7 SPAZI TENSORIALI

0 Questo paragrafo può essere letto in un secondo momento in quanto è una generalizzazione dei paragrafi 1.3. e 1.6. di questo capitolo.

Sia, una sottovarietà, di dimensione m, di uno spazio affine E di dimensione n.

1.7.1. DEFINIZIONE

Dicesi SPAZIO DEI TENSORI di grado (r,s) di F l'insieme

$$T^r_s F \equiv \bigcup_{p\in F} \left(\otimes^r T_p F \otimes^s T^*_p F \right)$$

Dicesi SPAZIO DEI TENSORI ESTERNI di grado (r,s) di F l'insieme

$$\Lambda^r_s F \equiv \bigcup_{p\in F} \left(\Lambda^r T_p F \otimes \Lambda^s T_p^* F \right)$$

Si vede facilmente che $T^r F$ e $\Lambda^r F$ sono sottovarietà di $T^r E$ e $\Lambda^r E$.

Inoltre, se è data una metrica $\underline{g}$ su E, possiamo identificare $T_s F$ e $\Lambda_s F$ con sottovarietà di $T_S E$ e $\Lambda_s E$.

Le considerazioni sui sistemi di coordinate fatte per TF e $T^* F$ si estendono facilmente a $T^r_s F$ e $\Lambda^r_s F$.

1.7.2. DEFINIZIONE

Dicesi CAMPO TENSORIALE un'applicazione (di classe $\mathcal{C}^k$)

$$t : F \to T^r_s F$$

tale che

$$t(p) \in T^r_{sp} F \quad , \forall\, p \in F .$$

Dicesi CAMPO TENSORIALE ESTERNO un'applicazione(di classe $\mathcal{C}^k$)

$$t : F \to \Lambda^r_s F$$

tale che $\qquad t(p) \in \Lambda^r_{sp} F \quad , \quad \forall\, p \in F$.

Si noti che non si può parlare di campi tensoriali liberi, ma solo di campi tensoriali applicati, in quanto non esiste una fibra svincolata dal punto di applicazione $p \in F$.

1.7.3. PROPOSIZIONE Sia U un intorno aperto di $p \in F$ e sia $x \equiv (x^1,\dots,x^n) : U \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate di E, adattato ad F.

E' $\qquad \partial\breve{x}_i : \breve{U} \to T^1_o \breve{U} \quad , \quad d\breve{x}^i : \breve{U} \to T^o_1 \breve{U}$,

inoltre

$$\langle d\breve{x}^i , \partial\breve{x}_j \rangle = \delta^i_j \quad .$$

Allora, l'espressione locale di un campo tensoriale $t : F \to T^r_s F$ è data da

$$t_{/\breve{U}} = t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}\, \partial\breve{x}_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial\breve{x}_{i_r} \otimes d\breve{x}^{j_1} \otimes \dots \otimes d\breve{x}^{j_s} \; ,$$

dove è

$$t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = t_{/\breve{U}}(dx^{i_1},\dots,dx^{i_r}; \partial\breve{x}_{j_1},\dots,\partial\breve{x}_{j_s}) : U \to \mathbb{R}.$$

Una formula analoga vale per $t : F \to \Lambda^r_s F$. Ossia, è

$$t_{/\mathring{U}} = \sum_{\substack{1\leq i_1<\ldots<i_r\leq m \\ 1\leq j_1<\ldots<j_s\leq m}} t^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} \, \partial\mathring{x}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\partial\mathring{x}_{i_r} \otimes d\mathring{x}^{j_1}\wedge\cdots\wedge d\mathring{x}^{j_s} ,$$

dove

$$t^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} = t_{/\mathring{U}}(d\mathring{x}^{i_1},\ldots,d\mathring{x}^{i_r};\partial\mathring{x}_{j_1},\ldots,\partial\mathring{x}_{j_s}) : \mathring{U} \to \mathbb{R} .$$

Indichiamo con $\mathcal{T}^r_s F$ e $\Omega^r_s F$ gli spazi vettoriali dei campi tensoriali e dei campi tensoriali esterni di F, rispettivamente.

1.7.4. Dunque, un'equazione differenziale del 1° ordine su F è un qualsiasi campo vettoriale

$$\mathring{\bar{X}} : F \to TF .$$

La sua espressione in coordinate, è

$$\mathring{\bar{X}} = \sum_{i=1}^{m} \dot{X}^i \partial\mathring{x}_i = \sum_{i=1}^{m} \dot{\mathring{x}}^i \partial\mathring{x}_i .$$