COMPLETA ADDITIVITA' SU OPPORTUNE SUCCESSIONI DI INSIEMI DI UNA MISURA DI PROBABILITA' SEMPLICEMENTE ADDITIVA E FORTEMENTE NON ATOMICA

Romano Scozzafava (Lecce)

Summary - Given a set Ω, a finitely additive probability measure μ on $\mathcal{P}(\Omega)$ is considered. Let μ be "strongly" non-atomic: we prove that there exists a sequence (F_n) of subsets of Ω (mutually disjoint and with $\mu(F_n)>0$) whose union has measure equal to an arbitrarily given α (with $0<\alpha\leq\mu(\Omega)=1$) and such that μ is countably additive on them. As a simple corollary, the following property (well-known for countably additive measures) is deduced: the range of μ is the whole interval $[0,1]$. In the last part of the paper, some aspects of a decomposition theorem by B. de Finetti (for an arbitrary μ) are deepened.

1. Introduzione

Dato un insieme (infinito) Ω, consideriamo una misura finita semplicemente (cioè "finitamente") additiva (in breve: "massa") μ non concentrata (°), definita su $\mathcal{P}(\Omega)$ (o, più in generale, su una σ-algebra $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$).

B. de Finetti ha introdotto in [2] un opportuno coefficiente di suddivisibilità

$$(1)\qquad r(\mu,E_0)=\sup_{E\subseteq E_0}\left\{\frac{1}{2}-\left|\frac{1}{2}-\frac{\mu(E)}{\mu(E_0)}\right|\right\}$$

della massa μ nell'insieme $E_0\subseteq\Omega$; si ha $0\leq r\leq\frac{1}{2}$.

Quando per un certo E_0 risulta $r<1/2$, la massa $\mu(E)$ non può assumere, per $E\subseteq E_0$, i valori dell'intervallo aperto di estremi $r\mu(E_0)$ e $(1-r)\mu(E_0)$, ed inoltre μ si può decomporre in

---

(°) A questa ipotesi ci si può sempre ricondurre (essendo $\mathrm{card}\,\Omega\geq\aleph_0$) sostituendo l'insieme Ω con $\Omega_0=\Omega-A$, dove l'insieme $A=\{x\in\Omega:\mu(\{x\})>0\}$ è, com'è noto, al più numerabile.

(2) $$\mu = \beta + \mu_1 \quad ,$$

essendo la massa β "agglutinata" su E_0 (cioè β assume, sui sottoinsiemi di E_0, solo i due valori 0 e $\beta(E_0)>0$).

Quando invece si ha $r(\mu,E)=1/2$ per ogni $E\subseteq\Omega$, μ non ha componenti agglutinate e non si può più parlare di intervalli ... proibiti $(r\mu(E),(1-r)\mu(E))$ per il codominio di μ. Ma si ha, di più, che il codominio di μ è tutto l'intervallo $[0,\mu(\Omega)]$. Tale risultato è ben noto per una μ "non atomica" (ipotesi che corrisponde all'assenza non solo di masse concentrate, ma anche di quelle agglutinate), nel caso in cui μ sia una misura <u>completamente</u> (cioè "numerabilmente") additiva (cfr. P.R. Halmos[3]) su una σ-algebra $\mathcal{A}$ (si noti che in tal caso $\mathcal{A}$, sotto opportune condizioni su card Ω, non può coincidere con tutto $\mathcal{P}(\Omega)$, per il noto risultato di Ulam[6]).

Dopo aver dedicato il n.2 a premesse e richiami, nel n.3 deduciamo la suddetta proprietà del codominio di μ (per una μ <u>semplicemente</u> additiva e "fortemente" non atomica) come immediato corollario del seguente risultato (che riteniamo il più significativo di questo lavoro): dato arbitrariamente α, con $0<\alpha\leq\mu(\Omega)$, esiste sempre una successione (F_n) di sottoinsiemi di Ω, a due a due disgiunti e con $\mu(F_n)>0$, tali che

(3) $$\alpha = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_n) \ .$$

Questo risultato è anche l'oggetto di una comunicazione alla "8th Prague Conference"[5].

Nel n.4 prendiamo in esame il caso in cui vale la decomposizione (2): se esiste anche $E_1\subseteq\Omega$ tale che $r(\mu_1,E_1)<1/2$, si può proseguire nella decomposizione, applicata questa volta alla massa μ_1, e così via. Si arriva in tal modo (cfr. [2]) a scrivere μ come somma di (al più) un'infinità numerabile di masse agglutinate, più (eventualmente) un'ultima componente "continua". Ma questo teorema di decomposizione di μ assume un aspetto più significativo se, ad ogni passo, determiniamo la componente agglutinata (diciamo β_1) in modo che essa risulti "massimale" rispetto alla condizione $\mu_1 = \mu - \beta_1 \geq 0$. In tal modo β_1 risulta maggiore della corrispondente componente β considerata in [2], e si può provare che due qualunque componenti agglutinate β_i e β_j risultano "separate", nel senso che, posto (per h=i,j)

$$\mathcal{U}_h = \{E \in \mathcal{P}(\Omega) : \beta_h(E) > 0\} \quad ,$$

si ha $\mathcal{U}_i \neq \mathcal{U}_j$.

2. Premesse e richiami

Una funzione

$$\mu : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

si dirà una massa su $\mathcal{P}(\Omega)$ quando

(i) $\mu(E) \geq 0$ per ogni $E \subseteq \Omega$,

(ii) $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$, per $E_1, E_2 \subset \Omega$, con $E_1 \cap E_2 = \emptyset$,

(iii) $\mu(\Omega) < +\infty$.

Una misura di probabilità semplicemente additiva è una massa tale che $\mu(\Omega) = 1$.

(2.1) Proposizione - Se μ è una massa su $\mathcal{P}(\Omega)$, per ogni successione (E_n) di sottoinsiemi di Ω, a due a due disgiunti, si ha

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \quad . \tag{4}$$

Esempio - Sia $\Omega = \mathbb{Q} \cap (0,1]$: se $(a,b] \subseteq \Omega$, definiamo $\mu((a,b]) = b-a$, e prolunghiamo μ a tutto $\mathcal{P}(\Omega)$. Posto $E_n = \{q_n\}$ per ogni $q_n \in \Omega$, si ha $\mu(E_n) = 0$ e quindi

$$1 = \mu(\Omega) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) > 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \ .$$

In particolare, μ si dice una misura (completamente additiva) se nella (4) vale sempre il segno di uguaglianza.

Una massa μ su $\mathcal{P}(\Omega)$ ha una "componente" <u>concentrata</u> in un punto $x\in\Omega$ quando risulta $\mu(\{x\})>0$. Una massa μ priva di componenti concentrate verrà chiamata, in breve, una massa "non concentrata".

Se si ammette l'ipotesi del continuo, e se card$\Omega=\mathbf{c}$, si ha

(2.2) <u>Teorema</u> (Ulam [6]) - Se una massa μ su $\mathcal{P}(\Omega)$, non concentrata, è, in particolare, una misura, allora μ è identicamente nulla su $\mathcal{P}(\Omega)$.

Si dice che una massa μ è <u>agglutinata</u> su un insieme $E_0\subseteq\Omega$ quando μ assume su $\mathcal{P}(E_0)$ solo i valori 0 e $\mu(E_0)>0$, senza avere componenti concentrate in alcun punto $x\in E_0$.

In tal caso rimane individuato l'<u>ultrafiltro</u> $\mathcal{U}_0$ in E_0 degli insiemi $E\subseteq E_0$ tali che $\mu(E)=\mu(E_0)$; com'è noto, si ha

(a) $\emptyset\notin\mathcal{U}_0$,

(b) se $E\in\mathcal{U}_0$ ed $A\supseteq E$, allora $A\in\mathcal{U}_0$,

(c) se $A,B\in\mathcal{U}_0$, allora $A\cap B\in\mathcal{U}_0$,

(d) se $E\subseteq E_0$, allora $E\in\mathcal{U}_0$ oppure $E_0-E\in\mathcal{U}_0$.

Ovviamente, all'ultrafiltro $\mathcal{U}_0$ su E_0 si può associare un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su Ω, così definito:

$$\mathcal{U}=\left\{E\subseteq\Omega:\ E\cap E_0\in\mathcal{U}_0\right\}.$$

D'altra parte, se $\mathcal{U}$ è un qualunque ultrafiltro su $E_0\subseteq\Omega$, e si definisce μ su $\mathcal{P}(E_0)$ ponendo $\mu(E)=a>0$ se $E\in\mathcal{U}$, e $\mu(E)=0$ se $E\notin\mathcal{U}$, allora μ è una massa agglutinata su E_0 oppure concentrata in un punto $x\in E_0$.

I sottoinsiemi su cui μ è agglutinata o i punti nei quali μ è concentrata rientrano nella seguente

(2.3) <u>Definizione</u> - Un sottoinsieme $E\subseteq\Omega$, tale che $\mu(E)>0$, si dice un <u>atomo</u> quando per ogni $E_1\subseteq E$ si ha $\mu(E_1)=0$ oppure $\mu(E-E_1)=0$.

3. Masse fortemente non atomiche

Una massa μ (in particolare, una misura) non atomica è una massa che è nello stesso tempo non concentrata e non agglutinata (°). Una misura non atomica è anche continua, cioè vale la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una partizione finita di Ω in n insiemi E_k, tale che $\mu(E_k) < \varepsilon$ per ogni $k=1, 2,\dots,n$ (cfr. Saks [4]).

Esistono invece masse non atomiche che non sono continue (cfr. [1]). Chiameremo anche fortemente non atomica una massa che sia continua nel senso suddetto (°°).

Il lemma seguente è il punto di partenza per stabilire i risultati principali di questo lavoro, cioè il successivo Teorema (3.2) ed il Corollario (3.3). Osserviamo che quest'ultimo è stato stabilito, nel caso particolare di una misura, ricorrendo al principio di induzione transfinita (cfr. [3]), mentre qui viene ottenuto con un procedimento del tutto elementare, e nel caso più generale di una massa.

(3.1) Lemma - Sia $A \subseteq \Omega$, sia μ una massa fortemente non atomica su $\mathcal{P}(A)$, e sia α arbitrario, con $0 < \alpha \leq \mu(A)$. Allora, qualunque sia $\varepsilon > 0$, esiste $F_1 \subset A$ tale che

$$\alpha - \varepsilon < \mu(F_1) < \alpha \quad ,$$

ed esiste $A_1 \subset A - F_1$ tale che $\mu(A_1) < \varepsilon$ e

$$\mu(F_1) + \mu(A_1) \geqslant \alpha \, .$$

Dim.- Per la continuità di μ, esiste una partizione di A

(°) Dire "non agglutinata" vuol dire che, per nessun $E_0 \subseteq \Omega$, μ assume su $\mathcal{P}(E_0)$ solo due valori. Naturalmente, ciò può però accadere per una componente di μ (cfr. il Teor.(4.4)).

(°°) Pertanto i due concetti "fortemente non atomica" e "non atomica" coincidono nel caso particolare di una misura.

in n insiemi E_k, con $\mu(E_k)<\varepsilon$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Poichè $\alpha\leq\mu(A)$, possiamo considerare n_1, il <u>minimo</u> intero positivo tale che $\mu(\bigcup_{k=1}^{n_1+1} E_k)\geq\alpha$; allora, posto

$$F_1=\bigcup_{k=1}^{n_1} E_k \quad , \quad A_1=E_{n_1+1} \quad ,$$

si ha $\mu(F_1)<\alpha$ e

$$\mu(F_1)=\mu(\bigcup_{k=1}^{n_1+1} E_k)-\mu(A_1)>\alpha-\varepsilon .$$

(3.2) <u>Teorema</u> - Sia μ una massa fortemente non atomica su $\mathcal{P}(\Omega)$, e sia α_0 arbitrario, con $0<\alpha_0\leq\mu(\Omega)=1$. Allora esiste una successione (F_k) di sottoinsiemi di Ω, a due a due disgiunti, e con $\mu(F_k)>0$, tali che

$$\alpha_0=\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(F_k) \quad . \tag{5}$$

<u>Dim</u>.- Sia $0<\varepsilon_0<\alpha_0$. Applicando una prima volta il Lemma (3.1), con $A=\Omega$, $\alpha=\alpha_0$, $\varepsilon=\varepsilon_0$, costruiamo $F_1\subset\Omega$, con

$$\alpha_0-\varepsilon_0<\mu(F_1)<\alpha_0 \quad ,$$

ed $\Omega_1\subset\Omega-F_1$, con $\mu(\Omega_1)<\varepsilon_0$ e

$$\mu(F_1)+\mu(\Omega_1)\geq\alpha_0 .$$

Applichiamo ancora il lemma, con $A=\Omega_1$, $\alpha=\alpha_1=\alpha_0-\mu(F_1)$, $\varepsilon=$ $=\varepsilon_1=\min\{\alpha_1,1/2\}$. Allora esiste $F_2\subset\Omega_1\subset\Omega-F_1$, con

$$\alpha_1-\varepsilon_1<\mu(F_2)<\alpha_1 \quad ,$$

ed esiste $\Omega_2\subset\Omega_1-F_2$, con $\mu(\Omega_2)<\varepsilon_1$ e

$$\mu(F_2)+\mu(\Omega_2)\geq\alpha_1 .$$

Così proseguendo, con $A=\Omega_2$, $\alpha=\alpha_2=\alpha_1-\mu(F_2)=\alpha_0-\sum_{k=1}^{2}\mu(F_k)$, si arriva alla $(n+1)$-esima applicazione del lemma: si costruiscono due insiemi, prima

$$F_{n+1}\subset\Omega_n\subset\Omega-\bigcup_{k=1}^{n}F_k \quad ,$$

con

$$(6) \qquad 0<\alpha_n-\varepsilon_n = \alpha_0-\sum_{k=1}^{n}\mu(F_k)-\varepsilon_n < \mu(F_{n+1})<\alpha_n \quad ,$$

e poi $\Omega_{n+1}\subset\Omega_n-F_{n+1}$, con

$$(7) \qquad \mu(\Omega_{n+1})<\varepsilon_n$$

e $\mu(F_{n+1})+\mu(\Omega_{n+1})\geqslant\alpha_n$, essendo $\varepsilon_n=\min\{\alpha_n,1/(n+1)\}$.

Osserviamo che la successione (F_n) che così nasce verifica, per ogni $n\in\mathbb{N}$, la

$$(8) \qquad \bigcup_{k=n+1}^{\infty} F_k\subset\Omega_n \quad ;$$

inoltre, essendo $0<\varepsilon_n\leqslant\frac{1}{n+1}$, la successione numerica (ε_n) è infinitesima.

Ciò premesso, proviamo che vale la (5). Dalla (6) si deduce

$$0<\alpha_0-\sum_{k=1}^{n+1}\mu(F_k)<\varepsilon_n \quad ,$$

e quindi, passando al limite per $n\to\infty$, l'uguaglianza fra primo e terzo membro della (5). D'altra parte si ha, per la (8):

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k) = \sum_{k=1}^{n}\mu(F_k) + \mu(\bigcup_{k=n+1}^{\infty}F_k)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mu(F_k) + \mu(\Omega_n) \ ,$$

da cui, passando al limite per $n\to\infty$, segue, per la (7),

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu(F_k) \quad ,$$

e quindi, tenendo presente la Prop. (2.1), la (5).

(3.3) Corollario - Il codominio di una massa fortemente non atomica μ, con $\mu(\Omega)=1$, è l'intervallo $[0,1]$.

Dim.- Dato α_0, con $0<\alpha_0<1$, basta prendere $F=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$, dove gli F_k sono quelli del Teor. (3.2), per avere $\mu(F)=\alpha_0$.

4. Il teorema di decomposizione di una μ arbitraria

Sia μ una massa su $\mathcal{P}(\Omega)$. Per $E_0 \subseteq \Omega$, con $\mu(E_0)>0$, si definisce (cfr. la (1), Introduzione) il coefficiente di suddivisibilità $r(\mu, E_0)$ della massa μ in E_0.

(4.1) Proposizione - Si ha $r(\mu, E)=1/2$ per ogni $E \subseteq \Omega$ (con $\mu(E)>0$) se e solo se μ è continua.

(4.2) Proposizione - Sia $E_0 \subseteq \Omega$, con $\mu(E_0)>0$, tale che $r(\mu, E_0)<1/2$. Allora, per qualunque $E \subseteq E_0$, $\mu(E)$ non appartiene all'intervallo aperto di estremi $r\mu(E_0)$ e $(1-r)\mu(E_0)$.

(4.3) Lemma (cfr. [2]) - Se esiste $E_0 \subseteq \Omega$, con $\mu(E_0)>0$, tale che $r(\mu, E_0)<1/2$, allora, qualunque sia $\varepsilon>0$, esiste $F \subseteq E_0$ tale che $r(\mu, F)<\varepsilon$.

(4.4) Teorema (cfr. [2]) - Se μ è una massa su $\mathcal{P}(\Omega)$, non concentrata, e se esiste $E_0 \subseteq \Omega$, con $\mu(E_0)>0$, tale che $r(\mu, E_0)<1/2$, allora vale la decomposizione (2), con la massa β agglutinata su E_0.

Nelle stesse ipotesi del Teor. (4.4), dato $\varepsilon=\frac{2}{3}r(\mu, E_0)<1/3$, sia F l'insieme di cui al Lemma (4.3): si ha $r_F=r(\mu, F)<1/3$, e quindi $(1-r_F)\mu(F)>\frac{2}{3}\mu(F)$. La famiglia

(9) $$\mathcal{U} = \{E \subseteq \Omega : \mu(E \cap F) \geq (1-r_F)\mu(F)\}$$

è un ultrafiltro su Ω: le (a) e (b) sono immediate; la (d) segue dal fatto che, se $\mu(E \cap F)<(1-r_F)\mu(F)$, si ha, per (4.2), $\mu(E \cap F) \leq r_F\mu(F)$, e quindi, posto $E'=\Omega-E$, $\mu(E' \cap F) \geq (1-r_F)\mu(F)$, cioè $E' \in \mathcal{U}$ (ed analogamente si prova che $E \in \mathcal{U}$ implica $E' \notin \mathcal{U}$); la (c) si dimostra osservando che da $A \in \mathcal{U}$ segue $\mu(A' \cap F) \leq r_F\mu(F)$, e quindi, se anche $B \in \mathcal{U}$, si ha $\mu((A \cap B)' \cap F) = \mu((A' \cup B') \cap F) \leq 2r_F\mu(F) < \frac{2}{3}\mu(F)$, cioè $(A \cap B)' \notin \mathcal{U}$.

L'ultrafiltro (9) permette di definire la massa agglutinata

β, che figura nella (2), nella maniera che verrà precisata nel corso della dimostrazione del successivo Teor. (4.6).

(4.5) Definizione - Siano β_1 e β_2 due masse agglutinate rispettivamente sugli ultrafiltri $\mathcal{U}_1$ ed $\mathcal{U}_2$ in Ω. Diremo che β_1 e β_2 sono separate se esistono $E_1 \in \mathcal{U}_1$ ed $E_2 \in \mathcal{U}_2$ tali che $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

(4.6) Teorema - Sia μ una massa su $\wp(\Omega)$, non concentrata. Allora vale la seguente decomposizione

$$(10) \qquad \mu = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n + \mu_0 \quad ,$$

dove le β_n non identicamente nulle sono masse agglutinate, a due a due separate, e μ_0 è una massa continua (o identicamente nulla).

Dim.- Se μ è continua, il teorema è banalmente vero, con tutte le β_n identicamente nulle e $\mu_0 = \mu$.

Se μ non è continua, esiste $E_1 \subseteq \Omega$ tale che $r_1 = r(\mu, E_1) < 1/2$; dato $\varepsilon = \frac{2}{3} r_1$, sia $F_1 \subseteq E_1$ tale che, per il Lemma (4.3), $r_{F_1} = r(\mu, F_1) < \varepsilon$. L'ultrafiltro su Ω

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ E \subseteq \Omega : \mu(E \cap F_1) \geq (1 - r_{F_1}) \mu(F_1) \right\}$$

definisce una massa agglutinata β_1: costruiamola in modo che essa risulti massimale rispetto alla condizione $\mu_1 \geq 0$, essendo $\mu_1 = \mu - \beta_1$. E' chiaro che ciò si ottiene ponendo

$$\beta_1(E) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } E \notin \mathcal{U}_1 \\ (1 - r_{F_1}) \mu(F_1) & , \text{ se } E \in \mathcal{U}_1 . \end{cases}$$

Si noti che $(1 - r_{F_1}) \mu(F_1) = \beta_1(F_1)$, perchè $\mu(F_1 \cap F_1) = \mu(F_1) > (1 - r_{F_1}) \mu(F_1)$.

Se μ_1 è continua, vale la (10) con $\beta_n \equiv 0$ per $n > 1$ e $\mu_0 = \mu_1$. In caso contrario, esiste $E_2 \subseteq \Omega$ tale che $r_2 = r(\mu_1, E_2) < 1/2$, e quindi $F_2 \subseteq E_2$ tale che $r_{F_2} = r(\mu_1, F_2) < \varepsilon = \frac{2}{3} r_2$; introducendo l'ultrafiltro

$$\mathcal{U}_2 = \{ E \subseteq \Omega : \mu_1(E \cap F_2) \geq (1-r_{F_2})\mu_1(F_2)$$

e la massa agglutinata β_2 (definita in modo del tutto analogo alla β_1), e posto $\mu_2 = \mu_1 - \beta_2$, si può scrivere

(11) $$\mu = \beta_1 + \beta_2 + \mu_2 \quad .$$

Verifichiamo che β_1 e β_2 sono separate. Per la definizione (1) di r_{F_1}, dato arbitrariamente $\delta > 0$, esiste $G_1 \in \mathcal{U}_1$, con $G_1 \subseteq F_1$, tale che

$$(1-r_{F_1})\mu(F_1) \leq \mu(G_1) < (1-r_{F_1})\mu(F_1) + \delta .$$

Sia $\delta \leq (1-r_{F_2})\mu_1(F_2)$; allora

$$\mu_1(G_1 \cap F_2) \leq \mu_1(G_1) = \mu(G_1) - \beta_1(G_1) <$$
$$< (1-r_{F_1})\mu(F_1) + \delta - (1-r_{F_1})\mu(F_1) \leq (1-r_{F_2})\mu_1(F_2),$$

e quindi $G_1 \notin \mathcal{U}_2$. Si conclude che $\Omega - G_1 \in \mathcal{U}_2$.

Proseguendo nella decomposizione (11) finchè esistono componenti agglutinate di μ, si costruisce, dopo n passi,

$$\mu_n = \mu - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_n = \mu_{n-1} - \beta_n \geq 0 \; .$$

Osserviamo che, dato $n \in \mathbb{N}$, si può scrivere

$$\mu_{n-1} = \mu - \beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_{n-1} = \mu_1 - \beta_2 - \dots - \beta_{n-1} =$$
$$= \mu_2 - \beta_3 - \dots - \beta_{n-1} = \dots = \mu_{i-1} - \beta_i - \dots - \beta_{n-1} \leq \mu_{i-1} - \beta_i$$

per ogni $i \leq n-1$, e quindi, con procedimento del tutto analogo a quello seguito poco sopra (scegliendo opportunamente $G_i \in \mathcal{U}_i$, con $G_i \subseteq F_i$, e $\delta \leq (1-r_{F_n})\mu_{n-1}(F_n)$), si dimostra che β_i e β_n sono separate.

Se, qualunque sia n, μ_n non è continua, si ottiene una successione (β_n) di masse agglutinate, a due a due separate, con $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(E) \leq 1$ per ogni $E \in \mathcal{P}(\Omega)$. Pertanto $\beta_n(E) \to 0$, ed è chiaro che le masse agglutinate sono al più un'infinità numerabile. Non è difficile a questo punto concludere che la massa

$$\mu_0 = \mu - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

è continua.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARONE, E., Sulle misure semplicemente additive non continue (in corso di pubblicazione).

[2] de FINETTI, B., Probability, Induction and Statistics, J. Wiley, London, 1972 (Chapter 7).

[3] HALMOS, P.R., On the set of values of a finite measure, Bull. Amer. Math. Soc., 53 (1947), 138-144 (Lemma 2).

[4] SAKS, S., Addition to the note on some functionals, Trans. Amer. Math. Soc., 35 (1933), 967-974.

[5] SCOZZAFAVA, R., On finitely additive probability measures, Trans. of the "8th Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, and Random Processes", Praga (1978).

[6] ULAM, S., Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre, Fund. Math., 16 (1930), 140-150.

:::::::::