0 INTRODUZIONE

Una nozione basilare della Geometria differenziale degli spazi affini è quella di "differenziabilità" e di "derivata".

Dati due spazi affini E ed F, un'applicazione

$$f : E \to F$$

è differenziabile se opera linearmente sui vettori applicati, "almeno in prima approssimazione". L'applicazione che effettua tale approssimazione è detta la "derivata" di f e si indica con Df.

In questo capitolo, dopo aver dato tale nozione, consideriamo i casi più interessanti ritrovando, in particolare, la derivata classica definita in $\mathbb{R}^n$.

Allora, un sistema di coordinate cartesiano genera, in modo naturale, delle basi per i campi vettoriali e covettoriali costanti punto per punto.

Usando i sistemi di coordinate non cartesiani la nozione di derivata si rivela insufficiente. Pertanto, si rende necessario l'introduzione della "applicazione tangente" che tenga conto del punto di applicazione della derivata.

Notiamo che l'applicazione derivata non si estende alle varietà differenziabili, mentre continua a valere quella di applicazione tangente.

Le regole di derivazione consistono in pochi teoremi che forniscono le principali regole di calcolo delle derivate.

Per semplicità, consideriamo solo applicazioni del tipo $f : E \to F$, ma i risultati ottenuti si estendono immediatamente anche nel caso in cui le applicazioni siano definite solo su un aperto degli spazi affi ni considerati.

Si ricorda che ci interessiamo solo a spazi affini di dimensione finita.

1 APPLICAZIONI DIFFERENZIABILI

0 Siano E ed F due spazi affini. Sia $f : E \to F$ un'applicazione.

Cominciamo ad introdurre l'importante nozione di "differenziabilità" di f in un punto $p \in E$ e, più in generale, di "applicazione differenziabile".

Sostanzialmente, f è differenziabile se opera linearmente sui vettori applicati, "almeno in prima approssimazione". L'applicazione che effettua tale approssimazione è detta "derivata" di f ed è indicata con Df.

Osserviamo che Df non si estende alle varietà differenziabili. dove non esistono i vettori liberi.
Allora, è naturale introdurre la "applicazione tangente", Tf, di f legata a Df mediante la regola

$$Tf = (f, Df) \quad .$$

$T f$ invece, ha validità sulle varietà differenziabili.

Inoltre, essa è importante poiché permetterà di definire dei sistemi di coordinate sui vari spazi tangenti di E, mediante un sistema di coordinate "differenziabile" definito su E.

2.1.1. DEFINIZIONE Sia $f : E \to F$ un'applicazione. Sia $p \in E$.

Si dice che f è DIFFERENZIABILE in p se esiste un'applicazione lineare

$$Df(p) \in L(\bar{E}, \bar{F}) \approx \bar{E}^* \otimes \bar{F}$$

tale che

$$\lim_{\bar{h} \to \bar{o}} \frac{f(p+\bar{h}) - f(p) - Df(p)(\bar{h})}{||\bar{h}||} = o \quad ,$$

o, equivalentemente, tale che l'espressione di f sia

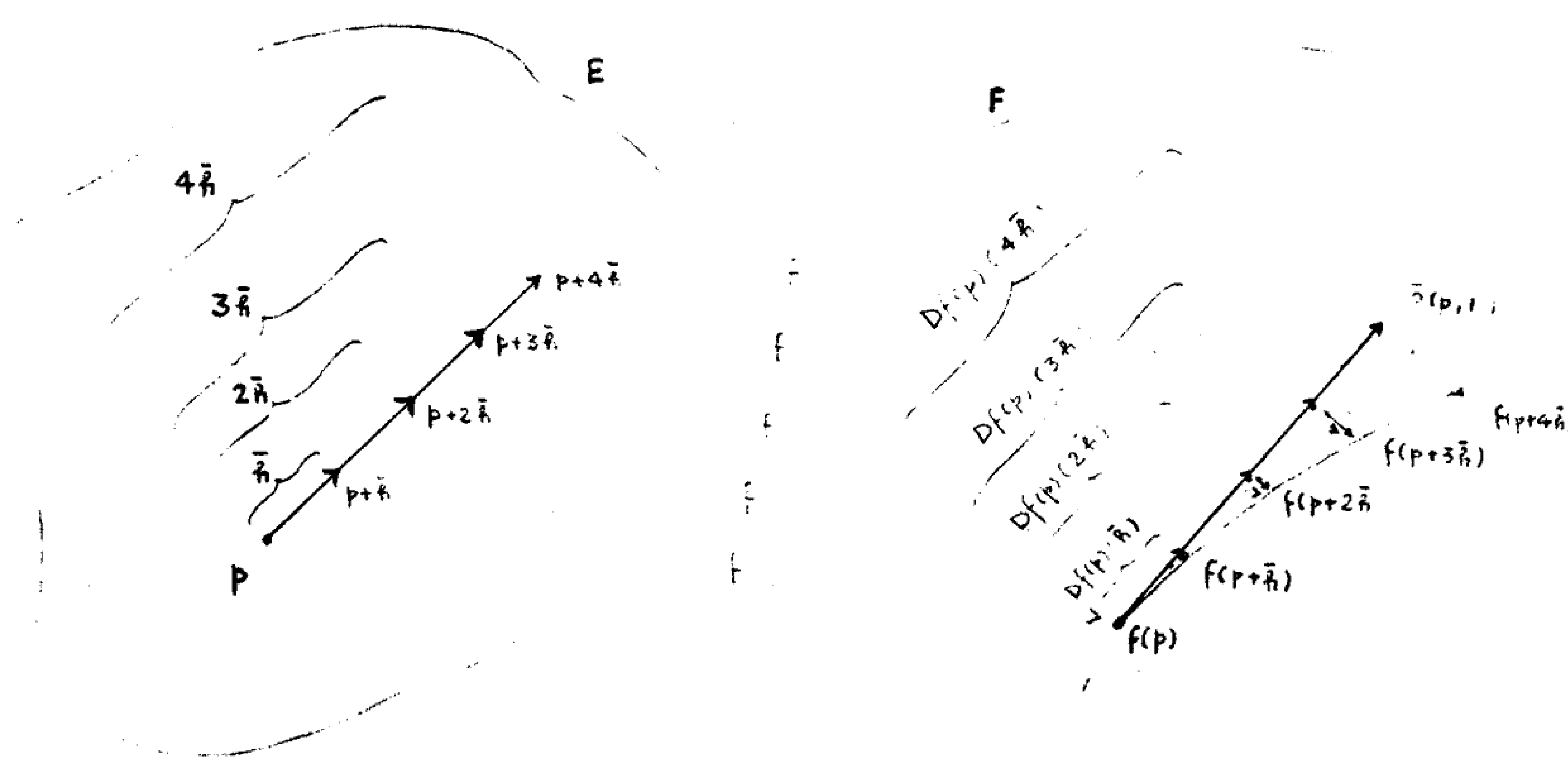
$$f(p+\bar{h}) = f(p) + Df(p)(\bar{h}) + \bar{o}(p,\bar{h}) \qquad , \qquad \forall\ \bar{h} \in \bar{E} \ ,$$

dove $\bar{o}(p,\bar{h})$ è un infinitesimo di ordine superiore ad $\bar{h}$, cioè tale che

$$\lim_{\bar{h}\to\bar{o}} \frac{\bar{o}(p,\bar{h})}{||\bar{h}||} = o \qquad .$$

Praticamente, la dipendenza di f, a partire da p, è "quasi lineare" rispetto ad $\bar{h}$, ossia l'errore che si commette rispetto alla linearità è un errore infinitesimo di ordine superiore rispetto ad $\bar{h}$ (quindi è trascurabile per $\bar{h} \to \bar{o}$) .

Graficamente, possiamo basare le nostre intuizioni nel modo seguente.



Si osservi che abbiamo usato una qualsiasi norma, in virtù del teorema che dice che tutte le norme sono "equivalenti". Si veda [4] (teoma 1.3. pag. 5) .

2.1.2. Facciamo, vedere, ora, che l'applicazione lineare $Df(p)$, se esiste, è unica.

PROPOSIZIONE Sia $p \in E$.

L'applicazione lineare $Df(p)$ è unica.

D. Siano $\alpha, \beta : \bar{E} \to \bar{F}$ due applicazioni lineari tali che

$$\lim_{\bar{h}\to\bar{o}} \frac{f(p+\bar{h}) - f(p) - \alpha(\bar{h})}{||\bar{h}||} = o = \lim_{\bar{h}\to\bar{o}} \frac{f(p+\bar{h}) - f(p) - \beta(\bar{h})}{||\bar{h}||} .$$

Sia dato $\bar{o} \neq \bar{k} \in \bar{E}$ e sia $o \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Allora, per la linearità di α e β, si ha:

$$o = \lim_{\lambda\to o} \frac{\alpha(\lambda\bar{k}) - \beta(\lambda\bar{k})}{||\lambda\bar{k}||} = \lim_{\lambda\to o} \frac{\lambda}{|\lambda|} \frac{\alpha(\bar{k}) - \beta(\bar{k})}{||\bar{k}||} = \frac{\lambda}{|\lambda|} \lim_{\lambda\to o} \frac{\alpha(\bar{k}) - \beta(\bar{k})}{||\bar{k}||}$$

da cui $\alpha(\bar{k}) - \beta(\bar{k}) = o$ (non variando $\bar{k}$ con λ) .

Inoltre, è $\alpha(\bar{o}) = \bar{o} = \beta(\bar{o})$, sicché risulta

$$\alpha(\bar{h}) = \beta(\bar{h}) \qquad , \quad \forall\, \bar{h} \in \bar{E} \qquad \underline{.}$$

L'applicazione lineare $Df(p)$ (che è unica) è detta la DERIVATA di f in p.

2.1.3. DEFINIZIONE

Si dice che f è DIFFERENZIABILE se è differenziabile in ogni punto di E.

Allora, dicesi DERIVATA di f l'applicazione

$$Df : E \to \bar{E}^* \otimes \bar{F}$$

data da

$$Df : p \mapsto Df(p) \qquad \underline{.}$$

2.1.4. Introduciamo adesso l'importante nozione di "applicazione tangente" di f.

DEFINIZIONE Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile.

Dicesi APPLICAZIONE TANGENTE di f l'applicazione

$$Tf : TE \to TF$$

data da $$Tf : (p,\bar{u}) \mapsto (f(p), Df(p)(\bar{u}))$$

Dunque, dare l'applicazione tangente di f equivale a dare, in ogni punto p di E, la derivata $Df(p)$.

Si osservi che Df non si estende alle varietà differenziabili, mentre continua a valere l'applicazione tangente Tf.

2 CASI PARTICOLARI DI DERIVATA

0 Sia E uno spazio affine di dimensione finita.

In questo paragrafo, studiamo i casi più importanti di differenziabilità.

Per esempio, nel caso $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ritroviamo la derivata di f dell'analisi classica.

Interessanti sono, anche, i casi $f : \mathbb{R} \to E$ ed $f : E \to \mathbb{R}$ che sono l'uno il duale dell'altro.

2.2.1. CASO $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sia f una funzione differenziabile. Allora, tramite l'isomorfismo canonico $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$, si identifica la derivata di f in $x \in \mathbb{R}$ con l'unico numero

$$Df(x)(1) \in \mathbb{R}$$

e si scrive

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + o(x,h) \qquad \forall\, h \in \mathbb{R} .$$

Infatti, ricordando che $Df(x)$ è un'applicazione lineare, abbiamo che

$$Df(x)(h) \equiv Df(x)(1\cdot h) = h\cdot Df(x)(1)$$

e quindi possiamo riguardare $Df(x)(h)$ come prodotto di numeri reali.

Pertanto

$$Df : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

è una funzione.

Inoltre, ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $x \in \mathbb{R}$ se e solo se esiste il limite seguente

$$\lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ed in tal caso $Df(x)$ è il limite precedente.

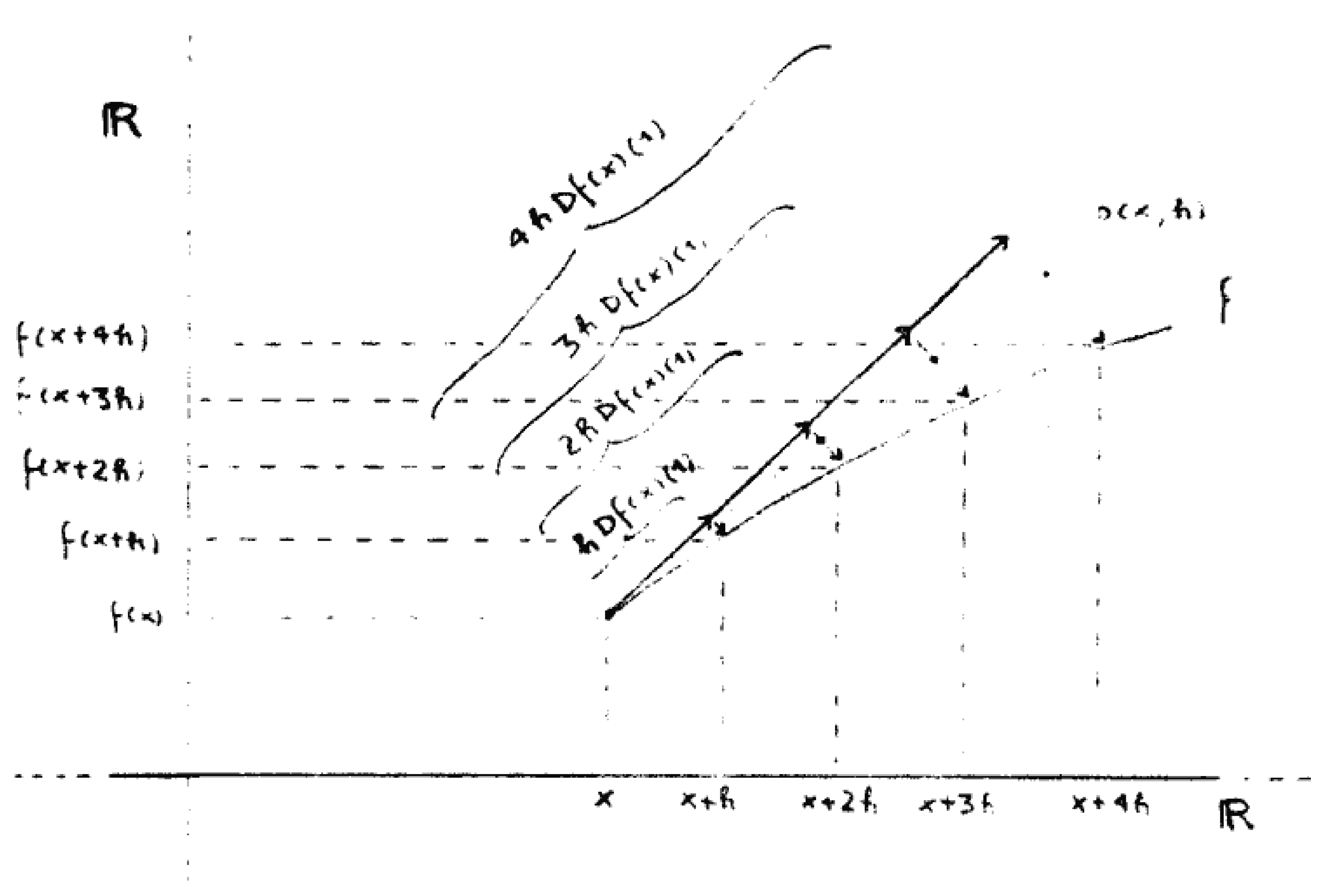
Ha senso considerare tale limite, in quanto h è un numero e quindi ha senso dividere per h. Ciò non vale quando lo spazio di partenza ha dimensione maggiore di 1.

L'applicazione tangente è

$$Tf : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

data da $$Tf : (x,h) \mapsto (f(x), Df(x)\cdot h) \quad .$$

In questo caso possiamo fare riferimento al seguente grafico.



2.2.2. CASO $f : \mathbb{R} \to E$.

Sia f una curva differenziabile. Allora, grazie all'isomorfismo canonico $L(\mathbb{R},\bar{E}) \approx \bar{E}$, si identifica la derivata di f in $x \in R$ con un vettore

$$Df(x)(1) \in \bar{E}$$

e si scrive

$$(*) \quad f(x+h) = f(x) + Df(x)\, h + o(x,h) \quad , \quad \forall\, h \in \mathbb{R} \quad .$$

Pertanto, è

$$Df : \mathbb{R} \to \bar{E} \quad .$$

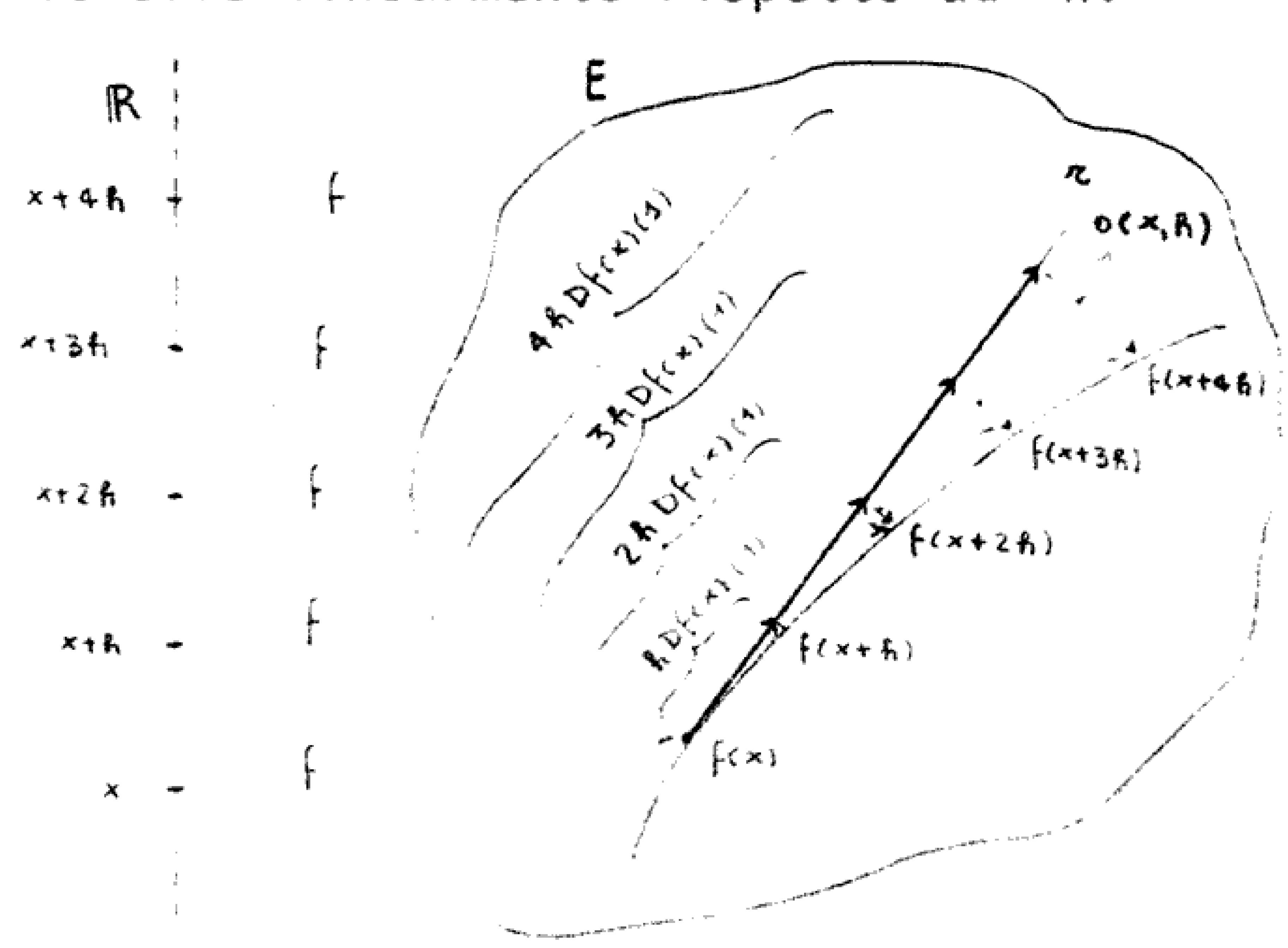
Facciamo ora alcune osservazioni sulla curva $(*)$.

Se in $(*)$, l'infinitesimo $o(x,h)$ fosse rigorosamente nullo, allora la curva

$$f(x+h) = f(x) + hDf(x)$$

sarebbe una retta parametrizzata mediante h.

Infatti, per $h = o$, è $f(x) = f(x)$, invece per $h \neq o$, $f(x+h)$ varierebbe linearmente rispetto ad h.



Le freccette rappresentano l'errore fra la linearità, rispetto ad h, della curva approssimata (rappresentata dalla retta r) e il vero valore della curva.

Si vede che f è differenziabile quando tale errore è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad h, cioé $o(x,h)$ tende più rapidamente a zero di h stesso.

Ogni curva $f : \mathbb{R} \to E$ è differenziabile in x se e solo se esiste il limite seguente

$$\lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ed in tal caso è

$$Df(x) = \lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} .$$

Il vettore $Df(x)$ è detto "vettore tangente" alla curva in x.

Se è

$$Df(x) \neq \bar{o} \qquad , \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

allora, la curva dicesi "regolare". In tal caso dicesi "retta tangente" ad f in x la retta (ossia il sottospazio affine, di dimensione 1) di E, determinata dal punto $f(x) \in E$ e dal vettore $Df(x) \in \bar{E}$.

Abbiamo, inoltre, l'applicazione tangente

$$Tf : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to TE$$

data da $$Tf : (x,h) \mapsto (f(x), hDf(x)) \quad .$$

Dunque, possiamo definire anche l'applicazione

$$df : \mathbb{R} \to TE$$

data da $$df(x) \equiv Tf(x,1) \qquad ,$$

detta "derivata applicata" di f, o anche "differenziale" di f.

2.2.3. CASO $f : E \to \mathbb{R}$.

Sia f una funzione differenziabile. Allora è

$$Df(p) \in L(\bar{E}, \mathbb{R}) \equiv \bar{E}^* \quad , \forall p \in E \quad ,$$

e si scrive anche

$$(**) \qquad f(p+\bar{h}) = f(p) + \langle Df(p), \bar{h} \rangle + \bar{o}(p,\bar{h}) \quad , \quad \forall \bar{h} \in \bar{E} .$$

Se in $(**)$, fosse $\bar{o}(p,\bar{h}) = \bar{o}$, allora

$$(***) \qquad f(p+\bar{h}) = f(p) + \langle Df(p) , \bar{h} \rangle$$

avrebbe un andamento interessante.

Distinguiamo, allora, due casi.

1) $Df(p) = \underline{o}$.

In tal caso è

$$f(p+\bar{h}) = f(p) \Longrightarrow f = \text{cost.}$$

2) $Df(p) \neq \underline{o}$.

In tal caso, per cercare le superfici su cui la funzione, data da $(***)$, assuma uno stesso valore, dobbiamo determinare i punti $q \in E$ tali che $f(q) = f(p)$.

Ossia, occorre determinare tutti i vettori $\bar{h}$ per cui è

$f(p+\bar{h}) = f(p)$.

Allora,essi sono tutti e soli i vettori $\bar{h}$ per cui è

$$<Df(p) , \bar{h}> = o$$

Questi vettori individuano lo spazio vettoriale (di dimensione dim E - 1) ortogonale alla forma $Df(p)$. Dunque, la superficie, costituita dai punti $q \in E$ tali che f è costantemente uguale a $f(p)$, è il piano ortogonale a $Df(p)$ e passante per p.

Nel caso generale, in cui $\bar{o}(p,\bar{h}) \neq \bar{o}$, se $Df(p) \neq \underline{o}$, si può dimostrare (parte II 1.1.) che le superfici per cui f è costante, sono delle superfici "liscie" approssimate al 1° ordine dei piani citati.

Vedremo, in seguito, che alla forma $Df(p)$ si può associare, tramite la metrica, un vettore di $\bar{E}$, duale di $Df(p)$, detto "gradiente" di f in p, indicata con il simbolo grad $f(p)$, dato da

$$<Df(p),\bar{u}> \equiv \text{grad } f(p) \cdot \bar{u} \quad , \quad \forall\, \bar{u} \in \bar{E} \, .$$

Abbiamo l'applicazione derivata

$$Df : E \to \bar{E}^*$$

data da

$$Df : p \to Df(p) \, .$$

Abbiamo, anche, l'applicazione

$$df : E \to T^*E$$

data da $$df : p \mapsto (p, Df(p)) \quad ,$$

detta "differenziale" di f.

Inoltre, possiamo definire l'applicazione tangente

$$Tf : TE \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

data da $$Tf : (p, \bar{u}) \mapsto (f(p), \langle Df(p), \bar{u} \rangle) \ ,$$

e quindi l'applicazione

$$\dot{f} \equiv \overset{2}{\pi} \circ Tf : TE \to \mathbb{R}$$

data da $$\dot{f}(p, \bar{u}) \equiv \langle Df(p), \bar{u} \rangle \quad , \forall (p, \bar{u}) \in TE.$$

2.2.4. CASO $t^{\ell} : E \to \otimes^r_s \bar{E}$.

Sia t^{ℓ} un campo tensoriale libero differenziabile. Allora, si identifica la derivata di t^{ℓ} in $p \in E$ con un tensore

$$Dt^{\ell}(p) \in \bar{E}^* \otimes \otimes^r_s \bar{E} \equiv \otimes^r_{s+1} \bar{E}$$

grazie all'isomorfismo canonico

$$L(\bar{E}, \otimes^r_s \bar{E}) \simeq \bar{E}^* \otimes \otimes^r_s \bar{E} \quad .$$

3 REGOLE DI DERIVAZIONE

0 Continuando il discorso sulla differenziabilità, in questo paragrafo, diamo alcuni strumenti atti ad operare con applicazioni differenziabili.

Particolarmente importante è la "regola della catena" che risolve il problema della differenziabilità di applicazioni composte.

Studiamo, poi, alcuni casi importanti.

Successivamente, soffermiamo le nostre attenzioni sulla derivata delle applicazioni identità, costanti, lineari, di cui faremo uso, largamente, in seguito.

Concludiamo che la derivata dell'applicazione somma è con l'importante "regola di Leibnitz".

Ovviamente, tutto ciò può essere espresso anche tramite le applicazioni tangenti.

Siano, dunque, E, F, G spazi affini.

2.3.1. TEOREMA (REGOLA DELLA CATENA)

Siano $f : E \to F$ e $g : F \to G$

due applicazioni differenziabili rispettivamente in $p \in E$ e in $f(p) \in F$.

Allora, l'applicazione

$$g \circ f : E \to G$$

è differenziabile in p.

Inoltre, è

$$D(g \circ f)(p) = Dg(f(p)) \circ Df(p).$$

D. Infatti, per la differenziabilità di f e g e per la linearità di $Dg(f(p))$, è

$$\begin{aligned}(g \circ f)(p+\bar{h}) &= g(f(p+\bar{h})) = g[\, f(p) + Df(p)(\bar{h}) + \bar{o}'(p+\bar{h})\,] = \\ &= g(f(p)) + Dg(f(p))[\, Df(p)(\bar{h}) + \bar{o}'(p,\bar{h})\,] + \\ &+ \bar{o}''(f(p)\ ,\ Df(p)(\bar{h}) + \bar{o}'(p,\bar{h})) = \\ &= g(f(p)) + [\, Dg(f(p)) \circ Df(p)\,](\bar{h}) + \bar{o}(p,\bar{h})\end{aligned}$$

dove si è posto

$$\bar{o}(p,\bar{h}) = Dg(f(p))(\bar{o}'(p,\bar{h})) + \bar{o}''(f(p),\ Df(p)(\bar{h}) + \bar{o}'(p,\bar{h}))\ ,$$

e dove

$$\lim_{\bar{h}\to\bar{o}} \frac{\bar{o}'(p,\bar{h})}{||\bar{h}||} = o = \lim_{\bar{k}\to\bar{o}} \frac{\bar{o}''(f(p)\ ,\ \bar{k})}{||\bar{k}||}$$

da cui

$$\lim_{\bar{h}\to\bar{o}} \frac{\bar{o}(p,\bar{h})}{||\bar{h}||} = \lim_{\bar{h}\to\bar{o}} \frac{Dg(f(p))(\bar{o}'(p,\bar{h}))}{||\bar{h}||} + \lim_{\bar{h}\to\bar{o}} \frac{\bar{o}''(f(p),\bar{k}(\bar{h}))}{||\,\bar{k}(\bar{h})||} = o + o = o \quad \dot{-}$$

avendo posto $\bar{k} \equiv \bar{k}(\bar{h}) \equiv Df(p)(\bar{h}) + o'(p,\bar{h})$ $\dot{-}$

Se f e g sono differenziabili, il teorema vale in ogni punto di E .

2.3.2. Per funzioni differenziabili, la regola della catena, in termini di applicazioni tangenti, assume una espressione semplice.

TEOREMA Siano $f : E \to F$ e $g : F \to G$ due applicazioni differenziabili.

Allora, l'applicazione

$$g \circ f : E \to G$$

è differenziabile e risulta

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf \quad .$$

D. Per la regola della catena, $g \circ f$ è differenziabile. Inoltre, per ogni $(p,\bar{u}) \in TE$, è

$$\begin{aligned} T(g \circ f)(p,\bar{u}) &= ((g \circ f)(p)\ ,\ D(g \circ f)(p)(\bar{u}))= \\ &= (g(f(p))\ ,\ (Dg(f(p))\circ Df(p))(\bar{u})) = \\ &= Tg(f(p),\ Df(p)(\bar{u})) = (Tg \circ Tf)(p,\bar{u}) \end{aligned}$$

2.3.3. Studiamo ora alcuni casi particolari di applicazioni differenziabili.

1) CASO $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$.

Siano f e g due funzioni differenziabili. Allora, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, è

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) \ .$$

D'altronde, per l'isomorfismo canonico $L(\mathbb{R},\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}$, si identificano

$$D(g \circ f)(x) \quad , Dg(f(x)) \quad , \quad Df(x)$$

con numeri reali e la composizione

$$Dg(f(x)) \circ Df(x)$$

con il prodotto dei due rispettivi numeri reali.

Allora scriviamo

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x)$$

ritrovando, così, la nozione dell'analisi classica.

2) CASO $\mathbb{R} \xrightarrow{c} E \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.

Siano c ed f due applicazioni differenziabili. Allora, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, è

$$D(f \circ c)(x) = \langle Df(c(x)) , Dc(x) \rangle .$$

Infatti, per l'isomorfismo canonico $L(\mathbb{R},\bar{E}) \approx \bar{E}$, è

$$(\underline{\alpha} \circ \beta)(h) = \underline{\alpha}(\beta(h)) = \underline{\alpha}(h \cdot \bar{\beta}) = h\, \underline{\alpha}\, (\bar{\beta}) \equiv h \langle \underline{\alpha}, \bar{\beta} \rangle , \forall\ h \in \mathbb{R},$$

dove abbiamo posto

$$\underline{\alpha} \equiv Df(c(x))$$
$$\beta \equiv Dc(x) \quad .$$

Questo secondo esempio è importante perché permetterà di esprimere le derivate mediante i sistemi di coordinate.

Le seguenti proposizioni mostrano che le applicazioni identità, costanti e lineari sono differenziabili.

2.3.4. PROPOSIZIONE

L'applicazione identità

$$id_E : E \to E$$

data da $$id_E : p \mapsto p$$

è differenziabile ed è

$$Did_E(p) = id_{\bar{E}} \qquad , \forall\, p \in E$$
$$T\, id_E = id_{TE} \qquad .$$

D. Infatti, è

$$id_E(p + \bar{h}) \equiv p + \bar{h} \equiv id_E(p) + id_{\bar{E}}(\bar{h}) \qquad .$$

Dunque, id_E è differenziabile ed è

$$Did_E(p) = id_{\bar{E}} \qquad , \forall\, p \in E$$

Inoltre, per ogni $(p,\bar{u}) \in TE$, è

$$T\, id_E(p,\bar{u}) \equiv (id_E(p), Did_E(p)(\bar{u})) = (p, id_{\bar{E}}(\bar{u})) = (p,\bar{u}) \equiv id_{TE}(p,\bar{u}) \quad \div$$

2.3.5. COROLLARIO Sia $f : E \to F$ un'applicazione biiettiva differenziabile con l'inversa f^{-1} .

Allora, è

$$Df^{-1}(q) = [\, Df(f^{-1}(q)\,]^{-1} \quad .$$

Inoltre, è

$$T(f^{-1}) = (Tf)^{-1} \quad .$$

D. E'

$$f^{-1} \circ f \equiv id_E \quad , \qquad f \circ f^{-1} \equiv id_F \; .$$

Pertanto, è

$$Df^{-1}(f(p)) \circ Df(p) = id_{\bar{E}} \quad ,$$

ossia
$$Df^{-1}(q) \circ Df(f^{-1}(q)) = id_{\bar{E}} \; ;$$

$$Df(f^{-1}(q)) \circ Df^{-1}(q) = id_{\bar{F}} \quad .$$

Inoltre, è

$$T(f^{-1}) \circ Tf = id_{TE}$$

$$Tf \circ T(f^{-1}) = id_{TF} \quad .$$

Dunque, i risultati seguono immediatamente dalla definizione generale di applicazione inversa (si veda [11]) $\underline{.}$

2.3.6. PROPOSIZIONE Sia $q \in F$. Sia $f : E \to F$ un'applicazione costante, ossia tale che

$$f(p) = q \qquad\qquad \forall\, p \in E$$

Allora, f è differenziabile ed è

$$Df(p) = o \quad \in \bar{E}^* \otimes \bar{F} \quad .$$

D. E'

$$f(p+\bar{h}) = q = f(p) \quad .$$

Pertanto, è

$$Df(p) = o \quad , \quad \bar{o}(p,\bar{h}) = o \quad \underline{.}$$

2.3.7. PROPOSIZIONE Siano E ed F due spazi vettoriali (e quindi due spazi affini) .

Sia $f : E \to F$ un'applicazione lineare.

Allora, f è differenziabile ed è

$$Df(p) = f \quad , \quad \forall\, p \in E \; .$$

D. E'

$$f(p+\bar{h}) = f(p) + f(\bar{h}) \quad .$$

Pertanto, è

$$Df(p) = f \quad , \quad \bar{o}(p,\bar{h}) = o \qquad \underline{.}$$

2.3.8. Studiamo, ora, la differenziabilità dell'applicazione "somma".

PROPOSIZIONE Sia $\bar{F}$ uno spazio vettoriale. Siano $h : E \to \bar{F}$ e $k : E \to \bar{F}$ due applicazioni differenziabili.

Allora, l'applicazione

$$h + k : E \to \bar{F}$$

data da $$h + k : p \mapsto h(p) + k(p)$$

è differenziabile ed è

$$D(h+k)(p) = Dh(p) + Dk(p) \quad .$$

D. E'

$$\begin{aligned}[h+k](p+\bar{u}) &= h(p+\bar{u}) + k(p+\bar{u}) = \\ &= [h(p)+Dh(p)(\bar{u})+\bar{o}'(p,\bar{u})]+[k(p)+Dk(p)(\bar{u})+\bar{o}''(p,\bar{u})] = \\ &= [h(p)+k(p)]+[Dh(p)(\bar{u})+Dk(p)(\bar{u})]+[\bar{o}'(p,\bar{u})+\bar{o}''(p,\bar{u})] = \\ &= [h+k](p)+[Dh(p)+Dk(p)](\bar{u})+[\bar{o}'(p,\bar{u})+\bar{o}''(p,\bar{u})]\end{aligned}$$

dove è

$$\lim_{\bar{u}\to\bar{o}} \frac{\bar{o}'(p,\bar{u})+\bar{o}''(p,\bar{u})}{||\bar{u}||} = \lim_{\bar{u}\to\bar{o}} \frac{\bar{o}'(p,\bar{u})}{||\bar{u}||} + \lim_{\bar{u}\to\bar{o}} \frac{\bar{o}''(p,\bar{u})}{||\bar{u}||} = o \quad .$$

Pertanto, è

$$D(h+k)(p) = Dh(p) + Dk(p) \qquad \underline{\cdot}$$

2.3.9. Concludiamo questo paragrafo con l'importante"regola di Leibnitz".

PROPOSIZIONE (REGOLA DI LEIBNITZ)

Siano $\bar{F}$, $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ spazi vettoriali. Siano $h : E \to \bar{F}_1$ e $k : E \to \bar{F}_2$ due applicazioni differenziabili. Sia $\Theta : \bar{F}_1 x \bar{F}_2 \to \bar{F}$

un'applicazione bilineare.

Allora, l'applicazione

$$h \odot k : E \to \bar{F}$$

data da $\quad h \odot k : p \mapsto h(p) \odot k(p)$

è differenziabile ed è

$$D(h \odot k)(p)(\bar{u}) = Dh(p)(\bar{u}) \odot k(p) + h(p) \odot Dk(p)(\bar{u}) \quad .$$

D. E'

$$[h \odot k](p+\bar{u}) \equiv h(p+\bar{u}) \odot k(p+\bar{u}) =$$

$$= [\, h(p) + Dh(p)(\bar{u}) + \bar{o}'(p,\bar{u}) \,] \odot [\, k(p) + Dk(p)(\bar{u}) + \bar{o}''(p,\bar{u}) \,] =$$

$$= [\, h \odot k \,](p) + [\, Dh(p)(\bar{u}) \odot k(p) + h(p) \odot Dk(p)(\bar{u}) \,] + \bar{o}(p,\bar{u})$$

avendo posto

$$\bar{o}(p,\bar{u}) \equiv [\, h(p) \odot \bar{o}''(p,\bar{u}) \,] + [\, \bar{o}'(p,\bar{u}) \odot k(p) \,] + [\, Dh(p)(\bar{u}) + \bar{o}'(p,\bar{u}) \,] \odot$$

$$\odot [Dk(p)(\bar{u}) + \bar{o}''(p,\bar{u}) \,]$$

e dove è

$$\lim_{\bar{u} \to \bar{o}} \frac{\bar{o}(p,\bar{u})}{||\bar{u}||} = o \quad .$$

Pertanto, è

$$D(h \odot k)(p)(\bar{u}) = Dh(p)(\bar{u}) \odot k(p) + h(p) \odot Dk(p)(\bar{u}) \quad \underline{.}$$

2.3.10. Diamo, quindi, la regola di Leibnitz per alcuni casi particolari.

1) Se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sono due funzioni differenziabili, allora la funzione $h \cdot k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è differenziabile ed è

$$D(h \cdot k)(x) = Dh(x) \cdot k(x) + Dk(x) \cdot h(x) \quad .$$

Si ritrova, così la regola di Leibnitz dell'analisi classica.

2) Se $t_1 : E \to \otimes^{r_1}_{s_1} \bar{E}$ e $t_2 : E \to \otimes^{r_2}_{s_2} \bar{E}$ sono due campi differenziabili, allora il campo

$$t_1 \otimes t_2 : E \to \otimes^{r_1+r_2}_{s_1+s_2} \bar{E}$$

è differenziabile ed è

$$D(t_1 \otimes t_2)(p)(\bar{u}) = Dt_1(p)(\bar{u}) \otimes t_2(p) + t_1(p) \otimes Dt_2(p)(\bar{u})$$

3) Sia $\circ : L(\bar{H},\bar{K}) x L(\bar{K},\bar{M}) \to L(\bar{H},\bar{M})$ la composizione .

Se $h : E \to L(\bar{H},\bar{K})$ e $k : E \to L(\bar{K},\bar{M})$ sono differenziabili, allora l'applicazione

$$h \circ k : E \to L(\bar{H},\bar{M})$$

è differenziabile ed è

$$D(h \circ k)(p)(\bar{u}) = Dh(p)(\bar{u}) \circ k(p) + h(p) \circ Dk(p)(\bar{u}) \quad \dot{-}$$

Queste proposizioni forniscono le regole principali di calcolo delle derivate.

4 DERIVATE E PRODOTTO CARTESIANO

0 Siano E, F, E_1, E_2, F_1, F_2 spazi affini.

Abbiamo iniziato questo capitolo, studiando la differenziabilità di applicazioni del tipo $E \to F$.

Ora ci proponiamo di estendere tale studio ad applicazioni del tipo

$$E_1 \times E_2 \to F \quad , \quad E \to F_1 \times F_2 \quad .$$

Tale studio sarà utilizzato, in particolare, nel calcolo delle derivate tramite i sistemi di coordinate.

2.4.1. LEMMA Sia $p \in E_1$, $q \in E_2$.

Le iniezioni

$$j_{1q} : E_1 \to E_1 \times E_2 \quad , \qquad j_{2p} : E_2 \to E_1 \times E_2$$

date da $\quad j_{1q} : p \mapsto (p,q) \quad , \qquad j_{2p} : q \mapsto (p,q)$

sono differenziabili ed è

$$Dj_{1q}(p)(\bar{h}) = (\bar{h},\bar{o}) \quad , \qquad Dj_{2p}(q)(\bar{k}) = (\bar{o},\bar{k}) \quad .$$

Le proiezioni

$$\overset{1}{\pi} : E_1 \times E_2 \to E_1 \quad , \qquad \overset{2}{\pi} : E_1 \times E_2 \to E_2$$

date da $\quad \overset{1}{\pi} : (p,q) \mapsto p \quad , \qquad \overset{2}{\pi} : (p,q) \mapsto q$

sono differenziabili ed è

$$D\pi^{1}(p,q)(\bar{h},\bar{k}) = \bar{h} \qquad , \qquad D\pi^{2}(p,q)(\bar{h},\bar{k}) = \bar{k} \qquad \dot{-}$$

2.4.2. Possiamo dare, dunque, la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE Sia $f : E_1 \times E_2 \to F$ un'applicazione differenziabile.

Allora, le applicazioni parziali

$$f_q \equiv f \circ j_{1q} : E_1 \to F \qquad , \qquad f_p \equiv f \circ j_{1p} : E_2 \to F$$

date da $f_q \qquad : p \mapsto f(p,q) \quad , \quad f_p \qquad : q \mapsto f(p,q)$

sono differenziabili ed è

$$Df(p,q)(\bar{h},\bar{k}) = Df_q(p)(\bar{h}) + Df_p(q)(\bar{k})$$

$\forall\ (p,q) \in E_1 \times E_2\ ,\ \forall\ (\bar{h},\bar{k}) \in \bar{E}_1 \times \bar{E}_2$.

D. Per la regola della catena, tali applicazioni sono differenziabili.

Inoltre, per la linearità di $Df(p,q)$, è

$$\begin{aligned} Df(p,q)(\bar{h},\bar{k}) &= Df(p,q)(\bar{h},\bar{o}) + Df(p,q)(\bar{o},\bar{k}) = Df(p,q)(Dj_{1q}(p)(\bar{h})) + \\ &+ Df(p,q)(Dj_{2p}(q)(\bar{k})) = (Df(p,q) \circ Dj_{1q}(p))(\bar{h}) + \\ &+ (Df(p,q) \circ Dj_{2p}(q))(\bar{k}) = D(f \circ j_{1q})(p)(\bar{h}) + \\ &+ D(f \circ j_{2p})(q)(\bar{k}) \equiv Df_q(p)(\bar{h}) + Df_p(q)(\bar{k}) \qquad \dot{-} \end{aligned}$$

2.4.3. DEFINIZIONE

Sia $f : E_1 \times E_2 \to F$ un'applicazione differenziabile.

Allora, le applicazioni

$$D_1 f : E_1 \times E_2 \to L(\bar{E}_1 , \bar{F}) \qquad \text{data da} \qquad D_1 f(p,q) \equiv Df_q(p)$$

$$D_2 f : E_1 \times E_2 \to L(\bar{E}_2, \bar{F}) \qquad \text{data da} \qquad D_2 f(p,q) \equiv Df_p(q)$$

diconsi DERIVATE PARZIALI di f .

2.4.4. PROPOSIZIONE

Sia $f : E \to F_1 \times F_2$ un'applicazione differenziabile.

Allora, le applicazioni

$$f^1 \equiv \pi^1 \circ f : E \to F_1 \qquad , \qquad f^2 \equiv \pi^2 \circ f : E \to F_2$$

sono differenziabili ed è

$$Df(p)(\bar{h}) = (Df^1(p)(\bar{h}) \quad , \quad Df^2(p)(\bar{h})) .$$

D. Le applicazioni f^1 ed f^2 sono differenziabili per la regola della catena. Inoltre, è

$$Df^1(p)(\bar{h}) \equiv D(\pi^1 \circ f)(p)(\bar{h}) = (D\pi^1 (f(p)) \circ Df(p))(\bar{h}) = \pi^1 (Df(p)(\bar{h}))$$

$$Df^2(p)(\bar{h}) \equiv D(\pi^2 \circ f)(p)(\bar{h}) = (D\pi^2 (f(p)) \circ Df(p))(\bar{h}) = \pi^2 (Df(p)(\bar{h})) .$$

2.4.5. Diamo una condizione sufficiente per la differenziabilità di

$f : E_1 \times E_2 \rightarrow F$.

PROPOSIZIONE

Sia $f : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ un'applicazione .

Se le applicazioni $f_q : E_1 \rightarrow F$ ed $f_p : E_2 \rightarrow F$ sono differenziabili, per ogni $q \in E_2$, $p \in E_1$ e se le applicazioni $D_1 f : E_1 \times E_2 \rightarrow L(\bar{E}_1,\bar{F})$ e $D_2 f : E_1 \times E_2 \rightarrow L(\bar{E}_2,\bar{F})$ sono continue, allora f è differenziabile.

D. La non facile dimostrazione si trova su [2] (prop. 3.7.2. pag. 51) $\underline{.}$

Si noti che se $D_1 f$ e $D_2 f$ non sono continue, può darsi che f non sia differenziabile.

2.4.6. Diamo una condizione sufficiente per la differenziabilità di $f : E \rightarrow F_1 \times F_2$.

PROPOSIZIONE

Si consideri l'applicazione $f : E \rightarrow F_1 \times F_2$.

Se le applicazioni

$$f^1 \equiv \pi^1 \circ f : E \rightarrow F_1 \quad , \quad f^2 \equiv \pi^2 \circ f : E \rightarrow F_2$$

sono differenziabili, allora f è differenziabile.

D. E'

$$f(p+\bar{h}) = (f^1(p+\bar{h}) \ , \ f^2(p+\bar{h}) \ ) = (f^1(p) + Df^1(p)(\bar{h}) + \bar{o}'(p,\bar{h}) \ ,$$

$$f^2(p) + Df^2(p)(\bar{h}) + \bar{o}''(p,\bar{h}) \ ) = (f^1(p) \ , \ f^2(p) \ ) +$$

$$+ (Df^1(p)(\bar{h}) \ , \ Df^2(p)(\bar{h}) \ ) + (\bar{o}'(p,\bar{h}) \ , \ \bar{o}''(p,\bar{h}) \ )$$

e

$$\lim_{\bar{h}\to\bar{o}} \frac{(\bar{o}'(p,\bar{h}) \ , \ \bar{o}''(p,\bar{h}))}{||\bar{h}||} = \lim_{\bar{h}\to\bar{o}} \frac{\sqrt{(\bar{o}'(p,\bar{h}))^2 + (\bar{o}''(p,\bar{h}))^2}}{||\bar{h}||} = o \ .$$

Dunque, f è differenziabile.

2.4.7. Vediamo ora un caso particolare molto interessante.

- CASO $f : \mathbb{R} \times E \to F$.

Si indica con

$$\delta f : E \to \bar{F}$$

l'applicazione data da $\delta f : p \mapsto D_1 f(o,p) \equiv Df_p(o)$.

Si indica con

$$\partial f : E \to TF$$

l'applicazione data da $\partial f : p \mapsto (f(o,p) \ , \ \delta f(p) \ )$.

Questi simboli saranno utilizzati, nei sistemi di coordinate, per definire gli elementi di una qualsiasi base di uno spazio vettoriale, come vettori tangenti in un medesimo punto alle curve coordinate.

Il primo simbolo servirà per le basi costanti (sistema di coordinate cartesiano); il secondo, per basi variabili punto per punto (sistema di coordinate sferico, cilindrico ...) .

Tali simboli si utilizzeranno, anche,nel calcolo delle variazioni.

In particolare per $F \equiv E$, oltre a ritrovare i simboli precedenti si indica con

$$\dot{f} : T^{*}E \to \mathbb{R}$$

l'applicazione data da $\dot{f} : (p,\underline{\nu}) \mapsto \langle \underline{\nu} , \delta f(p) \rangle$.

Tale nozione servirà per il calcolo delle componenti dei covettori espresse tramite gli elementi di una base, duale ad una che abbia per elementi i vettori tangenti alle curve coordinate.

5 IMMAGINE RECIPROCA E INVERSA DI CAMPI COVARIANTI E CONTROVARIANTI

0 Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile tra spazi affini.

Iniziamo questo paragrafo con il concetto di "immagine reciproca" di f e di "immagine inversa" di f (se invertibile). Esse saranno utili, ad esempio, per definire la "derivata di Lie" di campi tensoriali. Pertanto, consigliamo il lettore di rivedere questo paragrafo prima di passare allo studio degli "operatori differenziali".

Inoltre, se f è invertibile, è possibile definire "l'immagine diretta" di f.

Definiamo, anche, "l'applicazione cotangente" di f, la quale servirà per precisare il sistema di coordinate su T^*E, indotto da quello definito su E.

Il concetto di immagine reciproca è utilizzato in Meccanica, per esempio, nella definizione di "lavoro".

Concludiamo il paragrafo, generalizzando i precedenti risultati.

2.5.1. Ricordiamo, brevemente, che l'applicazione tangente di f è l'applicazione

$$Tf : TE \to TF$$

data da $$Tf :(p,\bar{u}) \mapsto (f(p) \, , \, Df(p)(\bar{u})) \, .$$

2.5.2. Introduciamo, ora, il concetto di "immagine reciproca" di f.

DEFINIZIONE

Dicesi IMMAGINE RECIPROCA di f l'applicazione

$$f^* : \mathcal{T}^*F \to \mathcal{T}^*E$$

data da

$$(f^*\underline{X})(p) \equiv (p, \underline{X}^{\ell}(f(p)) \circ Df(p)) \equiv (p, Df(p)^*(\underline{X}^{\ell}(f(p)))) \; .$$

Si noti che tale formula, sostanzialmente, è quella della trasformazione indotta dall'applicazione lineare $Df(p)$. A tal proposito si veda [1] .

Il campo di covettori $f^*\underline{X} \in \mathcal{T}^*E$ è detto "immagine reciproca" di $\underline{X}$ secondo f .

Vediamo il significato intuitivo della precedente definizione.

Sia $\bar{u} \in \bar{E}$ un "incremento" del punto $p \in E$. Tale incremento è trasformato "approssimativamente" da f nell'incremento, del punto $f(p) \in F$, dato da $Df(p)(\bar{u}) \in \bar{F}$.

Allora, il covettore $(f^*\underline{X})(p) \in T^*E$ è definito in modo tale che esso operi su $\bar{u}$ come $\underline{X}(f(p)) \in T^*F$ (noto a priori) opera sul suo trasformato $Df(p)(\bar{u})$, mediante f.

Sostanzialmente, tale nozione è data in modo che il seguente diagramma commuti.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} & \\
T^*E \hat{\times} TE \arrow[ur, "{<\,,\,>}"] & & T^*F \hat{\times} TF \arrow[ul, "{<\,,\,>}"'] \\
E \arrow[u, "{(f^*\underline{X}, \bar{X})}"] \arrow[rr, "f"] & & F \arrow[u, "{(\underline{X}, Tf \circ \bar{X})}"']
\end{tikzcd}$$

dove il simbolo " ^ " sul segno di prodotto cartesiano sta a significare che si opera solo sugli elementi "diagonali", ossia solo sui vettori e covettori applicati sullo stesso punto di E o F.

Si noti l'inversione : la f va da E in F, mentre f^* manda forme applicate in F in forme applicate in E.

2.5.3. Ricordiamo che è $T\mathrm{id}_E = \mathrm{id}_{TE}$, inoltre se $g : F \to G$ è un'applicazione differenziabile e se f è invertibile è

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf \quad , \quad Tf^{-1} = (Tf)^{-1} \quad .$$

Abbiamo, allora, la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE

E'

$$(\mathrm{id}_E)^* = \mathrm{id}_{\mathcal{T}^*E}$$

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \quad .$$

D. Infatti, per ogni $p \in E$, è

$$((\mathrm{id}_E)^*\underline{X})(p) \equiv (p, \underline{X}^\ell(\mathrm{id}_E(p)) \circ D\mathrm{id}_E(p)) = (p, \underline{X}^\ell(p) \circ \mathrm{id}_E) = (p, \underline{X}^\ell(p)) \equiv \underline{X}(p) =$$

$$= (\mathrm{id}_{\mathcal{T}^*E}\ \underline{X})(p) \quad , \quad \text{per ogni } \underline{X} \in \mathcal{T}^*E \quad ;$$

$$((g \circ f)^*\underline{X})(p) \equiv (p, \underline{X}^\ell(g \circ f)(p) \circ D(g \circ f)(p)) = (p, \underline{X}^\ell(g(f(p)) \circ Dg(f(p)) \circ Df(p)) =$$

$$= (p, (g^*\underline{X})^\ell(f(p) \circ Df(p)) \equiv f^*(g^*\underline{X})(p) = ((f^* \circ g^*)\underline{X})(p) \ , \ \forall \underline{X} \in \mathcal{T}^*G \ .$$

Dunque, dalla seconda relazione segue il risultato

$$(f^{-1})^* = (f^*)^{-1} \equiv f_* \quad .$$

2.5.4. Diamo, ora, la nozione duale di applicazione tangente.

DEFINIZIONE Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile invertibile.

Dicesi APPLICAZIONE COTANGENTE di f l'applicazione

$$T^*f : T^*E \to T^*F$$

data da
$$T^*f : (p,\underline{u}) \mapsto (f(p),\underline{u}\circ Df^{-1}(f(p))) \equiv (f(p),(Df^{-1}(f(p))^*(\underline{u})) \ \underline{.}$$

Come abbiamo già detto, essa servirà per definire un sistema di coordinate su T^*E, più precisamente, quello indotto da un sistema di coordinate su E.

2.5.5. La seguente definizione esprime il concetto di "immagine inversa" di f (se invertibile).

DEFINIZIONE Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile e invertibile.

Dicesi IMMAGINE INVERSA di f l'applicazione (indicata ancora con f^*)

$$f^* : \mathcal{T}F \to \mathcal{T}E$$

data da
$$(f^*\bar{X})(p) \equiv (p,Df^{-1}(f(p))(\bar{X}^{\ell}(f(p))) \quad \underline{.}$$

Dunque, il seguente diagramma è commutativo

$$
(*) \qquad
\begin{tikzcd}
TE & TF \arrow[l, "Tf^{-1}"'] \\
E \arrow[u, "f^{*}\bar{X}"] \arrow[r, "f"'] & F \arrow[u, "\bar{X}"']
\end{tikzcd}
$$

Si noti l'inversione : f va da E in F, f^{*} manda vettori applicati in F in vettori applicati in E.

Si vede facilmente che è

$$(id_E)^{*} = id_{\mathcal{C}E} \quad .$$

Inoltre, è

$$(f \circ g)^{*} = f^{*} \circ g^{*}$$

e in particolare

$$(f^{-1})^{*} = (f^{*})^{-1} \equiv f_{*} \quad .$$

2.5.6. Diamo ora il concetto di "immagine diretta" di f.

DEFINIZIONE Sia $f : E \to F$ un'applicazione differenziabile e invertibile.

Dicesi IMMAGINE DIRETTA di f l'applicazione

$$f_{*} : \mathcal{C}E \to \mathcal{C}F$$

tale che il seguente diagramma sia commutativo

$$(**) \qquad \begin{array}{ccc} TE & \overset{Tf}{\rightarrow} & TF \\ \bar{X}\ \uparrow & & \uparrow\ f_*\bar{X} \\ E & \underset{f^{-1}}{\leftarrow} & F \end{array}$$

Si confrontino i diagrammi (*) e (**) .

2.5.7. Generalizziamo i risultati sinora acquisiti.

DEFINIZIONE

Dicesi APPLICAZIONE TANGENTE R-MA di f l'applicazione

$$T^r f : T^r E \rightarrow T^r F$$

data da
$$T^r f:(p,\bar{u}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{u}_r) \mapsto (f(p), Df(p)(\bar{u}_1) \otimes \ldots \otimes Df(p)(\bar{u}_r)) .$$

Se f è invertibile, dicesi APPLICAZIONE COTANGENTE S-MA di f l'applicazione

$$T_s f : T_s E \rightarrow T_s F$$

data da
$$T_s f:(p,\underline{\nu}^1 \otimes \ldots \otimes \underline{\nu}^s) \mapsto (f(p), [\underline{\nu}^1 \circ Df^{-1}(f(p))] \otimes$$
$$\otimes \ldots \otimes [\underline{\nu}^s \circ Df^{-1}(f(p))]) \quad \dot{-}$$

Tale definizione servirà per dare la "derivata di Lie" di un campo di vettori r controvariante ed s covariante.

2.5.8. DEFINIZIONE

Dicesi IMMAGINE RECIPROCA di f l'applicazione (indicata ancora con f^*)

$$f^* : \mathcal{T}_s F \to \mathcal{T}_s E$$

data da $\quad f^* : \underline{t} \mapsto (\underline{t} \circ f) \circ T^s f \quad ,$

(dove $\circledcirc$ indica la composizione sugli spazi funzionali d'arrivo)

ossia, data da

$$(f^*\underline{t})(p) \equiv (p, [\,\underline{t}^{\ell}(f(p))\,] \circ [\,Df(p) \otimes \ldots \otimes Df(p)\,]\,) \qquad \forall\, p \in E\ .$$

Se f è invertibile, dicesi IMMAGINE INVERSA di f l'applicazione (indicata ancora con f^*)

$$f^* : \mathcal{T}^r F \to \mathcal{T}^r E$$

data da

$$(f^*\bar{t})(p) \equiv (p, [\,Df^{-1}(f(p)) \otimes \ldots \otimes Df^{-1}(f(p))\,](\bar{t}^{\ell}(f(p)))\,)\ .$$

Dicesi IMMAGINE DIRETTA di f l'applicazione (indicata ancora con f_*)

$$f_* : \mathcal{T}^r E \to \mathcal{T}^r F$$

data da

$$(f_*\bar{t})(q) \equiv (q\ ,\ [\,Df(f^{-1}(q)) \otimes \ldots \otimes Df(f^{-1}(q))\,](\bar{t}^{\ell}(f^{-1}(q)))\,)\ .$$

6 EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 1° ORDINE

0 Sia E uno spazio affine.

Sostanzialmente, una "equazione differenziale del 1° ordine" su E è un campo vettoriale

$$\bar{X} : E \to TE$$

le cui soluzioni sono tutte e sole le curve differenziabili $\mathbb{R} \to E$, dette "curve integrali", i cui vettori tangenti sono i valori assunti da $\bar{X}$ lungo esse.

Enunciamo, anche, i teoremi fondamentali di esistenza, unicità e dipendenza dai dati iniziali delle soluzioni.

Le equazioni differenziali del 1° ordine, così definite, assumeranno, tramite un sistema di coordinate, la forma classica di sistemi di equazioni differenziali ordinarie del 1° ordine, normali ed autonome.

Infine, introduciamo il concetto di "integrale primo" di $\bar{X}$ come una funzione differenziabile su E, costante lungo le curve integrali di $\bar{X}$.

2.6.1. DEFINIZIONE

Dicesi EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL 1° ORDINE su E un qualsiasi campo vettoriale

$$\bar{X} : E \to TE \quad .$$

D'ora in poi, indicheremo con $\bar{X}$ un'equazione differenziale del

1° ordine.

2.6.2. Diamo l'importante nozione di "curva integrale".

DEFINIZIONE Sia $I \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Dicesi una CURVA INTEGRALE di $\bar{X}$, ogni curva differenziabile

$$c : I \to E$$

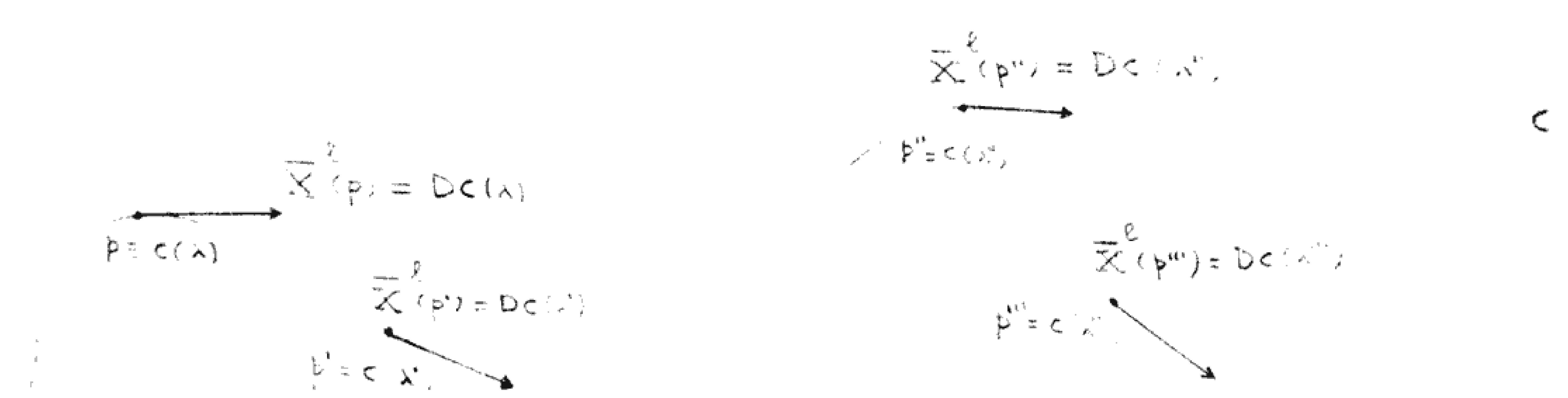
tale che

$$dc = \bar{X} \circ c$$

o equivalentemente

$$Dc = \bar{X}^{\ell} \circ c \qquad \underline{\cdot}$$

Sostanzialmente, c è ogni curva differenziabile su E il cui vettore tangente in ogni punto di E è il valore di $\bar{X}$ nel punto stesso.



2.6.3. Nasce, allora, il problema, fissato $p \in E$, dell'esistenza di una curva integrale passante per p, ossia tale che $c(o) = p$, che sia unica almeno in un intorno di p.

Il seguente teorema risolve appunto, questo problema.

TEOREMA (DI ESISTENZA ED UNICITA' DELLE CURVE INTEGRALI)

Sia $\bar{X} : E \to TE$ un campo vettoriale differenziabile (basta anche un'ipotesi più debole).

Sia $p \in E$.

Esiste

- un sottoinsieme $I \subset \mathbb{R}$,
- ed una curva integrale $c : I \to E$

tale che

$$c(o) = p \quad .$$

Se $I' \subset \mathbb{R}$ è un altro sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e $c' : I' \to E$ è tale che $c'(o) = p$, allora è

$$c_{/I \cap I'} = c'_{/I \cap I'} \qquad .$$

D. Si veda [2] (teorema 1.3.1. pag.118) .

2.6.4. Anche del seguente teorema, omettiamo la non facile dimostrazione.

TEOREMA(DI ESISTENZA, UNICITA' E DIPENDENZA DAI DATI INIZIALI DELLE CURVE INTEGRALI)

Sia $\bar{X} : E \to TE$ un campo vettoriale differenziabile (basta anche un'ipotesi più debole).

Esiste

- un intorno aperto U di $\{o\} \times E$ in $\mathbb{R} \times E$
- ed una applicazione differenziabile $c : U \to E$

avente, per ogni $p \in E$, le seguenti proprietà

1) $c_p : \lambda \mapsto c(\lambda, p)$ è una curva integrale di $\bar{X}$;

2) $c_o = id_E$, con $o \in \mathbb{R}$;

3) $c_{\lambda+\mu} = c_\lambda \circ c_\mu$ (se definito) ;

4) $\partial c = \bar{X}$, ossia $Dc_p = \bar{X}^{\ell}(p)$, $\forall\ p \in E$.

Se $o \times E \subset U' \subset \mathbb{R} \times E$ e $c' : U' \to E$ soddisfano le condizioni precedenti, allora è

$$c_{/U \cap U'} = c'_{/U \cap U'} .$$

D. Si veda [2] (§ 1.10, pag.124)

L'applicazione differenziabile $c : U \to E$ precedente, dicesi GRUPPO LOCALE AD UN PARAMETRO generato da $\bar{X}$ e si indica con

$$c \equiv \ell \bar{X} .$$

Il termine "gruppo" è giustificato dal fatto che l'insieme

$$\{c_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$$

è un gruppo rispetto alla legge di composizione

$$(c_\lambda , c_\mu) \mapsto c_\lambda \circ c_\mu = c_{\lambda+\mu} .$$

Questo gruppo locale può essere interpretato cinematicamente come un "moto stazionario" dei punti di E, tenendo conto delle proprietà 1),2),3),4) .

Il punto $c(\lambda,p) \in U$ è la posizione occupata, all'istante λ, dalla particella che, all'istante o, era in p.

La curva $c_p : \lambda \mapsto c(\lambda,p)$ è il moto della particella che, all' istante o, era in p.

L'intervallo di tempo I_p, in cui è definito il moto c_p, può variare con la posizione p.

Inoltre, considerato un intorno $V \subset E$, abbastanza piccolo, di $p \in E$, allora le *particelle*, che partono all'istante o da punti di V, mantengono la propria individualità per un intervallo di tempo non nullo, sufficientemente piccolo.

Ma, in generale, tale individualità non è mantenuta e, quindi, la posizione iniziale non individua, in modo assoluto, la particella.

L'applicazione $c_\lambda : p \mapsto c(\lambda,p)$ dà lo spostamento subito dai punti di E, all'istante λ, a partire dall'istante o.

La "stazionarietà" del moto è garantita dalla proprietà 3) del teorema 2.6.4. Sostanzialmente, essa dice che una particella, che parte da una certa posizione $q \equiv c(\lambda',p)$, arriva, dopo un tempo λ, nella stessa posizione sia che parta al tempo o da p, sia che parta al tempo λ' da q.

2.6.5. Questa condizione dà un risultato molto interessante. Ossia, le velocità delle particelle, che passano per q, non dipendono dall'istante in cui ci passano, ma solo da q, come mostra la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE Sia $(\lambda , p) \in U$ tale che $q = c(\lambda,p) \in E$.

Allora, è

$$Dc_p(\lambda) = Dc_q(o) \equiv \bar{X}^{\ell}(q) \quad .$$

D. Per λ' sufficientemente vicino a λ, è

$$c_p(\lambda + \lambda') = c_q(\lambda')$$

da cui

$$Dc_p(\lambda + \lambda') = Dc_q(\lambda') \quad .$$

Pertanto, per $\lambda' = o$, è

$$Dc_p(\lambda) = Dc_q(o) \qquad \dot{-}$$

2.6.6. Diamo, ora, la nozione di "integrale primo" di $\bar{X}$.

DEFINIZIONE

Dicesi un INTEGRALE PRIMO di $\bar{X}$ ogni funzione differenziabile

$$f : E \to \mathbb{R}$$

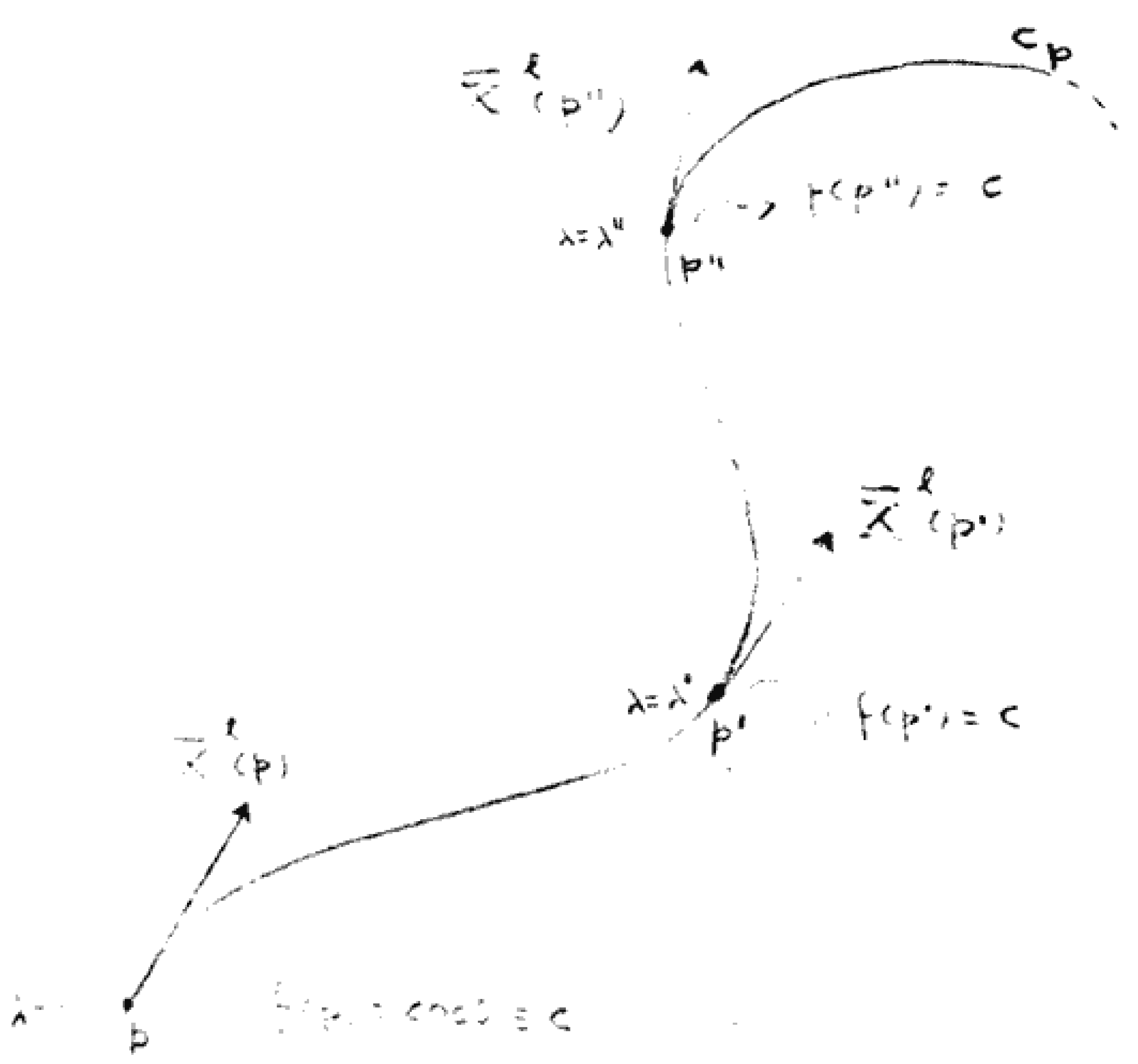
tale che f sia costante lungo le curve integrali, ossia $\forall p \in E$ è

$$f \circ c_p = \text{cost} \quad \dot{-}$$

Intuitivamente questo fatto si può vedere così.

Fissato $p \in E$, consideriamo il moto stazionario del fluido e supponiamo che in ogni punto dello spazio sia definita una funzione f (per esempio la temperatura).

Poi, consideriamo un osservatore che, all'istante $\lambda = o$ del suo orologio, si trova in p.



Allora supponiamo che egli si muova con velocità $\bar{X}$ lungo la curva integrale passante per p e supponiamo, inoltre, che non avverta "nessun cambiamento di temperatura". Se ciò vale per ogni $p \in E$, diciamo che la funzione f è un integrale primo.

2.6.7. La seguente proposizione *caratterizza un integrale primo di* $\bar{X}$.

PROPOSIZIONE Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile.

Le seguenti condizioni sono equivalenti.

a) f è un integrale primo di $\bar{X}$;

b) per ogni soluzione $c_p : I \to E$ di $\bar{X}$, è

$$(\partial c \,.\, f)(p) \equiv D(f \circ c_p)(o) = o \quad ;$$

c) è

$$<df, \bar{X}> = <Df, \bar{X}^{\ell}> = o \quad .$$

D. a) $\Rightarrow$ b). Ovvia.

b) $\Rightarrow$ c). Sia $c_p : I \to E$, con $c_p(o) = p$, una soluzione di $\bar{X}$. Allora, è

$$<df,\bar{x}>(p) = <Df(p)\ ,\ \bar{X}^{\ell}(p)> = <Df(c_p(o))\ ,\ Dc_p(o)> = D(f \circ c_p)(o) = o$$

c) $\Rightarrow$ a). Ovvia .