) \geq 0$ per ogni $E \subseteq \Omega$,

(ii) $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$, per $E_1, E_2 \subset \Omega$, con $E_1 \cap E_2 = \emptyset$,

(iii) $\mu(\Omega) < +\infty$.

Una misura di probabilità semplicemente additiva è una massa tale che $\mu(\Omega) = 1$.

(2.1) Proposizione - Se μ è una massa su $\mathcal{P}(\Omega)$, per ogni successione (E_n) di sottoinsiemi di Ω, a due a due disgiunti, si ha

$$(4) \qquad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \quad .$$

Esempio - Sia $\Omega = \mathbb{Q} \cap (0,1]$: se $(a,b] \subseteq \Omega$, definiamo $\mu((a,b]) = b-a$, e prolunghiamo μ a tutto $\mathcal{P}(\Omega)$. Posto $E_n = \{q_n\}$ per ogni $q_n \in \Omega$, si ha $\mu(E_n) = 0$ e quindi

$$1 = \mu(\Omega) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) > 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \ .$$

In particolare, μ si dice una misura (completamente additiva) se nella (4) vale sempre il segno di uguaglianza.

Una massa μ su $\mathcal{P}(\Omega)$ ha una "componente" <u>concentrata</u> in un punto $x \in \Omega$ quando risulta $\mu(\{x\}) > 0$. Una massa μ priva di componenti concentrate verrà chiamata, in breve, una massa "non concentrata".

Se si ammette l'ipotesi del continuo, e se card$\Omega = \mathfrak{c}$, si ha

(2.2) <u>Teorema</u> (Ulam [6]) - Se una massa μ su $\mathcal{P}(\Omega)$, non concentrata, è, in particolare, una misura, allora μ è identicamente nulla su $\mathcal{P}(\Omega)$.

Si dice che una massa μ è <u>agglutinata</u> su un insieme $E_0 \subseteq \Omega$ quando μ assume su $\mathcal{P}(E_0)$ solo i valori 0 e $\mu(E_0) > 0$, senza avere componenti concentrate in alcun punto $x \in E_0$.

In tal caso rimane individuato l'<u>ultrafiltro</u> $\mathcal{U}_0$ in E_0 degli insiemi $E \subseteq E_0$ tali che $\mu(E) = \mu(E_0)$; com'è noto, si ha

(a) $\emptyset \notin \mathcal{U}_0$,

(b) se $E \in \mathcal{U}_0$ ed $A \supseteq E$, allora $A \in \mathcal{U}_0$,

(c) se $A, B \in \mathcal{U}_0$, allora $A \cap B \in \mathcal{U}_0$,

(d) se $E \subseteq E_0$, allora $E \in \mathcal{U}_0$ oppure $E_0 - E \in \mathcal{U}_0$.

Ovviamente, all'ultrafiltro $\mathcal{U}_0$ su E_0 si può associare un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su Ω, così definito:

$$\mathcal{U} = \{ E \subseteq \Omega : E \cap E_0 \in \mathcal{U}_0 \} .$$

D'altra parte, se $\mathcal{U}$ è un qualunque ultrafiltro su $E_0 \subseteq \Omega$, e si definisce μ su $\mathcal{P}(E_0)$ ponendo $\mu(E) = a > 0$ se $E \in \mathcal{U}$, e $\mu(E) = 0$ se $E \notin \mathcal{U}$, allora μ è una massa agglutinata su E_0 oppure concentrata in un punto $x \in E_0$.

I sottoinsiemi su cui μ è agglutinata o i punti nei quali μ è concentrata rientrano nella seguente

(2.3) <u>Definizione</u> - Un sottoinsieme $E \subseteq \Omega$, tale che $\mu(E) > 0$, si dice un <u>atomo</u> quando per ogni $E_1 \subseteq E$ si ha $\mu(E_1) = 0$ oppure $\mu(E - E_1) = 0$.