

12 CURVATURA

0 Sia F una sottovarietà, di dimensione $0 \leq m \leq n$, di uno spazio affine euclideo E , di dimensione n .

Sia $c : \mathbb{R} \rightarrow F \hookrightarrow E$ una curva di classe C^k su E e a valori in F . Dunque, c può essere vista come curva sia di E , sia di F .

Indichiamo con $A : \mathbb{R} \rightarrow \nu TTE$ l'applicazione, detta "curvatura", data da $A \equiv \Gamma \circ d^2c$ e con

$$\check{A} : \mathbb{R} \rightarrow \nu TTF$$

l'applicazione, detta "curvatura su F " data da

$$\check{A} \equiv \check{\Gamma} \circ d^2c .$$

Ricordando che è

$$\nu TTE \Big|_F = \nu TTF \oplus (\nu TTF)^\perp$$

possiamo scomporre A nel termine parallelo alla sottovarietà (\check{A}) e nell'altro termine ortogonale ad F (N o dc) .

1.12.1. DEFINIZIONE

Dicesi CURVATURA relativa a c su F , l'applicazione

$$\check{A} \equiv \check{\Gamma} \circ d^2c : \mathbb{R} \rightarrow \nu TTF \quad \underline{\quad}$$

1.12.2. Considerata la curvatura $A \equiv \Gamma \circ d^2c : \mathbb{R} \rightarrow \nu TTE$, il seguente importante teorema fornisce una relazione tra A , \check{A} ed N e mostra che la parte ortogonale di A non dipende effettivamente dalla derivata seconda di c , ma solo dalla derivata prima.

TEOREMA

E'

$$A = \overset{\circ}{A} + N \circ dc .$$

D. E' $\nu TTE_{/TF} = \nu TTF \oplus (\nu TTF)^\perp$. Allora, vale la seguente relazione

$$A = \overset{\circ}{A} + k \circ d^2 c .$$

Facciamo ora vedere che è

$$k \circ d^2 c = N \circ dc .$$

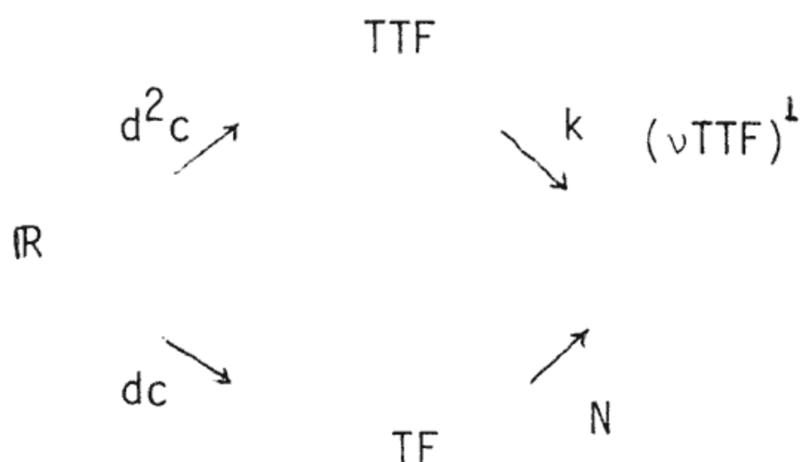
Sia $x \equiv (x^1, \dots, x^m, \dots, x^n)$ un sistema di coordinate ortogonale ad F.

Allora, è

$$(k \circ d^2 c)^i \equiv \ddot{x}^i \circ k \circ d^2 c = \sum_{j,h=1}^m (\overset{\circ}{\Gamma}_{jh}^i \circ c) Dc^j Dc^h$$

$$(N \circ dc)^i \equiv \ddot{x}^i \circ N \circ dc = \sum_{j,h=1}^m (\overset{\circ}{\Gamma}_{jh}^i \circ c) Dc^j Dc^h \quad \text{con } i = m+1, \dots, n .$$

Dunque, il seguente diagramma è commutativo



Dunque, la curvatura A si scompone in due termini.

Il primo termine ($\overset{\circ}{A}$) dipende dalle derivate seconde ($d^2 c$); il secondo termine ($N \circ dc$) dipende in modo quadratico dalle derivate prime (dc).

1.12.3. DEFINIZIONE

Dicesi GEODETICA di F una curva e^k

$$c : \mathbb{R} \rightarrow F \hookrightarrow E$$

tale

$$\dot{A} \equiv \overset{\circ}{\Gamma} \circ d^2c = 0 \quad \underline{\quad}$$

1.12.4. Caratterizziamo ora una geodetica di F .

PROPOSIZIONE Sia $c : \mathbb{R} \rightarrow F \hookrightarrow E$ una curva \mathcal{C}^k su E a valori in F .

Le seguenti condizioni sono equivalenti.

a) c è una geodetica di F .

b) c è una soluzione di $\overset{\circ}{X}_0$, ossia è

$$\overset{\circ}{X}_0 \circ dc = d^2c \quad .$$

D. a) \Rightarrow b). Segue immediatamente dall'espressione in coordinate di $\overset{\circ}{X}_0$ e c .

b) \Rightarrow a). E'

$$\overset{\circ}{\Gamma} \circ d^2c = \overset{\circ}{\Gamma} \circ (\overset{\circ}{X}_0 \circ dc) = \underbrace{(\overset{\circ}{\Gamma} \circ \overset{\circ}{X}_0)}_0 \circ dc = 0 \quad \underline{\quad}$$

1.12.5. Il seguente corollario fornisce il significato geometrico di N .
COROLLARIO

Se $c : \mathbb{R} \rightarrow F \hookrightarrow E$ è una geodetica di F allora

$$A \equiv \overset{\circ}{\Gamma} \circ d^2c = N \circ dc \quad \underline{\quad}$$

Dunque, N misura di quanto le geodetiche di F si discostano dall'essere geodetiche di E (rette).

1.12.6. COROLLARIO

Le seguenti condizioni sono equivalenti.

a) $N = 0$.

b) F è un sottospazio affine $\underline{\quad}$