# COMPLETA ADDITIVITA' SU OPPORTUNE SUCCESSIONI DI INSIEMI DI UNA MISURA DI PROBABILITA' SEMPLICEMENTE ADDITIVA E FORTEMENTE NON ATOMICA

Romano Scozzafava (Lecce)

Summary - Given a set $\Omega$, a finitely additive probability measure $\mu$ on $\mathcal{P}(\Omega)$ is considered. Let $\mu$ be "strongly" non--atomic: we prove that there exists a sequence $(F_n)$ of subsets of $\Omega$ (mutually disjoint and with $\mu(F_n)>0$) whose union has measure equal to an arbitrarily given $\alpha$ (with $0<\alpha\leq\mu(\Omega)=1$) and such that $\mu$ is countably additive on them. As a simple corollary, the following property (well-known for countably additive measures) is deduced: the range of $\mu$ is the whole interval $[0,1]$. In the last part of the paper, some aspects of a decomposition theorem by B. de Finetti (for an arbitrary $\mu$) are deepened.

## 1. Introduzione

Dato un insieme (infinito) $\Omega$, consideriamo una misura finita semplicemente (cioè "finitamente") additiva (in breve: "massa") $\mu$ non concentrata (°), definita su $\mathcal{P}(\Omega)$ (o, più in generale, su una $\sigma$-algebra $\mathcal{Q}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$).

B. de Finetti ha introdotto in [2] un opportuno coefficiente di suddivisibilità

$$r(\mu,E_0) = \sup_{E\subseteq E_0}\left\{\frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} - \frac{\mu(E)}{\mu(E_0)}\right|\right\} \tag{1}$$

della massa $\mu$ nell'insieme $E_0\subseteq\Omega$; si ha $0\leq r\leq\frac{1}{2}$.

Quando per un certo $E_0$ risulta $r<1/2$, la massa $\mu(E)$ non può assumere, per $E\subseteq E_0$, i valori dell'intervallo aperto di estremi $r\mu(E_0)$ e $(1-r)\mu(E_0)$, ed inoltre $\mu$ si può decomporre in

(°) A questa ipotesi ci si può sempre ricondurre (essendo $\text{card}\,\Omega\geq\aleph_0$) sostituendo l'insieme $\Omega$ con $\Omega_0=\Omega-A$, dove l'insieme $A=\{x\in\Omega : \mu(\{x\})>0\}$ è, com'è noto, al più numerabile.

(2) $$\mu = \beta + \mu_1 \quad ,$$

essendo la massa $\beta$ "agglutinata" su $E_0$ (cioè $\beta$ assume, sui sottoinsiemi di $E_0$, solo i due valori 0 e $\beta(E_0)>0$).

Quando invece si ha $r(\mu, E)=1/2$ per ogni $E\subseteq\Omega$, $\mu$ non ha componenti agglutinate e non si può più parlare di intervalli ... proibiti $(r\mu(E),(1-r)\mu(E))$ per il codominio di $\mu$. Ma si ha, di più, che il codominio di $\mu$ è tutto l'intervallo $[0,\mu(\Omega)]$. Tale risultato è ben noto per una $\mu$ "non atomica" (ipotesi che corrisponde all'assenza non solo di masse concentrate, ma anche di quelle agglutinate), nel caso in cui $\mu$ sia una misura <u>completamente</u> (cioè "numerabilmente") additiva (cfr. P.R. Halmos[3]) su una $\sigma$-algebra $\mathcal{A}$ (si noti che in tal caso $\mathcal{A}$, sotto opportune condizioni su card $\Omega$, non può coincidere con tutto $\mathcal{P}(\Omega)$, per il noto risultato di Ulam[6]).

Dopo aver dedicato il n.2 a premesse e richiami, nel n.3 deduciamo la suddetta proprietà del codominio di $\mu$ (per una $\mu$ <u>semplicemente</u> additiva e "fortemente" non atomica) come immediato corollario del seguente risultato (che riteniamo il più significativo di questo lavoro): dato arbitrariamente $\alpha$, con $0<\alpha\leq\mu(\Omega)$, esiste sempre una successione $(F_n)$ di sottoinsiemi di $\Omega$ , a due a due disgiunti e con $\mu(F_n)>0$, tali che

(3) $$\alpha = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_n) \ .$$

Questo risultato è anche l'oggetto di una comunicazione alla "8th Prague Conference"[5].

Nel n.4 prendiamo in esame il caso in cui vale la decomposizione (2): se esiste anche $E_1\subseteq\Omega$ tale che $r(\mu_1,E_1)<1/2$, si può proseguire nella decomposizione, applicata questa volta alla massa $\mu_1$, e così via. Si arriva in tal modo (cfr.[2]) a scrivere $\mu$ come somma di (al più) un'infinità numerabile di masse agglutinate, più (eventualmente) un'ultima componente "continua". Ma questo teorema di decomposizione di $\mu$ assume un aspetto più significativo se, ad ogni passo, determiniamo la componente agglutinata (diciamo $\beta_1$) in modo che essa risulti "massimale" rispetto alla condizione $\mu_1 = \mu - \beta_1 \geq 0$. In tal modo $\beta_1$ risulta maggiore della corrispondente componente $\beta$ considerata in [2], e si può provare che due qualunque componenti agglutinate $\beta_i$ e $\beta_j$ risultano "separate", nel senso che, posto (per h=i,j)

$$\mathcal{U}_h = \{E \in \mathcal{P}(\Omega) : \beta_h(E) > 0\} \quad ,$$

si ha $\mathcal{U}_i \neq \mathcal{U}_j$ .

## 2. Premesse e richiami

Una funzione

$$\mu : \mathcal{P}(\Omega) \longmapsto \mathbb{R}$$

si dirà una massa su $\mathcal{P}(\Omega)$ quando

(i) $\mu(E) \geq 0$ per ogni $E \subseteq \Omega$,

(ii) $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$, per $E_1, E_2 \subset \Omega$, con $E_1 \cap E_2 = \emptyset$,

(iii) $\mu(\Omega) < +\infty$ .

Una misura di probabilità semplicemente additiva è una massa tale che $\mu(\Omega) = 1$.

(2.1) Proposizione - Se $\mu$ è una massa su $\mathcal{P}(\Omega)$, per ogni successione $(E_n)$ di sottoinsiemi di $\Omega$, a due a due disgiunti, si ha

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \quad . \tag{4}$$

Esempio - Sia $\Omega = \mathbb{Q} \cap (0,1]$: se $(a,b] \subseteq \Omega$, definiamo $\mu((a,b]) = b-a$, e prolunghiamo $\mu$ a tutto $\mathcal{P}(\Omega)$. Posto $E_n = \{q_n\}$ per ogni $q_n \in \Omega$, si ha $\mu(E_n) = 0$ e quindi

$$1 = \mu(\Omega) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) > 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \ .$$

In particolare, $\mu$ si dice una misura (completamente additi-