Didattica e matematica contemporanea.

a Marcello Vitale
matematico, operaio, rivoluzionario.

1. La ricerca senza didattica è cieca, la didattica senza ricerca è vuota. Dopo aver insegnato per qualche anno Storia delle Matematiche mi sono infine reso conto che questa parafrasi (di Kant) è la chiave di volta di ogni progetto ed intervento sulle scienze che non rimanga accademico, ma cerchi di verificarsi e di svilupparsi nella realtà sociale e di classe. Mi sono reso conto che può rimanere del tutto inutile parlare del dibattito sulla neutralità o meno della matematica (deformato un po' in dibattito tra alcuni filosofi della scienza contemporanei), anche se riccamente illustrato da fatti storici. Bisogna *contemporaneamente* porre sia il problema degli studenti che si hanno di fronte sia il problema di quali critiche vadano recepite e trasformate in una maggiore efficacia nell'organizzazione, in un allargamento del fronte di lotta, in un coagulo più compatto del fronte di classe. Sono profondamente convinto cioé che partire dalle contraddizioni vissute dagli studenti (vuoi nella scuola vuoi nella loro storia sociale) sia il modo più *immediato* per un ricercatore scientifico di misurare l'utilità sociale del proprio lavoro. E' il più immediato e forse anche il più giusto, nonostante che in teoria non sia il solo, perché gli altri canali del rapporto tra l'università (o l'istituzione di ricerca) ed il resto della società o sono inesistenti, o sono intasati ed inquinati dal barocchismo burocratico, o servono solo come potere di controllo dall'alto delle classi dominanti.Così si maschera da criterio di utilità sociale una politica di posti di lavoro adatta ai portatori di borse, una verifica del rigore e della serietà scientifica adatta alle carriere nelle accademie, una distribuzione dei fondi fatta in base alle clientele baronali e secondo gli interessi di una oligarchia borghese.

Perché non usare invece questo articolatissimo e capillare sensorio sociale che sono le masse studentesche per far penetrare anche nella munita cittadella scientifica i problemi di una società divisa in classi? Finché la scuola rimarrà di massa e così piena di fermenti innovatori come quelli di questi anni '70 non credo che ci si debba preoccupare soprattutto delle inevitabili scorie. Dopo tutto neanche in questo caso si tratta di un pranzo di gala.

Quindi alla didattica bisogna dare il significato di verifica sociale del proprio lavoro con gli studenti e anche si intenda che attraverso di loro è possibile avere un rapporto con gli operai, i disoccupati, il resto del proletariato in un momento in cui i canali più diretti sono pochi e spesso inefficaci.

Non va intesa come bagaglio tecnico per travasare in certi cervelli, od anche socializzare tra il popolo, una conoscenza scientifica oggettiva e neutrale elaborata altrove in modo separato. Si farebbe altrimenti anche il grave errore di ridurre la didattica ad una spoglia vuota senza contenuti, mentre risulta necessario legarla intimamente alla creazione ed all'evoluzione di una conoscenza collettiva che sia coerente alle pratiche scelte dal proletariato per liberarsi e soddisfare i propri bisogni e non a quelle scelte dalla borghesia per conservare i propri privilegi(1).

2. Il processo insegnamento-apprendimento-utilizzazione della matematica ha una contraddizione ed un problema maggiore nel salto tra scuola media ed università. Tutti abbiamo studiato un po' d'algebra nella media e chi si vuole laureare in matematica si trova di fronte al 1° anno l'esame di algebra. Ma in realtà l'uso della stessa parola "algebra" è una mistificazione ed una sorpresa perché le differenze sono grandi. Esse hanno un valore significativo se non si vogliono dimenticare le difficoltà di comprensione dello studente medio e non si vuole usare in università questo corso come ostacolo selettivo nei confronti di quelli "matematicamente immaturi".

Perché non usare invece questo articolatissimo e capillare sensorio sociale che sono le masse studentesche per far penetrare anche nella mu nita cittadella scientifica i problemi di una società divisa in classi? Finché la scuola rimarrà di massa e così piena di fermenti innovatori come quelli di questi anni '70 non credo che ci si debba preoccupare so prattutto delle inevitabili scorie. Dopo tutto neanche in questo caso si tratta di un pranzo di gala.

Quindi alla didattica bisogna dare il significato di verifica sociale del proprio lavoro con gli studenti e anche si intenda che attraverso di loro è possibile avere un rapporto con gli operai, i disoccupati, il resto del proletariato in un momento in cui i canali più diretti sono pochi e spesso inefficaci.

Non va intesa come bagaglio tecnico per travasare in certi cervelli, od anche socializzare tra il popolo, una conoscenza scientifica oggettiva e neutrale elaborata altrove in modo separato. Si farebbe altrimenti anche il grave errore di ridurre la didattica ad una spoglia vuota senza contenuti, mentre risulta necessario legarla intimamente alla creazione ed all'evoluzione di una conoscenza collettiva che sia coerente alle pra tiche scelte dal proletariato per liberarsi e soddisfare i propri bisogni e non a quelle scelte dalla borghesia per conservare i propri privilegi(1).

2.Il processo insegnamento-apprendimento-utilizzazione della matematica ha una contraddizione ed un problema maggiore nel salto tra scuola media ed università. Tutti abbiamo studiato un po' d'algebra nella media e chi si vuole laureare in matematica si trova di fronte al 1° anno l'esame di algebra. Ma in realtà l'uso della stessa parola"algebra" è una mistifi cazione ed una sorpresa perché le differenze sono grandi. Esse hanno un valore significativo se non si vogliono dimenticare le difficoltà di comprensione dello studente medio e non si vuole usare in università questo corso come ostacolo selettivo nei confronti di quelli "matematicamente im maturi".

Nella media si studiano soprattutto le operazioni numeriche o letterali che si possono fare con gli interi, i razionali, i reali; si cercano le soluzioni delle equazioni algebriche di 1° e 2° grado(raramente di 3°)o dei sistemi di equazioni lineari. In un manuale od in un corso medio non c'è in genere altra impostazione generale. Nell'università invece l'algebra è lo studio di certe "strutture" astratte poste sugli "insiemi". Quindi ci si trova, al capitolo 1° un po' di "logica matematica" e "teoria degli insiemi", al 2° la "struttura" più semplice che si chiama "gruppo". Essa è dotata di una sola "legge di composizione" ed è limitata da opportuni "assiomi". Cambiando gli "assiomi", od aggiungendo altre "leggi di composizione", si ottengono altre "strutture" astratte: monoide, gruppoide, anello, campo, corpo, spazio vettoriale ecc. Il lettore non matematico avrà sicuramente la percezione della difficoltà ad entrare in questa "seconda algebra" che da una parte usa dei termini tratti anche dalla lingua comune, dall'altra però li carica di un significato nuovo ben delimitato e definito su base puramente formale. Ad esempio un "insieme" è un oggetto matematico composto di elementi (che si dicono appartenenti all'"insieme") la cui natura non interessa precisare: possono essere numeri, gatti, punti, stelle, funzioni, poliziotti, triangoli, alberi ecc. Anzi un "insieme" può anche non avere alcun elemento, in questo caso si chiama "insieme vuoto". Ad ogni "insieme" si associa un numero cardinale (la "cardinalità") che rappresenta intuitivamente il numero dei suoi elementi. Se un insieme è composto di un numero finito di elementi la sua cardinalità si ottiene contandoli, ma questo numero può anche essere infinito. Inoltre si arriva a distinguere infiniti diversi: la cardinalità dell'insieme dei numeri naturali è diversa da quella dei numeri reali, i primi sono una infinità "numerabile" i secondi sono una infinità "continua".

Il concetto di "insieme" come si vede è molto generale, formalizza (e simbolizza) le azioni intuitive di raggruppare insieme cose e fatti in base a certe caratteristiche e di verificare se una data cosa può essere messa nello stesso sacco con altre. In quanto formalizzazione però esso è finalizzato (e storicamente e socialmente determinato come si potrebbe vedere con un'analisi storica(1 bis)). Cioé tale concetto non si limita a rispecchiare senza deformare certe azioni spontanee, ma ne accentua certi aspetti e ne nasconde altri. Ad esempio, secondo questa teoria, un "insieme" per definizione è dato una volta per tutte, è lì presente tutto intero. Ma non tutti gli aggregati degli oggetti in cui ci si può imbattere hanno questa caratteristica particolare. E' difficile da ottenere un aumento salariale tutto intero, questo capita solo nelle statistiche dell'Istat. Se poi consideriamo l'"insieme" infinito composto da tutti i numeri reali che stanno tra '0' ed '1', cosa significa che è dato tutto in una volta se non possiamo neanche scriverli tutti? Un elemento per definizione o fa parte o non fa parte di un "insieme" dato, così come un numero intero o è pari o è dispari. L'"insieme" cioé ha quei contorni ben netti che permettono di distinguere il dentro dal fuori senza ambiguità(2). Ma la norma empirica non suggerisce spesso l'opposto? In certi casi rimane difficile distinguere addidittura se un essere umano è maschio o femmina, se è morto o vivo! La gente che a Seveso abita nella zona B al confine con quella A sa quanto sia assurdo e criminale pensarle separate da una linea netta, come se i tassi di diossina facessero un salto brusco o peggio diventassero innocui da un cortile all'altro. Data questa formalizzazione finalizzata risulta allora calzante rappresentare gli "insiemi" graficamente come si fa di solito coi diagrammi di Venn.

Come l'"insieme" formalizza gli aggregati di oggetti così le "leggi di composizione" formalizzano, disarticolandole, le operazioni ammesse su di essi e ne esplicitano con evidenza le regole a cui devono soddisfare, cioé gli " assiomi" o "postulati". "Gruppo" è allora un "insieme" equipaggiato con una legge di composizione (binaria) che a due elementi dati ne associa un terzo dello stesso "insieme". Gli assiomi da soddisfare sono:

1) l'associatività, 2) l'esistenza dell'elemento neutro, 3) l'esistenza

dell'inverso di ogni elemento.

Si possono ora cogliere le differenze fondamentali tra le due algebre che sono:

a) di oggetto, dalle equazioni algebriche alla struttura di gruppo, anello...
b) di modo di porgere, dalle operazioni sui numeri alle definizioni formali ed agli assiomi
c) di punto di vista ideologico, da "operazioni" che fanno tuttuno con i numeri e non ne sono separabili (sono immanenti) a "leggi" che sono arbitrarie ed indipendenti dall'"insieme".

Anche se si specifica la natura dell'"insieme" la struttura vi è posta dall'esterno ed in generale non è né l'unica né la sola possibile. Ad esempio prendiamo l'"insieme" degli interi relativi: essi sono un "gruppo"(commutativo) rispetto alla legge di composizione somma($\circ$=+,e=0, l'inverso di un intero è lo stesso cambiato di segno), ma sono anche un "anello" perché moltiplicando due interi relativi (seconda legge di composizione) si ottiene ancora un intero relativo (vedi anche nota 4).

Anche quando si tratta dello stesso oggetto matematico la posizione occupata nell'arco del discorso generale muta. Così le operazioni sui numeri reali che si trovano all'inizio della prima algebra, si trovano alla fine della seconda e come <u>esempio</u>. Bisogna infatti aver prima classificato le strutture opportune per poterli definire come un "campo, archimedeo, ordinato e completo"(3). Anche nella seconda algebra si parla di equazioni algebriche, ma qui non interessa discutere la formula risolutiva esplicita o la soluzione (il calcolo della indeterminata 'x' si trova oggi in analisi od in calcolo numerico) si parla invece della struttura dell'"insieme"delle equazioni algebriche, cioè dell'"anello" dei polinomi su di una indeterminata(4). Si arriva al punto di scrivere che "f(a) è detto il valore calcolato per 'x=a' dell'elemento 'f(x)' di A[x]" "per abitudine" che "'x' è detta indeterminata per <u>comodità di linguaggio</u>"!(5)

Ho resistito alla tentazione di distinguere intuitivamente l'algebra della media da quella dell'università definendole rispettivamente più "concreta" e più "astratta". Da un lato anche la prima è a suo modo astratta, le equazioni algebriche non nascono sui meli, mentre la seconda non lo è solamente; per questo ho preferito il termine *formale*. Inoltre il passaggio dalla prima alla seconda non è (e non lo è stato storicamente) un processo di astrazione verso concezioni (strutture) sempre più generali; così oggi si "astrarrebbe" dalla struttura di "gruppo, anello, campo..." per considerare la struttura (si chiama la "categoria") di tutti "i gruppi, gli anelli..." e così via. La matematica non progredisce astraendo e individuando sempre nuove strutture o nuove relazioni tra di esse avanzando in (e sistemando) settori sempre nuovi come se ci si innalzasse lungo la verticale di un luogo: si perdono certi particolari, ma si guadagna in ampiezza d'orizzonte. Questa è la caricatura, la distorsione di una realtà variegata assai più complessa in cui *mai* un oggetto matematico può essere giustificato su una base puramente formale. A meno che si prenda a unico metro di giudizio la coscienza individuale dei ricercatori o l'autoapologia di certi potentati accademici.

Concreto ed astratto hanno senso solo se riferiti ad un preciso contesto sociale, ad un sistema ideologico, ad un particolare modo di diffondere la conoscenza. Far di conto ci appare una attività concretissima perché è coerente con una pratica sociale che si svolge in una società capitalistica *mercantile* in cui tutti (o la maggioranza) vanno a scuola e controllano i conti del droghiere. Nel secondo secolo avanti Cristo in Grecia chi aveva una cultura trovava assai più concreto usare la riga ed il compasso per misurare i campi rispetto agli esoterismi pitagorici. La struttura di "gruppo" ci appare più astratta non tanto perché non è stata ancora diffusa in tutte le scuole, ma perché la divisione sociale del lavoro della nostra società capitalistica matura non l'ha sedimentata in un *uso* di massa: rimane "concreta" solo per l'élite intellettuale scientifica.

In realtà si sarebbe potuto introdurre un "gruppo" (commutativo) partendo dall'"insieme" degli interi relativi e verificando che si possono sommare (legge di composizione) ottenendo ancora un intero relativo, che lo '0' sommato ad un intero qualsiasi lo lascia invariato (elemento neutro), che ogni intero sommato al suo opposto (l'inverso) dà lo '0' : (a) + (-a) = 0. Oppure si sarebbero potute descrivere tutte le rotazioni possibili di un libro. In questo caso comporre due rotazioni significa eseguirle una di seguito all'altra, il che evidentemente è ancora una rotazione, l'elemento neutro è la rotazione di un angolo nullo e l'inverso di una rotazione consiste nel ruotare in senso opposto.
Si ottiene un "gruppo non commutativo" perché la posizione finale del libro dipende dall'ordine con cui si eseguono le rotazioni, purché si cambi asse di rotazione.

Se lo faccio notare solo ora è perché volevo dare - insieme alla sensazione esatta della discontinuità tra media ed università - la struttura di "gruppo" che caratterizza l'algebra del secondo tipo e non degli esempi di "gruppo" che sono assai più antichi.

3. Ma se è possibile introdurre i nuovi oggetti algebrici in altro modo - risultando indubbiamente smussata la transizione tra l'algebra del primo tipo e quella del secondo - perché i manuali ed i corsi paiono invece far di tutto in genere per sottolineare il salto brusco? La spiegazione si può ricavare soltanto se si analizza l'impastarsi di tutta una serie di elementi, da quelli internazionali a quelli locali, dagli ideologici agli storici, dagli istituzionali ai sociali. Perché se non si parla di storia, come si fa in genere nei manuali, non si capiscono le rotture storiche e le cause che le hanno generate (facendo l'analisi storica si vede come la rottura tra la prima e la seconda algebra vada collocata nell'Europa centrale tra le due guerre mondiali). Perché se non si parla dell'ideologia e della filosofia dei matematici non si possono spiegare certe differenze che, prive della giusta atmosfera (la matematica non sta sulla luna), appaiono grottescamente deformate.

In realtà si sarebbe potuto introdurre un "gruppo" (commutativo) partendo dall'"insieme" degli interi relativi e verificando che si possono sommare (legge di composizione) ottenendo ancora un intero relativo, che lo '0' sommato ad un intero qualsiasi lo lascia invariato (elemento neutro), che ogni intero sommato al suo opposto (l'inverso) dà lo '0' : (a) + (-a) = 0. Oppure si sarebbero potute descrivere tutte le rotazioni possibili di un libro. In questo caso comporre due rotazioni significa eseguirle una di seguito all'altra, il che evidentemente è ancora una rotazione, l'elemento neutro è la rotazione di un angolo nullo e l'inverso di una rotazione consiste nel ruotare in senso opposto.
Si ottiene un "gruppo non commutativo" perché la posizione finale del libro dipende dall'ordine con cui si eseguono le rotazioni, purché si cambi asse di rotazione.

Se lo faccio notare solo ora è perché volevo dare - insieme alla sensazione esatta della discontinuità tra media ed università - la struttura di "gruppo" che caratterizza l'algebra del secondo tipo e non degli esempi di "gruppo" che sono assai più antichi.

3. Ma se è possibile introdurre i nuovi oggetti algebrici in altro modo - risultando indubbiamente smussata la transizione tra l'algebra del primo tipo e quella del secondo - perché i manuali ed i corsi paiono invece far di tutto in genere per sottolineare il salto brusco? La spiegazione si può ricavare soltanto se si analizza l'impastarsi di tutta una serie di elementi, da quelli internazionali a quelli locali, dagli ideologici agli storici, dagli istituzionali ai sociali. Perché se non si parla di storia, come si fa in genere nei manuali, non si capiscono le rotture storiche e le cause che le hanno generate (facendo l'analisi storica si vede come la rottura tra la prima e la seconda algebra vada collocata nell'Europa centrale tra le due guerre mondiali). Perché se non si parla dell'ideologia e della filosofia dei matematici non si possono spiegare certe differenze che, prive della giusta atmosfera (la matematica non sta sulla luna), appaiono grottescamente deformate.

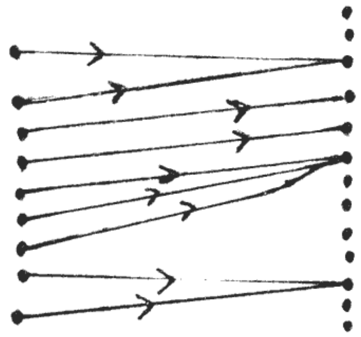
Cominciamo con l'osservare che i due punti di vista sull'algebra non sono isolati, ma investono il complesso dei numerosi settori in cui si articolano oggi le scienze matematiche. Non si tratta di una discrepanza locale e casuale dovuta a disfunzioni, o trascurabile in un complesso di problemi più ampio, abbiamo invece di fronte proprio concezioni diverse della matematica. Si parla infatti di matematica "classica" e matematica "moderna", di analisi "classica" e "moderna" e così via. Questa distinzione è parallela a quella descritta per l'algebra anche se non vi è coincidenza assoluta e meccanica.

Così l'analisi moderna alla Dieudonné si differenzia da quella classica alla Tricomi per una esposizione formale e per assiomi mentre utilizza intensamente ed in modo essenziale i concetti algebrici (insieme, gruppo, spazio vettoriale ...) cui abbiamo già accennato. Anche in Tricomi si trova dell'algebra, ma è giusto dell'altro tipo[6]. Così, accanto a corsi di geometria che parlano di punti, rette, piani, curve, superfici e coordinate cartesiane, coabitano quelli che offrono-sempre sotto la stessa etichetta di geometria, ma questa volta "moderna" - la topologia e l'algebra lineare.La topologia propone (naturalmente in modo formale ed assiomatico) lo studio di quelle strutture dello spazio(questa volta in dimensione arbitraria) che definiscono la vicinanza e la distanza tra punti.
Nella geometria cosiddetta "classica" dati due punti sulla retta è definita automaticamente la loro "distanza", che è unica. Basta infatti, scelta un'origine, sottrarre i numeri reali che li rappresentano. Due punti sono vicini se questa "distanza" è molto piccola, quasi '0'. La retta porta con sé, per così dire, la propria "distanza". Viceversa in topologia il rapporto tra spazio e "distanza" diventa arbitrario e si possono fornire più "distanze" allo stesso spazio (sulla retta quella precedente è detta "naturale"). Non solo, ma il concetto base diventa quello di "vicinanza" che è formalizzato negli "intorni" dei punti e negli "aperti".

Così la topologia come l'algebra formale si occupa di particolari strutture che possono essere poste sugli "insiemi" senza preoccuparsi della natura matematica ed intuitiva degli elementi. Quelli di uno spazio topologico si possono seguitare a chiamare "punti", ma solo per comodità di linguaggio ed abitudine storica. Possono benissimo essere funzioni od elementi di un gruppo, o matrici, o vettori, ma non sono i punti di cui tratta Euclide.

Attraverso il concetto di "intorno", di "aperto" si ricostruisce su base nuova la continuità delle funzioni, il limite, la derivata. La stessa funzione è cambiata, se prima si poteva rappresentarla intuitivamente disegnando una curva sulla lavagna, o descriverla come la traiettoria percorsa da un corpo in movimento, ora si parla di corrispondenza tra insiemi e si chiama "applicazione". Le lavagne dei docenti "moderni" si sono riempite di patate e di frecce che rappresentano questa nuova definizione e gli assiomi a cui deve sottostare: più punti possono andare (seguendo la freccia) in uno solo, ma non è una applicazione se un solo punto va in più. E' evidente che non è più possibile dare della derivata di una funzione l'idea intuitiva della tangente ad una curva o della velocità. Non si pensi neppure che sia sufficiente il linguaggio "rigoroso" alla Cauchy-Weierstrass perchè possia sulla topologia "naturale" indotta dalla "distanza", mentre abbiamo visto che ce ne possono essere di diverse.

Così la funzione è detta "continua" se la controimmagine di un "aperto" è un "aperto", cioè se il "sottoinsieme" dei punti che vanno in un "aperto" dell'"insieme" di arrivo è a sua volta un "aperto" di quello di partenza. Tale linguaggio si adatta ad ogni topologia possibile e quindi fa dipendere la continuità di una funzione dalla particolare topologia con cui devono essere equipaggiati sia l'insieme di partenza che quello di arrivo. Ci sono topologie in cui tutte le funzioni sono continue ed in cui la continuità non ha più nulla da spartire con l'idea intuitiva che ci si potrebbe fare. Ad esempio la funzione definita così:



è "continua" se per definire la topologia dell'"insieme" di partenza si prendono come "aperti" tutti i suoi "sottoinsiemi", mentre quella dell'"insieme" di arrivo può essere qualsiasi.

Venendo ora all'"algebra lineare" per capirne la distanza dalla "geometria classica" basti notare che, dove si sarebbe detto " punto di uno spazio a tre dimensioni", si trova invece "elemento di uno spazio vettoriale di dimensione finita su un corpo k"(7). Lo "spazio vettoriale" è la generalizzazione della proprietà dei punti del piano o dello spazio di farsi rappresentare come vertici dei vettori a base nell'origine degli assi. Esso formalizza la struttura di un "insieme" i cui elementi - per definizione - possono essere sommati (regola del parallelo-grammo, o somma delle componenti lungo gli assi) e moltiplicati per uno scalare (il vettore punta nella stessa direzione, ma si allunga proporzionalmente allo scalare che è un elemento del corpo, ad esempio un reale).

Considerate queste caratteristiche di coerenza credo sia molto meglio parlare di matematica algebrizzata e formalizzata piuttosto che di matematica "moderna" perché, anche se è vero che c'entra la storia come sempre, è del tutto falso rappresentarsi il passaggio tra le due matematiche semplicemente come parallelo a quello tra passato e presente. Da una parte, come vediamo, esse coabitano oggi contemporaneamente sotto varie forme nelle istituzioni scolastiche (e si può vedere che coabitano ideologicamente anche tra i matematici). Dall'altra l'imporsi, in quasi tutti i contesti, della matematica algebrizzata non è consistito semplicisticamente nel lasciare passare il tempo, ma in uno scontro e dibattito assai duro tra scelte diverse che si aprivano. Del resto anche illustri fautori della matematica "moderna" usano talvolta il vocabolo che ritengo più preciso e pertinente[8].

Allora la discontinuità tra media ed università riguarda tutta la matematica? Sostanzialmente sì,ma il salto nei settori non direttamente algebrici è meno evidente perché mascherato da un altro elemento. Mentre l'algebra formale ("moderna") è di recente istituzionalizzazione in Italia nel corso di laurea in matematica (anni '60), i corsi di analisi e di geometria hanno una lunghissima tradizione alle spalle che li ha resi restii a mutamenti profondi. Per questa ragione è spesso più facile individuare i due punti di vista diversi all'interno della sola università, tra corsi del primo e del secondo biennio ad esempio, piuttosto che tra questa e la scuola media.

4. Mi sembra evidente che individuata questa contraddizione a livello dei contenuti matematici non si possa tollerare lo status quo. Essa va risolta perché è all'origine di molti problemi. Gli studenti che si iscrivono a matematica subiscono con l'algebra formale una forma di astrazione fondata su se stessa, senza motivazione nella propria esperienza di vita, senza motivazione nelle applicazioni. Non si rapporta quasi mai neanche con gli altri settori della matematica specie se ci si trova accanto un corso di geometria "classica". Il risultato non può che essere la selezione a cui si riduce il corso: piantato al 1° anno proprio per questo. D'altra parte i neo laureati-neo disoccupati che per avventura trovassero un posto nella scuola media si trovano di fronte al dilemma, o cercare di dimenticare quanto forse imparato di "moderno" all'interno dei quattro anni per adeguarsi ai programmi ministe-

coabitano ideologicamente anche tra i matematici). Dall'altra l'imporsi, in quasi tutti i contesti, della matematica algebrizzata non è consistito semplicisticamente nel lasciare passare il tempo, ma in uno scontro e dibattito assai duro tra scelte diverse che si aprivano. Del resto anche illustri fautori della matematica "moderna" usano talvolta il vocabolo che ritengo più preciso e pertinente(8).

Allora la discontinuità tra media ed università riguarda tutta la matematica? Sostanzialmente sì,ma il salto nei settori non direttamente algebrici è meno evidente perché mascherato da un altro elemento. Mentre l'algebra formale ("moderna") è di recente istituzionalizzazione in Italia nel corso di laurea in matematica (anni '60), i corsi di analisi e di geometria hanno una lunghissima tradizione alle spalle che li ha resi restii a mutamenti profondi. Per questa ragione è spesso più facile individuare i due punti di vista diversi all'interno della sola università, tra corsi del primo e del secondo biennio ad esempio, piuttosto che tra questa e la scuola media.

4. Mi sembra evidente che individuata questa contraddizione a livello dei contenuti matematici non si possa tollerare lo status quo. Essa va risolta perché è all'origine di molti problemi. Gli studenti che si iscrivono a matematica subiscono con l'algebra formale una forma di astrazione fondata su se stessa, senza motivazione nella propria esperienza di vita, senza motivazione nelle applicazioni. Non si rapporta quasi mai neanche con gli altri settori della matematica specie se ci si trova accanto un corso di geometria "classica". Il risultato non può che essere la selezione a cui si riduce il corso: piantato al 1° anno proprio per questo. D'altra parte i neo laureati-neo disoccupati che per avventura trovassero un posto nella scuola media si trovano di fronte al dilemma, o cercare di dimenticare quanto forse imparato di "moderno" all'interno dei quattro anni per adeguarsi ai programmi ministe-

riali ed alla tradizione manualistica, oppure arrischiarsi in una sperimentazione che conserva tutti i limiti da loro già subiti in università.

In quale direzione va quindi sviluppata la contraddizione? Può bastare abolire la rottura riproponendo tout-court la matematica classica, oppure facendo la scelta modernista anche nella media? Non sarebbe riproporre un circolo vizioso e sterile quello di introdurre gli "insiemi" e la matematica algebrizzata anche nella media solo perché i docenti universitari abbiano qualche problema di meno ed i futuri studenti di matematica comincino a respirare la matematica oggi "adatta" alla ricerca pura? Chi se la cava in questo modo o è un reazionario vagheggiatore dei bei tempi antichi, o un aristocratico chiuso nel suo castello d'avorio che accorgendosi del dissidio tra lui ed il mondo circostante, sentendosi alto ed intoccabile sulla sua torre, pretende di adeguare a se stesso il mondo. C'è chi come Dieudonné dichiara che per dare un quadro il meno soggettivo possibile dello stato della ricerca recente in matematica ha chiesto l'opinione di alcuni dei migliori matematici. E confessa che "questo non è un procedimento molto democratico, ma temo di non credere molto alla democrazia, almeno circa le questioni scientifiche"[9]. Come dire, gli affari matematici ce li sbrighiamo noi della corporazione dei matematici, le verifiche di altra natura sono dannose. Dieudonné è uno dei fautori maggiori come abbiamo già accennato della matematica "moderna".

Credo invece che la questione vada posta in un altro spazio dotato di un numero maggiore di dimensioni onde permettere dei movimenti molto più ricchi e radicalmente diversi dall'altalenarsi tra classico e moderno, tra "insiemi" no e sì. E' necessario cioé aggiungere la dimensione "ideologia" e la dimensione "sviluppo temporale", sia verso il passato (la storia) che verso il futuro (dove vanno le matematiche), per poter dare una risposta che non sia già determinata da un presunto progresso lineare o puro arbitrio dei ricercatori scientifici.

Senza approfondire questi due nuovi piani (come si farà altrove) non è possibile quindi fornire risposte motivate e definitive. Ma si può già cominciare a muoversi in questa direzione capendo come il problema della didattica della matematica non sia peculiare dell'Italia (anche se si possono registrare al solito ritardi e particolarità), ma sia comune a tutti i paesi fortemente industrializzati. Così l'Unione Matematica Italiana non è l'unica ad essersi accorta (anche se forse è l'ultima) che bisogna rinnovare l'insegnamento della media per adeguarla - pensa lei - al livello presente tra i ricercatori universitari, promuovendo una sperimentazione coordinata dal Comitato Italiano per l'Insegnamento della Matematica.

5. Il matematico sovietico Alexandrov ammette con tutta tranquillità che la matematica insegnata nelle scuole medie sovietiche è quella scoperta a partire dai greci fino al XVII secolo, vale a dire che anche in URSS i cardini sono la geometria euclidea e le equazioni algebriche. Il suo collega Sobolev lo conferma, ma aggiunge "lo sviluppo del progresso tecnico e l'accrescimento del ruolo della scienza nella società hanno imposto una revisione di contenuto e di stile nell'insegnamento delle matematiche (e anche delle altre discipline) nella scuola media". Allora gli "insiemi"? No, innanzitutto derivate, integrali, equazioni differenziali; solo qualche elemento sugli "insiemi" e sulla logica introdotto "gradualmente". "Ci sono in URSS pochi partigiani di una ristrutturazione integrale dell'insegnamento matematico nella scuola media, fondato esclusivamente sulla teoria degli insiemi, le nozioni topologiche ecc." Il cambiamento dunque è considerato inevitabile, ma non inevitabilmente insiemistico e soprattutto teso a "colmare il fossato tra aritmetica ed algebra" ed a "distruggere la barriera che separa la matematica elementare e la matematica superiore"(10).

In Inghilterra l'algebra limitata al '600 nella cultura matematica preuniversitaria provoca una retroazione spiacevole negli insegnanti ed approfondisce il fossato con l'università già presente a causa del

Senza approfondire questi due nuovi piani (come si farà altrove) non è possibile quindi fornire risposte motivate e definitive. Ma si può già cominciare a muoversi in questa direzione capendo come il problema della didattica della matematica non sia peculiare dell'Italia (anche se si possono registrare al solito ritardi e particolarità), ma sia comune a tutti i paesi fortemente industrializzati. Così l'Unione Matematica Italiana non è l'unica ad essersi accorta (anche se forse è l'ultima) che bisogna rinnovare l'insegnamento della media per adeguarla - pensa lei - al livello presente tra i ricercatori universitari, promuovendo una sperimentazione coordinata dal Comitato Italiano per l'Insegnamento della Matematica.

5. Il matematico sovietico Alexandrov ammette con tutta tranquillità che la matematica insegnata nelle scuole medie sovietiche è quella scoperta a partire dai greci fino al XVII secolo, vale a dire che anche in URSS i cardini sono la geometria euclidea e le equazioni algebriche. Il suo collega Sobolev lo conferma, ma aggiunge "lo sviluppo del progresso tecnico e l'accrescimento del ruolo della scienza nella società hanno imposto una revisione di contenuto e di stile nell'insegnamento delle matematiche (e anche delle altre discipline) nella scuola media". Allora gli "insiemi"? No, innanzitutto derivate, integrali, equazioni differenziali; solo qualche elemento sugli "insiemi" e sulla logica introdotto "gradualmente". "Ci sono in URSS pochi partigiani di una ristrutturazione integrale dell'insegnamento matematico nella scuola media, fondato esclusivamente sulla teoria degli insiemi, le nozioni topologiche ecc." Il cambiamento dunque è considerato inevitabile, ma non inevitabilmente insiemistico e soprattutto teso a "colmare il fossato tra aritmetica ed algebra" ed a "distruggere la barriera che separa la matematica elementare e la matematica superiore"(10).

In Inghilterra l'algebra limitata al '600 nella cultura matematica preuniversitaria provoca una retroazione spiacevole negli insegnanti ed approfondisce il fossato con l'università già presente a causa del mancato insegnamento della analisi (derivate, integrali...). L'esigenza di riforma legata anche a questo problematrova posto nel School Mathematics Project (anni '60) e c'è chi caldeggia di accostare gli scolari il prima possibile alle nuove idee matematiche[11]. Però questo progetto - finanziato dalla <u>industria</u> e dominato dagli <u>insegnanti medi</u> - non accoglie in blocco la matematica "moderna" (perché, a detta loro, la matematica non coincide con l'algebra formale), rivendica delle caratteristiche nazionali ed insiste sull'utilità della matematica[12].

Diversa è la situazione in Francia e negli Stati Uniti. Qui, sotto la spinta del PSSC (Physical Science Study Committee, a sua volta "spinto" dallo scacco tecnico-politico dello Sputnik), nasce (fine '50, anni '60) lo School Mathematics Study Group (SMSG). I suoi contenuti sono la matematica moderna (New Math), i suoi compiti consistono nel rinnovare il curriculum medio e preparare gli insegnanti. Le istituzioni che lo controllano sono la National Science Foundation e l'American Mathematical Society col che esso risulta largamente egemonizzato e determinato dai docenti dell'università[13].

Critiche radicali al SMSG sono state sollevate in un manifesto da 65 matematici USA tra i quali Ahlfors, G. Birkhoff, Courant, Coxeter, Polya... Deane Montgomery, Marston Morse, A. Taub, Clifford E. Truesdell, A. Weil. Questo progetto è dominato dai matematici universitari ed adatto quindi a formare nuovi matematici professionisti, ma risulta prematuramente astratto, mancante di legami con il corpo complessivo delle scienze, privo di motivazioni e separato dalla genesi storica[14]. "Lo approccio logico dà allo studente una impressione completamente falsa di come si sviluppa la matematica", "pure proprio questo argomento è ora diventato il principale nella "High school" [scuola media superiore] e nei corsi matematici del "College" [all'incirca la nostra università]". "Uno dei difetti più gravi dell'insegnamento della matematica è la mancanza di motivazioni... Rassicurarli [gli studenti] che il materiale si rivelerà utile in qualche momento successivo è difficilmente un incentivo da prendere troppo sul serio". Ma come accade che, nonostante questi difetti e l'opinione di celebri matematici, "la pratica prevalente consiste nel presentare la matematica rigorosamente e di enfasizzarne il metodo assiomatico?" Secondo Morris Kline(matematico, fisico, storico, pedagogo) questo può avvenire perché l'approccio assiomatico è più facile da insegnare: "basta offrire del materiale inscatolato". Inoltre molti matematici "nel presentare dimostrazioni rigorose e sofisticate adoperano la classe per autostimolarsi. Questi professori servono loro stessi piuttosto che gli studenti"[15].

Il matematico E. Spanier scrive:"I corsi di geometria classica sono stati eliminati perché non sono necessari per il lavoro di dottorato. Agli insegnanti di oggi si è insegnato a non fidarsi della pratica di disegnare una figura e di usare l'intuizione come aiuto per comprendere un risultato. Essi insistono nel presentare un soggetto nel modo "giusto", che in genere significa nel modo più astratto possibile per l'insegnamento in questione ... Quando si presenta un marchingegno tanto astratto prima che l'intuizione dello studente si sia sviluppata, egli può imparare come si dimostra un risultato, ma rimane incapace di ottenere una vera comprensione di esso. Le cose più importanti attorno ad un teorema non comprendono necessariamente la sua dimostrazione". " La teoria dei numeri, un argomento classico riguardante concetti vicini alla esperienza degli studenti, ed accessibile (al livello elementare) all'uomo della strada che è andato a scuola, è stato effettivamente sostituito da un corso in algebra astratta che non può essere capito interamente se non molto più tardi". Riportando una desolante esperienza tentata dal Committee on the Undergraduate Program in Mathematics (sull'insegnamento della matematica in università) per saggiare l'opinione degli studenti Spanier scrive ancora: "Gli studenti non avevano mai sentito parlare di problemi classici come l'irrisolubilità dell'equazione di quinto grado o l'impossibilità della trisezione euclidea di un angolo generico (nonostante avessero avuto corsi in algebra astratta)... Essi pensavano all'"analisi" come a un corpo di teoremi... ma non avevano le idee chiare sul suo uso. Erano convinti che la parte più significativa della matematica fosse lo sviluppo delle strutture astratte, per esempio il sistema dei numeri reali. Sentivano che l'essenza della matematica fosse la deduzione di un risultato dagli assiomi"(16).

Dunque, negli USA parallelamente all'affermarsi ed all'estendersi di progetti sulla New Math (logica, insiemi, algebra formale...) si è venuta determinando una critica radicale variamente motivata. C'è chi dopo aver preso atto di questo stato di cose (Math wars), ha cercato delle mediazioni proprio sul piano didattico cercando di euristicizzare e motivare l'approccio formalistico.Il che ha voluto dire naturalmente schierarsi coi formalisti e la "nuova matematica" cercando di temperarne le asprezze logiche ed autoritarie. " Sorge allora per un ricercatore in Didattica un problema, ed è uno di notevole interesse, se l'insegnare accuratamente a dimostrare teoremi in algebra elementare contribuisca all'abilità degli studenti nel risolvere le equazioni algebriche a causa dell'intuizione logica che si sviluppa, o se tale abilità algebrica si acquisisca meglio attraverso un insegnamento finalizzato a sviluppare l'intuizione fisica, o se - come lo ipotizzo - ottengono risultati migliori di ciascuno preso da solo quelle procedure che uniscono ambedue gli approcci". "Noi troviamo una indicazione di come limitare l'autoritarismo negli scritti di Polya, dove argomenta che ciascun passaggio di una lezione dovrebbe avere la caratteristica di poter essere pensato dallo studente stesso... I riformatori hanno prodotto in dettaglio una analisi della logica al cui interno trovano risposta le principali domande che gli studenti hanno sollevato durante anni di ricerche in classe....
Con questo materiale a disposizione, è anche possibile preparare gli insegnanti al compito di condurre gli studenti, in modo non autoritario, attraverso tali sviluppi e fornirli di una pratica adeguata ai ne

cessari elementi di abilità [17].

Non mi arresterò alla situazione presente nel paese guida delle scienze contemporanee, anche se potrebbe già apparire decisamente significativa, perché gli errori da cui meglio imparare sono stati commessi sotto una luce più implacabile e con chiarezza cartesiana in Francia. Alla fine degli anni '40 così il matematico André Weil si lamentava : " ... in Germania, fino all'avvento di Hitler, si trovava, non è ancora passato molto tempo, un insegnamento universitario poggiato su di un insegnamento secondario solido che assicurava al futuro matematico sia le conoscenze specifiche sia la cultura generale senza le quali non si può fare nulla di importante. Ma oggi? In Francia, nelle nostre università nessuna delle branche fondamentali delle matematiche moderne viene insegnata, se non per caso ... L'estrema rigidità di un mandarinato fondato su delle istituzioni accademiche desuete fa si che ogni tentativo di rinnovamento sembra destinato al fallimento, a meno che sia puramente verbale"[18].

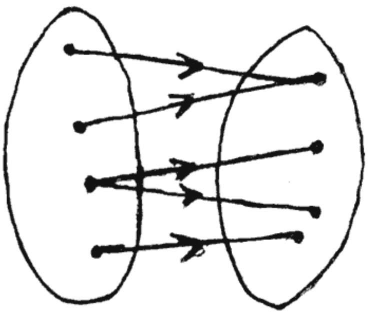
Ma è solo negli anni '60 che la critica prende piede e diventa nelle parole di Dieudonné:" L'unica cosa ragionevole in questo caso è allora demolire questi edifici mangiati dai vermi per ricostruire (la matematica delle scuole) su solide basi, così che lo studente possa raggiungere subito la soglia della matematica "superiore" che si può trovare all'università".[19]

Al convegno di Royaumont del 1959 Dieudonné attacca l'insegnamento della geometria euclidea sostenendo che l'unico modo di affrontare la geometria consiste nello studio dello spazio vettoriale con prodotto scalare. Lavorano in questa direzione Choquet e Papy elaborando proposte didattiche complete secondo lo spirito della matematica "moderna", formalizzata ed algebrizzata (20) .

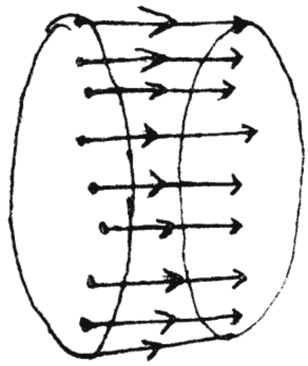
I fautori della "Mathematique Moderne", compattatisi in buona parte ideologicamente nel gruppo Bourbaki, occupano ora posti di potere nelle istituzioni accademiche, ma manca loro ancora la riforma della media che verrà data nel 1969 dal ministro Faure.

E' vero che critiche severe vengono fatte da Dieudonné alla New Math statunitense: "E' una perdita di tempo e di energia, penso, lo sforzarsi a fondare la matematica della scuola tradizionale su una base logica soddisfacente - come viene tentato correntemente da alcuni educatori (ad esempio SMSG negli USA). Questi riformatori, pieni di buona volontà, hanno semplicemente sottovalutato la circostanza che avrebbero dovuto cercare di collegare gli argomenti matematici universitari al corpo completo della matematica moderna"(21). E' altrettanto vero che si manifesta fastidio per certe scolastiche trasposizioni meccaniche e prive di vita (perché separate dalla comunità dei matematici attivi e militanti) dei concetti di insieme, di struttura algebrica e topologica(22). Ciò non toglie però che in Francia la matematica algebrizzata abbia trovato (accanto alla ideologia adatta: il bourbakismo) la riforma istituzionale più completa e diffusa a tutti i livelli, grazie soprattutto ad una amministrazione statale accentrata ed alla politica culturale gollista di "grandeur". Anche l'accademico positivista più incallito e più tetragono alle facili suggestioni dovrebbe notare, se non altro per motivi mnemonici, che la riforma Faure segue di un anno il Maggio francese (capitando nel momento che vede lo sbarco umano sulla luna) ed è fatta per insegnare le tre lingue chiave del nostro tempo: quella materna, quella estera, quella matematica. Si riusciva finalmente a sostituire il vecchio latino presentando la matematica come il nuovo linguaggio universale ,interumano ed oggettivo: il linguaggio principe delle scienze in una società che dipende sempre più criticamente dalle acquisizioni scientifiche. Purché tale linguaggio sia sufficientemente flessibile ed astratto per essere adatto a molti usi: metodo assiomatico formale, teoria degli insiemi, algebra.

Un tentativo di bilancio fortemente critico fatto da chi questa riforma ha subito si può conoscere attraverso il collettivo parigino di "Impa science". Critiche di insegnanti che registrano la selezione, la mancanza di motivazioni, la scienza ridotta a spettacolo. Critiche - le migliori - di scolari che preferiscono imparare a calcolare le vecchie percentuali invece delle "matematiche moderne che non servono praticamente a niente perché fondate su regole fornite dai matematici"(23). Anche se il giudizio sulla riforma è fortemente limitato da un clima lacaniano e radical borghese non si può non registrare l'incompatibilità tra soggettività sociale degli scolari e tutto l'apparato insiemistico e modernista. Colpisce al proposito un fatto raccontato dal fisico teorico Jean - Marc Levy-Leblond ad un convegno (Langage et Pensée Mathématiques, Lussemburgo 1976). In una classe lo scolaro si ricordava esattamente la definizione formale di applicazione biunivoca, ma non era in grado di disegnarla, faceva un disegno di questo tipo:



invece di



L'insegnante cerca di chiarire se conosce il significato del termine biunivoco, ma senza risultato. Allora chiede cosa vuol dire "unico" e si sente rispondere che unico è colui che riceve molti regali. La soggettività di chi vive in una realtà sociale fatta di periferie dormitorio, immigrazione ed è figlio in una famiglia numerosa fa aggio su ogni definizione formale. Non tenerne conto significa o voler emarginare dalla scuola certe classi subalterne e certe subculture non egemoni, oppure votare al fallimento, il che è altrettanto grave, qualsiasi scolarità realmente di massa.

Critiche altrettanto radicali vengono da un matematico del prestigio di RenéThom (Medaglia Field nel 1958, una specie di premio Nobel per la matematica). E' molto esplicito: la matematica"moderna" è un errore filosofico e didattico insieme (24). La tendenza ad enfasizzare l'algebra a spese della geometria si è diffusa in università e nella scuola, ma questo comporta la mancanza di problemi che stimolino l'intuizione e l'interesse. In algebra formale tutto o è meccanico e triviale oppure impossibile da risolvere. Opera una selezione migliore ("determinare le attitudini e svilupparle al massimo") la geometria euclidea ed il latino. "Si deve dire chiaramente che l'assiomatizzazione è lavoro da specialisti e non ha posto nell'insegnamento sia secondario che universitario eccetto per coloro che si specializzano professionalmente nello studio dei fondamenti". "Qualcuno afferma che l'uso della teoria degli insiemi permette il rinnovamento completo dell'insegnamento della matematica e che grazie a questo cambiamento lo studente medio sarà in grado di acquisire padronanza sul curriculum degli studi. Inutile dire, questa è una pura illusione". "I moderni protagonisti della teoria degli insiemi dovrebbero capire che questa teoria non è sufficiente a rendere ragione persino dei più elementari passaggi deduttivi del pensiero ordinario... Non è sicuro che, persino in matematica pura, ogni deduzione possa avere un modello insiemistico ... Forse, persino in matematica, sussiste la qualità, e resiste a tutte le riduzioni agli insiemi. La vecchia speranza dei bourbakisti, di vedere le strutture matematiche nascere naturalmente da una gerarchia di insiemi, dai loro sottoinsiemi, e dalle loro combinazioni è senza dubbio solo una illusione"(25).

6. Potremmo continuare ancora a lungo illustrando il modernismo del belga Papy(26), od il modo euristico-storico di presentare un "gruppo" dell'olandese H. Freudenthal(27). Potremmo ricordare qualche convegno internazionale che ha agitato i problemi sull'insegnamento della matematica(28), ma aggiungeremmo ben poco al già detto. E' meglio invece tirare alcune conclusioni parziali:

a) E' in atto dagli anni '60 un processo di rinnovamento dell'insegnamento della matematica che consiste nell'adeguarla al punto di vista formale ed algebrico (assiomatizzazione, insiemi, gruppi, topologia ...).

b) Tale processo però non è omogeneo; è ad uno stadio avanzato e realizzato in alcuni paesi, appena accennato in altri. Risente cioè dell'organizza della geometria si è diffusa in università e nella scuola, ma questo comporta la mancanza di problemi che stimolino l'intuizione e l'interesse. In algebra formale tutto o è meccanico e triviale oppure impossibile da risolvere. Opera una selezione migliore ("determinare le attitudini e svilupparle al massimo") la geometria euclidea ed il latino. "Si deve dire chiaramente che l'assiomatizzazione è lavoro da specialisti e non ha posto nell'insegnamento sia secondario che universitario eccetto per coloro che si specializzano professionalmente nello studio dei fondamenti". "Qualcuno afferma che l'uso della teoria degli insiemi permette il rinnovamento completo dell'insegnamento della matematica e che grazie a questo cambiamento lo studente medio sarà in grado di acquisire padronanza sul curriculum degli studi. Inutile dire, questa è una pura illusione". "I moderni protagonisti della teoria degli insiemi dovrebbero capire che questa teoria non è sufficiente a rendere ragione persino dei più elementari passaggi deduttivi del pensiero ordinario... Non è sicuro che, persino in matematica pura, ogni deduzione possa avere un modello insiemistico ... Forse, persino in matematica, sussiste la qualità, e resiste a tutte le riduzioni agli insiemi. La vecchia speranza dei bourbakisti, di vedere le strutture matematiche nascere naturalmente da una gerarchia di insiemi, dai loro sottoinsiemi, e dalle loro combinazioni è senza dubbio solo una illusione"[25].

6. Potremmo continuare ancora a lungo illustrando il modernismo del belga Papy[26], od il modo euristico-storico di presentare un "gruppo" dell'olandese H. Freudenthal[27]. Potremmo ricordare qualche convegno internazionale che ha agitato i problemi sull'insegnamento della matematica[28], ma aggiungeremmo ben poco al già detto. E' meglio invece tirare alcune conclusioni parziali:

a) E' in atto dagli anni '60 un processo di rinnovamento dell'insegnamento della matematica che consiste nell'adeguarla al punto di vista formale ed algebrico (assiomatizzazione, insiemi, gruppi, topologia ...).

b) Tale processo però non è omogeneo; è ad uno stadio avanzato e realizzato in alcuni paesi, appena accennato in altri. Risente cioè dell'organizza zione scolastica e della tradizione culturale.

c) Specie dove le riforme in tal senso sono state più profonde e più diffuse si è visto sorgere un dissenso non trascurabile sia all'interno della comunità dei matematici, sia in rapporto alla soggettività degli studenti. Questo dissenso autorizza a cercare di fare un bilancio cercando di valutare gli effetti delle innovazioni introdotte.

d) Tutti questi fatti spingono a pensare che - se non vogliamo al solito essere colonizzati, ma tenere conto della nostra realtà sociale, economica e storica, trasformandoil ritardo in vantaggio - è assai auspicabile ed indispensabile, ben più che lecito, trovare una <u>soluzione originale</u> al problema che valorizzi le critiche.

e) Accanto alle posizioni di chi vuol lasciare le cose come stanno sono quindi sicuramente da condannare anche quelle che vedono l'unica strada possibile (il progresso!!) nella insiemizzazione e formalizzazione selvaggia della matematica a tutti i livelli[29].

f) Se a criticare ed a cercare di superare la "Matematica moderna" si rischia di sembrare oscurantisti, reazionari,od al solito luddisti e irrazionalisti, è un rischio che si corre in buona compagnia. Quelli che fanno coincidere l'unica razionalità possibile (per loro) con la logica matematica, l'unica astrazione possibile con la formalizzazione, l'unica verifica possibile con il criterio di verità interno alla corporazione, corrono quello di non percepire le trasformazioni in atto non solo nella società ma tra gli stessi matematici militanti.

Al momento ci possiamo <u>solo incamminare</u> verso una <u>soluzione originale</u>. Ulteriori passi avanti potranno essere fatti solo dopo aver approfondito, come già più volte detto, i piani ideologico e storico. Tirando fin da ora delle conclusioni definitive si cadrebbe o nella piatta accettazione dell'esistente o nella produzione di gatti ciechi.

A stesura ormai ultimata ricevo un lavoro di C. Boldrighini - in corso di stampa su Sapere - sopra un argomento uguale a quello affrontato qui. La cosa mi rafforza nella convinzione che certe questioni meritano un po' di attenzione. Devo però dire che alcuni punti hanno suscitato in me molte perplessità. Una affermazione a dir poco "strana" è che il movimento "strutturalista" sarebbe partito dalle strutture matematiche bourbakiste. Visto che Saussure smette di produrre lavori nel 1894 e che Dieudonné nasce nel 1906 tale affermazione sembra falsa a meno che si chiariscano altrimenti i termini del problema. Non mi pare proprio si possa sostenere che la topologia algebrica abbia tratto origine dal lavoro di sistemazione bourbakista. Questa topologia si rifonda con Poincaré, si sviluppa con Brouwer, si algebrizza con Emmy Noether e così via. Se si vuole ascrivere qualche cosa a merito dei boubakisti si citino la geometria algebrica, l'algebra omologica, ma non la topologia algebrica!

Solvolando per brevità su altri disaccordi, non del tutto irrilevanti però, vengo a due nodi che mi premono di più. Nell'articolo si dà l'impressione più volte di credere che le "matematiche moderne" siano ormai entrate nelle scuole attraverso una "riforma dei programmi". Se non si chiarisce dove questo sarebbe avvenuto tutto il discorso diventa privo di senso perché: esso è vero per la Francia e forse anche per gli USA, ma esprime solo una tendenza in Inghilterra ed in URSS, essendo falso a mio avviso per l'Italia. Nelle università continuano ad arrivare studenti che non conoscono né i "gruppi" né gli "insiemi". Qualche manuale nuovo e gli sforzi della Castelnuovo o di Lombardo-Radice non fanno ancora primavera. Tra l'altro i nuovi testi per la media con furbizia editoriale spesso mettono vino vecchio in otri nuovi e non costituiscono un cambiamento profondo in senso bourbakista. Certo si esprimono anche in Italia delle tendenze, ma con ritardo sugli altri ed il processo è ben lungi dall'essere avvenuto.
Questo è un bene perché si tratta di una battaglia che può essere vinta essendo ancora in larga misura da combattere.

Il secondo nodo riguarda l'URSS dove, lungi da cercare una peculiare integrazione tra problemi applicativi, di didattica e di matematica pura, si va velocemente configurando un allineamento alla "matematica moderna". Se anche loro scoprono i "modelli" in cosa si distinguono dagli strutturalisti bourbakisti? E' vero che i manuali di matematica scritti dalla generazione degli Alexandrov, Gel'fand, Kolmogorov, Naimark ecc. hanno un taglio particolarmente "concreto" e mi pare ovvio pensare che ci siano sotto delle cause storiche. Ma quali sono? E soprattutto sono ancora valide oggi in URSS? La "concretezza", specie per un fisico, di questi manuali si regge su un pervicace ancoraggio della matematica sovietica alla problematica ottocentesca, che permane a causa di certe scelte di politica scientifica compiute negli anni post-rivoluzione. Queste scelte da allora sono cambiate; tendo a pensare, come suggerisce Kuhn, che col passare delle generazioni la "concretezza" sparirà.

Note e bibliografia

1) Cfr. Luis J. Prieto Rinascita del 27/5/1977 p.32 e E. Donini, T. Tonietti Quaderni Piacentini n. 62/63 (Aprile 1977), p. 131-2.

1 bis) I lettori di Sapere possono vedere all'interno del ciclo "Scienza e 2ª rivoluzione industriale" l'articolo di F. Marchetti: Sapere Maggio 1977, p. 30.

2) Solo recentemente in matematica si considerano insiemi dai contorni sfumati, ma li si chiama appunto per distinguerli "fuzzy" cioè sfocati ed indistinti.(Cfr. Chandler Davis: "materialist Mathematics" in "For Dirk Struik" R. Cohen, J. Stachel, M. Wartofsky (ed.).- Reidel 1974; p. 58 e nota 34.

3) Intuitivamente i reali sono un campo perché si possono sommare sottrarre moltiplicare e dividere (tranne che per lo zero) in modo commutativo ottenendo ancora un reale (2x3 = 3x2); ordinato, è definito tra due numeri se sono uguali o chi è il più grande od il più piccolo; archimedeo, dati due numeri esiste sempre un multiplo intero del più piccolo che supera il più grande; completo, particolari insiemi infiniti di numeri reali (detti successioni di Cauchy) ordinati secondo gli interi naturali "$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$" e tali che al crescere di "n" la differenza tra i termini "tende" a svanire "individuano" ancora un numero reale. I razionali non godono di questa ultima proprietà perché le successioni di Cauchy a termini razionali "convergono"in genere ai reali.

4) Due polinomi si possono sommare e sottrarre e moltiplicare, ma non in genere dividere, ottenendo ancora un polinomio. Capita loro come agli interi in quanto la divisione non dà sempre come risultato un polinomio, ma una coppia di polinomi perché c'è un resto. La formalizzazione in struttura di queste operazioni si chiama "anello". Quello dei polinomi su una indeterminata "x" si indica con $A[x]$.

5) Lucio Lombardo-Radice: "Istituzioni di Algebra astratta" Feltrinelli 1968.p. 444-5. La f (x) è un polinomio appartenente all'"anello" $A[x]$; se f(a) = 0 il numero 'a' si dice la radice dell'equazione algebrica.

6) J.Dieudonné : "Fondements de l'Analyse Moderne" Gauthiers - Villars 1969; F. G.Tricomi :" Lezioni di Analisi Matematica" CEDAM 1956.

7) "Corpo" è un "campo" non commutativo rispetto alla moltiplicazione, axb ≠ bxa.

8) H. Cartan:" Strutture algebriche" in "Strutture algebriche e strutture topologiche" A.A.VV. Feltrinelli 1963 p.13. Tutto il libro rappresenta una esposizione (di parte) compatta e completa del punto di vista "moderno". E' particolarmente accessibile perché si rivolge agli insegnanti di matematica delle scuole medie francesi. S. Eilenberg:"The algebraization of mathematics" in "The Mathematical Sciences"COSTRIMS (ed.) The MIT press 1969, p. 153.

9) J. Dieudonné: "Recent developments in Mathematics" American Mathematical Monthly v. 71 (1964) p.239.Cfr. H. Cartan:"Istruzione vuol dire soprattutto selezione ..." cit. in J. Fang: "Bourbaki" Paideia Press 1970 p.95.

10) A.D.Alexandrov,A.N. Kolmogorov,M.A. Lavrent'ev (ed.):"Le matematiche" Boringhieri 1974, p. 43. S.L. Sobolev:"Quelques aspects de l'enseignement des mathématiques en URSS" Actes du Congrès International des Mathématiciens Nizza 1970; Gauther-Villars 1971 Tome III,p.359-60. Cfr. A.G.Kuroš:"Corso di Algebra superiore" Editori Riuniti 1977, introduzione.

11) H.B.Griffiths,A.G.Howson:"Mathematics: society and curricula" Cambridge University Press 1974,p.163-5 e 109-11. Questo testo è assai interessante perché - nonostante sia strettamente riferito alla situazione scolastica inglese ed anglosassone - imposta le considerazioni che svolge sull'insegnamento della matematica in rapporto al contesto sociale (le sue esigenze, i suoi condizionamenti). Si considerano anche come essenziali i cambiamenti storici sui vari piani che lo determinano come i finanziamenti, le applicazioni, le istituzioni, le questioni filosofiche.

12) ivi p.141-2. Si veda anche H.B.Griffths:"Mathematical insight and mathematical curricula " in "Actes du Congrés International des Mathématiciens" 1970 cit. p. 341 e L. Hodgkin : Radical Science Journal n.4 (1976) p.47 (in traduzione su Sapere ......).

13) Griffiths, Howson cit. p. 137-40.

14) Ahlfors et al.:"On the mathematics curriculum of the high school" American Mathematical Monthly v.69(1962),p.189-93. Cfr. Griffiths, Howson cit.p.139.

15) Tutte le citazioni sono tratte da M.Kline: "Logic versus Pedagogy" American Mathematical Monthly v. 77(1970),p.273,76,78,80.

16) E. Spanier: The undergraduate program in mathematics" ivi p. 753-4. Cfr. B. E. Meserve: " Geometry as a gateway to mathematics" in "Developments in mathematical education" A.G.Howson (ed.) Cambridge University Press 1973,p.241-42; P.S. Jones: "The history of mathematical education" American Mathematical Monthly v. 74(1967), p. 54-5.

17) J.A.Easley Jr.: "Logic and heuristic in mathematics curriculum reform" in "Problems on the Philosophy of Mathematics" I. Lakatos(ed.) North-Holland 1972,p.221,25,26. In questo lavoro si trovano anche informazioni sullo "stato di guerra" nel '60 in USA attorno alla New Math riportandosi le posizioni più nette dei due schieramenti.

18) A. Weil: "L'avenir des mathématiques" in "Les grands courants de la

Pensée mathématique" F. Le Lionnais (ed.) Cahiers du Sud 1948, p. 318.

19) Fang. cit. p. 96.

20) Griffiths, Howson cit. p. 238 - 40.

21) Fang cit. p. 96; sottolineature mie.

22) ivi p. 95. Del bourbakismo si parlerà approfondendo il piano ideologico. Gli impazienti piuttosto che l'apologia di Fang vedano la critica di G. Israel: "Un aspetto ideologico della matematica contemporanea, il "bourbakismo" in "Matematica e Fisica; Struttura e Ideologia" E. Donini, A. Rossi, T. Tonietti (cur.) De Donato 1977, p. 35.

23) Impascience N.4/5 printemps 1976, p.11 -4 e 30. Cfr. Griffiths, Howson cit. p. 341.

24) René Thom: "Modern Mathematics : an educational and Philo sophic Error?" American Scientist v. 59 (1971), p. 695.

25) ivi p. 698 -99.Cfr. R. Thom: "Modern mathematics: does it ixist?" in Howson (ed.) cit. p. 194. Vedi anche C. Davis cit. p. 56-7.

26) G. Papy: "I gruppi" Feltrinelli.

27) H. Freudenthal: "What groups mean in mathematics and what they should mean in mathematical education" in Howson (ed.)cit. p.101.

28) Proceedings Coll. "How to teach mathematics so as to be useful" Utrecht 1967 in Educational Studies in Mathematics v.1 (1968) Reidel.

29) Ad esempio è completamente errata la posizione di B. D'Amore e M. L. M. Matteuzzi che piangono sull'assenza della logica delle nostre scuole: "Dal numero alla struttura" Zanichelli 1976, p. 206. Questo testo è un esempio perfetto di come non si debba insegnare la matematica e di come non si debba presentare la storia. Se quest'ultima dovesse riconoscersi nella caricatura che ci offrono gli autori sarebbe meglio per lei non mostrarsi. E' proprio una fortuna che la matematica non coincida con la logica ed il metodo deduttivo, come ci viene suggerito ad ogni passo dai luoghi comuni aleggianti sul libro.