12 CURVATURA

0 Sia F una sottovarietà, di dimensione $o \leq m \leq n$, di uno spazio affine euclideo E, di dimensione n.

Sia $c : \mathbb{R} \to F \hookrightarrow E$ una curva di classe $\mathcal{C}^k$ su E e a valori in F. Dunque, c può essere vista come curva sia di E, sia di F.

Indichiamo con $A : \mathbb{R} \to \nu TTE$ l'applicazione, detta "curvatura", data da $A \equiv \Gamma \circ d^2 c$ e con

$$\overset{\circ}{A} : \mathbb{R} \to \nu TTF$$

l'applicazione, detta "curvatura su F" data da

$$\overset{\circ}{A} \equiv \overset{\circ}{\Gamma} \circ d^2 c \ .$$

Ricordando che è

$$\nu TTE_{/TF} = \nu TTF \oplus (\nu TTF)^{\perp}$$

possiamo scomporre A nel termine parallelo alla sottovarietà ($\overset{\circ}{A}$) e nell'altro termine ortogonale ad F ($N \circ dc$) .

1.12.1. DEFINIZIONE

Dicesi CURVATURA relativa a c su F, l'applicazione

$$\overset{\circ}{A} \equiv \overset{\circ}{\Gamma} \circ d^2 c : \mathbb{R} \to \nu TTF$$

1.12.2. Considerata la curvatura $A \equiv \Gamma \circ d^2 c : \mathbb{R} \to \nu TTE$, il seguente importante teorema fornisce una relazione tra A, $\overset{\circ}{A}$ ed N e mostra che la parte ortogonale di A non dipende effettivamente dalla derivata seconda di c, ma solo dalla derivata prima.

TEOREMA

E'

$$A = \mathring{A} + N \circ dc\ .$$

D. E' $\nu TTE_{/TF} = \nu TTF \oplus (\nu TTF)^{\perp}$. Allora, vale la seguente relazione

$$A = \mathring{A} + k \circ d^2 c.$$

Facciamo ora vedere che è

$$k \circ d^2 c = N \circ dc.$$

Sia $x \equiv (x^1, \ldots, x^m, \ldots, x^n)$ un sistema di coordinate ortogonale ad F.

Allora, è

$$(k \circ d^2 c)^i \equiv \ddot{\mathring{x}}^i \circ k \circ d^2 c = \sum_{j,h=1}^{m} (\mathring{\Gamma}^i_{jh} \circ c)\, Dc^j\, Dc^h$$

$$(N \circ dc)^i \equiv \ddot{\mathring{x}}^i \circ N \circ dc = \sum_{j,h=1}^{m} (\mathring{\Gamma}^i_{jh} \circ c)\, Dc^j Dc^h \qquad \text{con} \quad i = m+1, \ldots, n\ .$$

Dunque, il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd} & TTF \arrow[dr, "k"] & \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "d^2c"] \arrow[dr, "dc"'] & & (\nu TTF)^{\perp} \\ & TF \arrow[ur, "N"'] & \end{tikzcd}$$

Dunque, la curvatura A si scompone in due termini.
Il primo termine $(\mathring{A})$ dipende dalle derivate seconde $(d^2 c)$; il secondo termine $(N \circ dc)$ dipende in modo quadratico dalle derivate prime (dc).

1.12.3. DEFINIZIONE

Dicesi GEODETICA di F una curva c^k

$$c : \mathbb{R} \to F \hookrightarrow E$$

tale

$$\overset{c}{A} \equiv \overset{c}{\Gamma} \circ d^2 c = 0 \qquad \dot{-}$$

1.12.4. Caratterizziamo ora una geodetica di F.

PROPOSIZIONE Sia $c : \mathbb{R} \to F \hookrightarrow E$ una curva $\mathcal{C}^k$ su E a valori in F.

Le seguenti condizioni sono equivalenti.

a) c è una geodetica di F.

b) c è una soluzione di $\overset{\circ}{\bar{X}}_0$, ossia è

$$\overset{c}{\bar{X}}_0 \circ dc = d^2 c \, .$$

D. a) $\Rightarrow$ b). Segue immediatamente dall'espressione in coordinate di $\overset{c}{\bar{X}}_0$ e c.

b) $\Rightarrow$ a). E'

$$\overset{\circ}{\Gamma} \circ d^2 c = \overset{\circ}{\Gamma} \circ (\overset{c}{\bar{X}}_0 \circ dc) = \underbrace{(\overset{\circ}{\Gamma} \circ \overset{\circ}{\bar{X}}_0)}_{\overset{\shortparallel}{0}} \circ dc = 0 \qquad \dot{-}$$

1.12.5. Il seguente corollario fornisce il significato geometrico di N.

COROLLARIO

Se $c : \mathbb{R} \to F \hookrightarrow E$ è una geodetica di F allora

$$A \equiv \Gamma \circ d^2 c = N \circ dc \qquad \dot{-}$$

Dunque, N misura di quanto le geodetiche di F si discostano dall'essere geodetiche di E (rette).

1.12.6. COROLLARIO

Le seguenti condizioni sono equivalenti.

a) $N = 0$.

b) F è un sottospazio affine $\quad \dot{-}$