9 METRICA INDOTTA

0 Sia F una sottovarietà, di dimensione $o \leq m \leq n$, di uno spazio affine euclideo $(E,\underline{g})$ di dimensione n.

Lo scopo del presente paragrafo è quello di definire su F una metrica. Sappiamo che su E è definita la metrica $\underline{g} : E \to T_2E$ data da

$$\underline{g}(p)(\bar{u},\bar{v}) \equiv \bar{u} \cdot \bar{v} \qquad , \forall\ \bar{u},\bar{v} \in \bar{E} .$$

Ora, in virtù dell'inclusione canonica $TF \hookrightarrow TE$, resta definita, in modo naturale, una metrica "indotta" su F.

Sostanzialmente, restringiamo $\underline{g}$ ai punti di F e, in ogni punto $p \in F$, applichiamo $\underline{g}$ solo a tutte le possibili coppie di vettori di $\bar{E}$ che sono anche vettori di T_pF.

Naturalmente, su F si potrebbero definire altre metriche non provenienti da metriche su E.

1.9.1. DEFINIZIONE

Dicesi METRICA INDOTTA su F il campo tensoriale

$$\underline{g} : F \to T_2F$$

dato da

$$\overset{\circ}{\underline{g}}(p)(\bar{u},\bar{v}) \equiv \underline{g}(p)(\bar{u},\bar{v}) \qquad , \forall\ p \in F \quad , \bar{u},\bar{v} \in T_pF \quad \subset \quad \bar{E} \quad ,$$

ovvero la funzione

$$\overset{\circ}{g} : TF \to \mathbb{R}$$

data da

$$\overset{\circ}{g}(p,\bar{u}) \equiv g(p,\bar{u}) \qquad , \quad \forall\ p \in F,\ \bar{u} \in T_pF \quad \subset \bar{E}$$

(dove $g : TE \to \mathbb{R}$ è la funzione metrica su TE data da

$$g(p,\bar{u}) \equiv \frac{1}{2}\, \bar{u} \cdot \bar{u} \qquad , \qquad \forall (p,\bar{u}) \in TE) \quad .$$

1.9.2. E' quindi immediata l'espressione in coordinate di tali applicazioni.

PROPOSIZIONE Sia $x \equiv (x^1,\ldots,x^n) : U \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate su un aperto U di p, adattato ad F.

Allora, è

$$\underline{\mathring{g}} = \mathring{g}_{ij}\, d\mathring{x}^i \otimes d\,\mathring{x}^j \ ,$$

$$\mathring{g} = \frac{1}{2}\, \check{\mathring{g}}_{ij}\, \dot{\mathring{x}}^i\, \dot{\mathring{x}}^j \qquad , \text{ con } \ 1 \leq i,j \leq m \quad .$$

1.9.3. PROPOSIZIONE

La metrica indotta determina in modo naturale un isomorfismo

$$\underset{\sim}{\mathring{g}} : \nu\, TTF \to o T^* TF \quad .$$