SOTTOVARIETA' DIFFERENZIABILI

0 Sia E uno spazio affine di dimensione n.

Cominciamo questo capitolo con l'importante nozione di "sottovarietà differenziabile" di dimensione $o \leq m \leq n$.

Sostanzialmente, una sottovarietà F è un sottoinsieme di E, caratterizzato localmente dal fatto che certe funzioni coordinate di E sono costanti.

Diamo, poi, degli esempi notevoli di sottovarietà differenziabili, come i piani, le sfere, i cilindri, ecc... .

Concludiamo questo paragrafo con le nozioni di funzioni e curve coordinate sulle sottovarietà.

1.2.1. DEFINIZIONE

Dicesi SOTTOVARIETA' DIFFERENZIABILE (di classe $\mathcal{C}^k$) di E un sottoinsieme $F \hookrightarrow E$, tale che, per ogni $p \in F$ esiste

1) un intorno aperto U di p in E,

2) un sistema di coordinate differenziabile (di classe $\mathcal{C}^k$) su U

$$x \equiv (x^1,..,x^n) : U \to V \subset \mathbb{R}^n \quad ,$$

3) un intero m,

4) ed una $(n-m)$-pla $a \equiv (a^{m+1},...,a^n) \in \mathbb{R}^{n-m}$ per cui è

$$q \in U \cap F \Longleftrightarrow x^{m+1}(q) = a^{m+1}, \ldots, x^n(q) = a^n$$

Un tale sistema di coordinate si dice ADATTATO ad F.

Posto $\overset{\circ}{U} \equiv U \cap F$, l'applicazione biiettiva

$$\overset{\circ}{x} \equiv (\overset{\circ}{x}^1, \ldots, \overset{\circ}{x}^m) \equiv (x^1_{/\overset{\circ}{U}}, \ldots, x^m_{/\overset{\circ}{U}}) : \overset{\circ}{U} \to \overset{\circ}{V}$$

dove $\overset{\circ}{V} \equiv \overset{\circ}{x}(\overset{\circ}{U})$, si dice un SISTEMA DI COORDINATE O CARTA di F.

A volte indicheremo una carta di F con $(\overset{\circ}{U}, \overset{\circ}{x})$ al posto di $\overset{\circ}{x}$.

1.2.2. DEFINIZIONE Sia F un sottoinsieme di E.

Dicesi INCLUSIONE CANONICA l'applicazione

$$j : F \to E$$

data da $$j : p \mapsto p$$.

Sostanzialmente, ciò vuol dire che ogni punto di F è anche punto di E.

In seguito, indicheremo l'inclusione canonica con il simbolo $\hookrightarrow$ al posto di $\to$.

1.2.3. PROPOSIZIONE Sia m l'intero della definizione 1.2.1. .

1) Se $m = n$, allora F è un aperto di E.

2) Se $m = o$, allora F è unione di punti isolati di E.

D. 1). Se $m = n$, le condizioni su F si riducono ad affermare che ogni $p \in F$ è contenuto in un intorno (aperto) di E.

2). Se $m = o$, l'ultima condizione di 1.2.1. affermare che se $p \in F$ esiste un intorno U di p in F tale che $U \cap F = \{ p \}$.

1.2.4. Diamo ora le nozioni di funzioni e curve coordinate di una sottovarietà, mediante un sistema di coordinate adattato ad F.

DEFINIZIONE Sia $x \equiv (x^1,\dots,x^n) : U \to \mathbb{R}^n$ un sistema di coordinate adattato ad F.

Si dicono FUNZIONI COORDINATE di F le m funzioni

$$\overset{\circ}{x}{}^1 \equiv x^1_{/\overset{\circ}{U}} : \overset{\circ}{U} \to \mathbb{R} \quad , \ . \ . \ . \ . \ , \quad \overset{\circ}{x}{}^m \equiv x^m_{/\overset{\circ}{U}} : \overset{\circ}{U} \to \mathbb{R} \quad .$$

Si dicono CURVE COORDINATE di F le m applicazioni

$$\overset{\circ}{x}_1 \equiv x_{1/\mathbb{R}\times\overset{\circ}{U}} : \mathbb{R} \times \overset{\circ}{U} \to \overset{\circ}{U}, \ . \ . \ . \ . \ , \ \overset{\circ}{x}_m \equiv x_{m/\mathbb{R}\times\overset{\circ}{U}} : \mathbb{R}\times\overset{\circ}{U} \to \overset{\circ}{U} \qquad \dot{-}$$

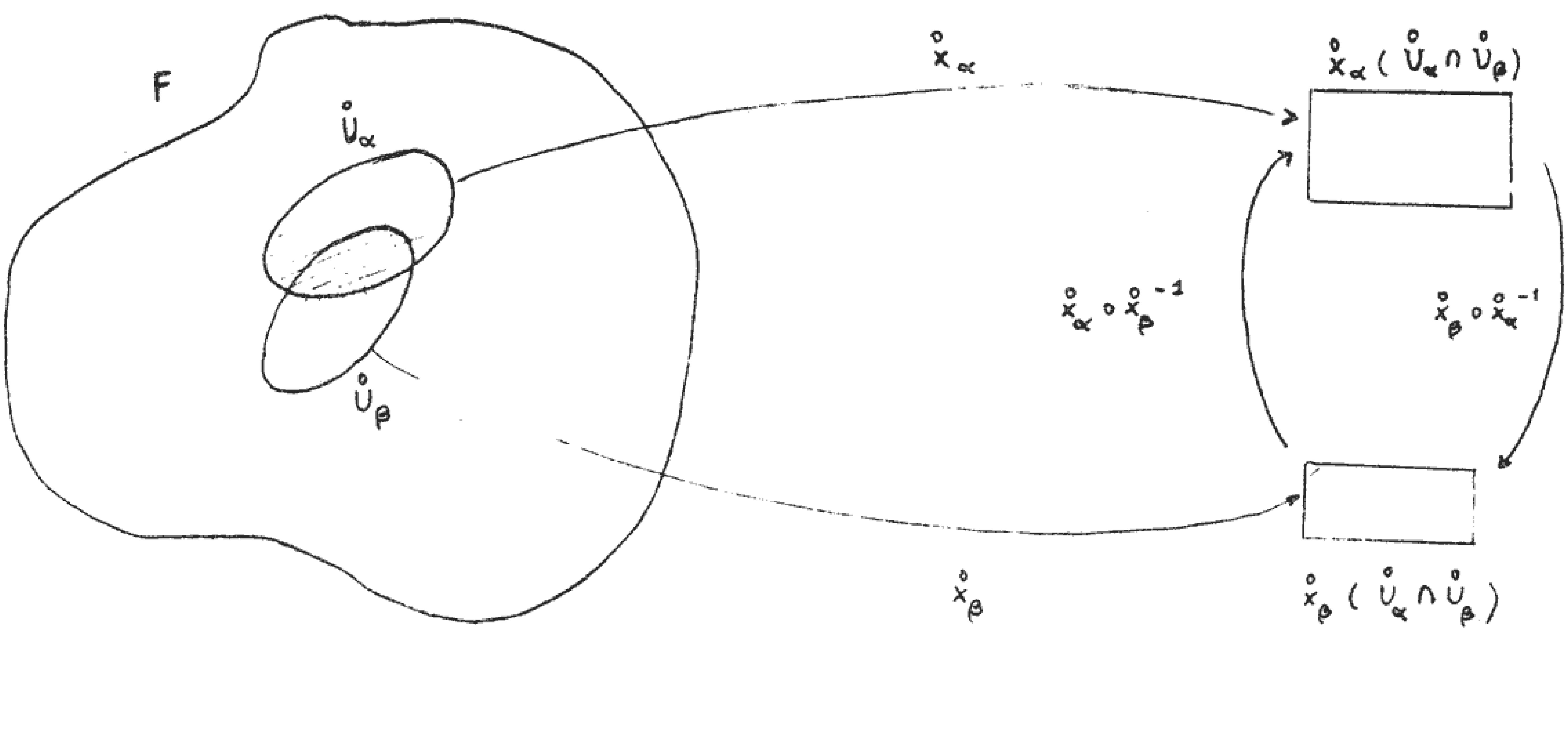
1.2.5. PROPOSIZIONE Siano $(\overset{\circ}{U}_\alpha , \overset{\circ}{x}_\alpha)$ e $(\overset{\circ}{U}_\beta, \overset{\circ}{x}_\beta)$ due carte di F tali che $\overset{\circ}{U}_\alpha \cap \overset{\circ}{U}_\beta \neq \phi$.

Allora, le seguenti applicazioni di $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^m$

$$\overset{\circ}{x}_\beta \circ \overset{\circ}{x}{}^{-1}_\alpha : \overset{\circ}{x}_\alpha(\overset{\circ}{U}_\alpha \cap \overset{\circ}{U}_\beta) \to x_\beta(\overset{\circ}{U}_\alpha \cap \overset{\circ}{U}_\beta)$$

$$\overset{\circ}{x}_\alpha \circ \overset{\circ}{x}{}^{-1}_\beta : \overset{\circ}{x}_\alpha(\overset{\circ}{U}_\alpha \cap \overset{\circ}{U}_\beta) \to \overset{\circ}{x}_\alpha(\overset{\circ}{U}_\alpha \cap \overset{\circ}{U}_\beta)$$

sono applicazioni biiettive differenziabili (di classe $\mathcal{C}^k$) .



D. I seguenti diagrammi (dove, per semplicità, abbiamo fatto varie omissioni di simboli ed abusi di linguaggio) sono commutativi

$$\begin{tikzcd}
\mathring{x}_\alpha(\mathring{U}_\alpha \cap \mathring{U}_\beta) \subset \mathbb{R}^m \arrow[r] \arrow[dr, "\mathring{x}_\alpha^{-1}"'] & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{(n-m)} \arrow[r, "x_\alpha^{-1}"] & E \arrow[d, "x_\beta"] \\
& F \arrow[dr, "\mathring{x}_\beta"'] & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{(n-m)} \arrow[d] \\
& & \mathring{x}_\beta(\mathring{U}_\alpha \cap \mathring{U}_\beta) \subset \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathring{x}_\beta(\mathring{U}_\alpha \cap \mathring{U}_\beta) \subset \mathbb{R}^m \arrow[r] \arrow[dr, "\mathring{x}_\beta^{-1}"'] & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{(n-m)} \arrow[r, "x_\beta^{-1}"] & E \arrow[d, "x_\alpha"] \\
& F \arrow[dr, "\mathring{x}_\alpha"'] & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{(n-m)} \arrow[d] \\
& & \mathring{x}_\alpha(\mathring{U}_\alpha \cap \mathring{U}_\beta) \subset \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

Inoltre, in ciascun diagramma i due "cateti" sono applicazioni biiettive differenziabili (di classe $\mathcal{C}^k$). Allora, il risultato segue dalla regola della catena .

Le applicazioni $\mathring{x}_\beta \circ \mathring{x}_\alpha^{-1}$ e $\mathring{x}_\alpha \circ \mathring{x}_\beta^{-1}$, che sono l'una inversa dell'altra si dicono i CAMBIAMENTI DI CARTA.

Si osservi che, per semplicità di notazioni, abbiamo scritto $\mathring{x}_\beta \circ \mathring{x}_\alpha^{-1}$ e $\mathring{x}_\alpha \circ \mathring{x}_\beta^{-1}$ al posto delle rispettive restrizioni.

Si osservi anche che le applicazioni $\mathring{x}_\alpha$, $\mathring{x}_\beta$, $\mathring{x}_\alpha^{-1}$, $\mathring{x}_\beta^{-1}$ risulteranno differenziabili, ma ancora non è stata introdotta la differenziabilità sulle sottovarietà.

Dunque, esiste un ricoprimento $\{\mathring{U}_\alpha\}$ di F, costituito da aperti (nella topologia indotta) ed una famiglia di carte $\overset{\circ}{x}_\alpha : \overset{\circ}{U}_\alpha \to \mathbb{R}^m$.

La famiglia $\{\overset{\circ}{U}_\alpha, \overset{\circ}{x}_\alpha\}$ è detta un ATLANTE di F.

1.2.6. Diamo ora alcuni esempi di sottovarietà.

1) SFERA. Sia E uno spazio affine euclideo di dimensione 3. Sia $o \in E$. Sia $R \in \mathbb{R}^+$.

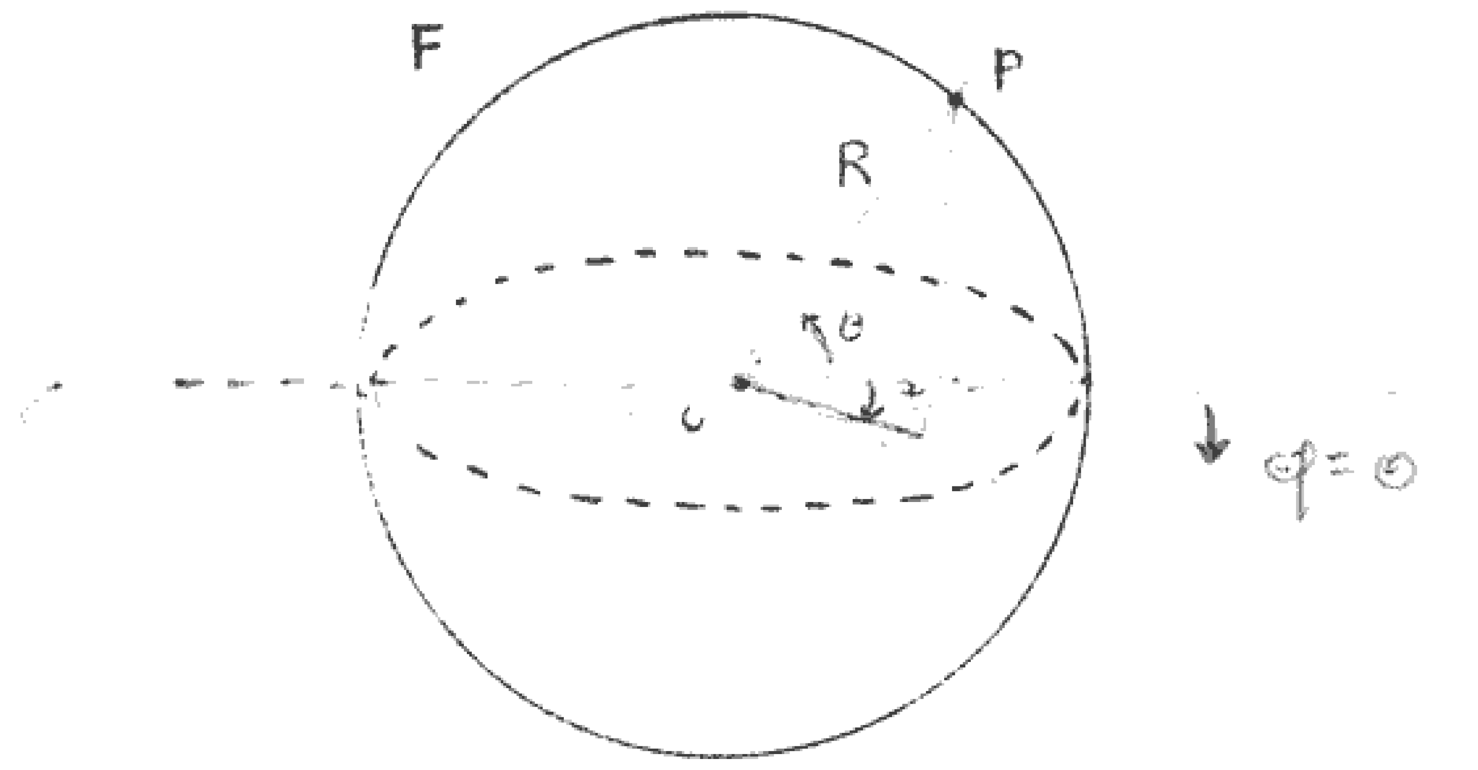
Consideriamo il sottoinsieme F di E costituito da una sfera di raggio R e centro o, ossia

$$F \equiv \{p \in E \ / \ ||p-o|| = R\} \ .$$

Facciamo vedere che F è una sottovarietà di E. Consideriamo un punto $p \in F$ e dimostriamo l'esistenza di un sistema adattato.

Sia (r,θ,φ) un sistema di coordinate sferico su E, tale che il semipiano $\varphi = o$ non contenga p. Come intorno di $p \in F$, consideriamo tutto lo spazio escluso il semipiano $\varphi = o$. Tutti e soli i punti che stanno sulla superficie sferica (tranne quelli della semicirconferenza del semipiano $\varphi = o$) sono caratterizzati da $r = R$.

Allora, il sistema di coordinate indotto da (r,θ,φ) è (θ,φ) ristretto alla superficie della sfera.



2) CILINDRO. Sia E uno spazio affine euclideo di dimensione 3. Sia $o \in E$ e $\bar{u} \in \bar{E}$ un versore. Sia $R \in \mathbb{R}^+$.

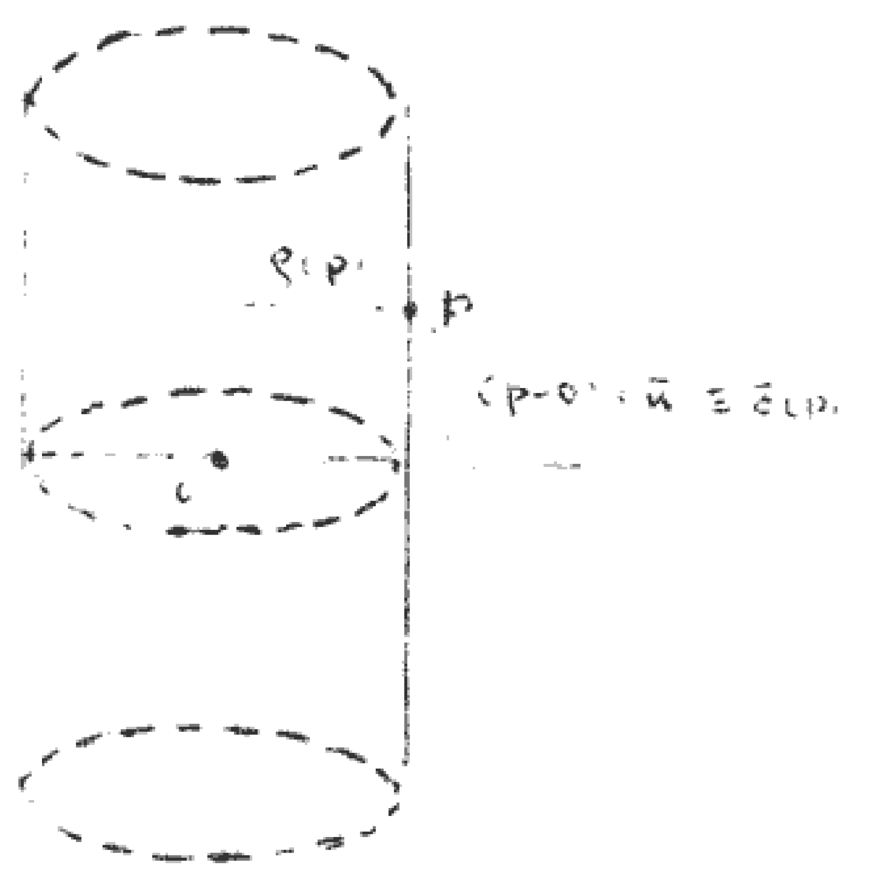
Consideriamo il sottoinsieme F di E

$$F \equiv \{p \in E \;/\; \rho^2(p) = R^2\}$$

dove $\rho^2(p) = (p-o)^2 - [\,(p-o) \cdot \bar{u}\,]^2$.

Facciamo vedere che F è una sottovarietà di E. Consideriamo un punto $p \in F$ e dimostriamo l'esistenza di un sistema adattato.

Sia (ρ, φ, z) un sistema di coordinate sferico su E, tale che il semipiano $\varphi = o$ non contenga p. Come intorno di $p \in F$, consideriamo tutto lo spazio escluso il semipiano $\varphi = o$. Tutti e soli i punti che stanno sulla superficie cilindrica (tranne quelli della semiretta appartenente al semipiano $\varphi = o$) sono caratterizzati da $\rho = R$.



Allora, il sistema di coordinate indotto da (ρ, φ, z) è (φ, z) ristretto alla superficie cilindrica.

3) CONO(SENZA VERTICE). Sia E uno spazio affine euclideo di dimensione 3.

Sia $o \in E$. Sia $\bar{u}$ un versore di $\bar{E}$. Sia $o < \alpha < \pi$. Si consideri l'applicazione

$$\theta : E - o \to \mathbb{R}$$

data da

$$\theta : p \mapsto \arccos \frac{(p-o) \cdot \bar{u}}{\|p-o\|} .$$

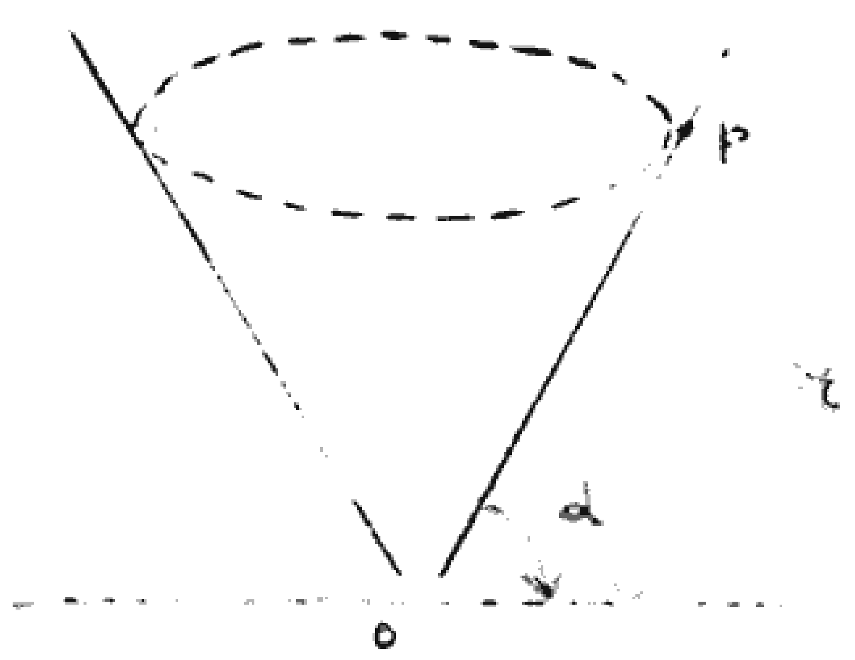
Consideriamo il sottoinsieme F di E

$$F \equiv \{p \in E \;/\; p \neq o \quad , \theta(p) = \alpha\} .$$

Facciamo vedere che F è una sottovarietà di E. Consideriamo un punto $p \in F$ e dimostriamo l'esistenza di un sistema adattato.

Sia (r,θ,φ) un sistema di coordinate sferico su E, tale che il semipiano $\varphi = o$ non contenga p. Come intorno di $p \in F$ consideriamo tutto lo spazio escluso il semipiano $\varphi = o$. Tutti e soli i punti che stanno sulla superficie del cono (tranne quelli della semiretta appartenente al semipiano $\varphi = o$) sono caratterizzati da $\theta = \alpha$.

Allora, il sistema di coordinate indotto da $(r\,\theta,\varphi)$ è (r,φ) ristretto alla superficie del cono.



Si può dimostrare che $F' \equiv U \cup \{o\}$ (ossia il cono con il vertice) non è una sottovarietà di E.

1.2.7. La seguente proposizione permette di vedere ogni sottospazio affine, come una sottovarietà.

PROPOSIZIONE. Sia $F \subset E$ un sottospazio affine (di dimensione $o \leq m \leq n$) di E.

Allora, F è una sottovarietà.

D. Sia $\bar{F} \subset \bar{E}$ e sia $\{\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_m\} \subset \bar{F}$ una base di $\bar{F}$ e sia $o \in F$.

Sappiamo (0.1.12.) che ogni base di $\bar{F}$ può essere completata in modo da ottenere una base di $\bar{E}$

$$B \equiv \{\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_m,\bar{v}_{m+1},\ldots,\bar{v}_n\} \subset \bar{E} .$$

Allora, considerato il sistema di coordinate cartesiano su E, generato da $o \in F$ e dalla base B, dato da

$$x^i(p) \equiv (p-o)^i$$

i punti di F sono tutti e soli i punti tali che

$$x^{m+1}(p) = \ldots = x^n(p) = o$$

(le $a^{m+1},\ldots, a^n$ sono tutte nulle e quindi costanti) .

Dunque, un sistema di coordinate adattato ad F, indotto dal sistema di coordinate su E, è quello generato da $o \in F$ e dalla base $\{\bar{v}_1,\ldots,\bar{v}_m\} \subset \bar{F}$.

Dunque, se $\dim E=3$, i piani e le rette di E sono sue sottovarietà.