CAPITOLO IV

I TEOREMI DI CONFRONTO

4.1. IL TEOREMA DELL'INDICE ED I TEOREMI DI RAUCH.

Abbiamo visto come la forma F_{**} ci dia indicazioni sul comportamento globale delle geodetiche e questo ci permetta, mediante il confronto con varietà "modello" di trarre conclusioni sulla struttura delle varietà. Ci proponiamo ora di approfondire questa "tecnica del confronto" dimostrando un Teorema dovuto a Rauch di estrema importanza per questo genere di questioni.

4.1.1. DEFINIZIONE. Sia $\gamma : [0,1] \to M$ una geodetica e $V,W \in \Gamma(\gamma)$. Definiamo indice di V e W la quantità

$$I(V,W) = \int_0^1 \{(V',W') - (R(W,\dot\gamma)V,\dot\gamma)\}dt$$

che scriveremo anche nella forma più familiare

$$I(V,W) = (V,W')(1) - (V,W')(0) - \int_0^1 (V,W'' + R(\dot\gamma,W)\dot\gamma)dt.$$

4.1.2. TEOREMA (Lemma fondamentale dell'indice). Supponiamo che non esistano in $[0,1]$ punti coniugati a $\gamma(0)$ lungo γ. Sia $W \in \Gamma(\gamma)$ con $W(0) = 0$ e $J \in \Gamma(\gamma)$ un campo di Jacobi tale che $J(0) = 0$ e $J(1) = W(1)$. Allora $I(J,J) \leq I(W,W)$ e $I(J,J) = I(W,W)$ se e solo se $J = W$.

Dimostrazione. Sia $\{V_i\}_{i=1,\dots,m}$ una base ortonormale in $T_{\gamma(1)}M$.

Poiché non vi sono punti coniugati possiamo estendere $\{V_i\}$ a campi di Jacobi lungo γ tali che $V_i(0) = 0$ e $\{V_i(t)\}$ siano indipendenti per $t \neq 0$. Poiché $V_i(0) = 0$, usando un'espressione locale per V_i intorno a $t = 0$ e la formula di Taylor si vede facilmente che i campi di vettori $A_i(t) = t^{-1}V_i(t)$ sono ben definiti per $0 \leq t \leq 1$ e generano inoltre $T_{\gamma(t)}M$ per ogni $t \in [0,1]$.

Si avrà allora $W(t) = \Sigma_i w_i(t)A_i(t) = \Sigma_i y_i(t)V_i(t)$ avendo posto $y_i(t) = t^{-1}w_i(t)$ (il che è ancora lecito come risulta da un controllo con la formula di Taylor per $t = 0$). Risulta allora:

$$W'(t) = \frac{D}{dt} W(t) = \Sigma_i y_i'(t)\ V_i(t) + \Sigma_i y_i(t)\ V_i'(t)$$

Se $X_1(t) = \Sigma_i y_i'(t)V_i(t)$ e $X_2(t) = \Sigma_i y_i(t)\ V_i'(t)$ si ha

$$||W'(t)||^2 = ||X_1(t)||^2 + ||X_2(t)||^2 + 2(X_1(t),\ X_2(t)).$$

Poiché ogni V_i è un campo di Jacobi risulta

$$-(R(\dot\gamma,W)\dot\gamma,W) = -\ \Sigma_i y_i\ (R(\dot\gamma,V_i)\ \dot\gamma,W) =$$

$$= \Sigma_i\ y_i\ (V_i'',W) = \Sigma_i y_i\left(\frac{d}{dt}(V_i',W) - (V_i',W')\right) =$$

$$= \frac{d}{dt} < X_2,W > -\ \Sigma_i y_i'(V_i',W) - (X_1,X_2) - ||\ X_2\ ||^2 .$$

Ne segue $I(W,W) = \int_0^1 \{\ ||W'||^2 + (R(\dot\gamma,W)\ \dot\gamma,W)\}\ dt =$

$$= \int_0^1 \{||X_1||^2 + (X_1,X_2) + \frac{d}{dt}(X_2,W) - \Sigma_i y_i'(V_i',W)\}\ dt.$$

Ma $(X_1,X_2) - \Sigma_i y_i'(V_i',W) = \Sigma_{i,j} y_i' y_j((V_i,V_j') - (V_i',V_j))$

e $\frac{d}{dt}((V_i,V_j') - (V_i',V_j)) = -(R(\dot\gamma,V_j)\dot\gamma,V_i)+(R(\dot\gamma,V_i)\dot\gamma,V_j) = 0$

quindi per ogni t $(V_i,V_j')(t) - (V_i',V_j)(t) = (V_i,V_j')(0)-(V_i',V_j)(0) = 0.$

In definitiva

$$I(W,W) = \int_0^1 \{||X_1||^2 + \frac{d}{dt}(X_2,W)\}dt = (X_2,W)(1) + \int_0^1 ||X_1||^2\, dt.$$

$I(J,J) = (J',J)(1).$

Posto $J(t) = \Sigma_i\, c_i V_i(t)$ con $c_i \in \mathbb{R}$ ed essendo $J(1) = W(1)$

quindi $y_i(1) = c_i$,

$$I(W,W) - I(J,J) = \int_0^1 ||X_1||^2\, dt \geq 0$$

e $I(W,W) = I(J,J)$ se e solo se $X_1(t) = 0$ per ogni t ossia

$y_i' \equiv 0$ e quindi $y_i(t) = y_i(1) = c_i$ per ogni t. ∎

Vediamo ora come il teorema dell'indice ci dia informazioni sulla "posizione" dei punti coniugati.

4.1.3. TEOREMA (di Rauch) Siano $M,\bar M$ varietà riemanniane, $p \in M$, $\bar p \in \bar M$. Sia $\gamma : [0,a] \to M$ una geodetica con $\gamma(0) = p$ e $\bar\gamma : [0,a] \to \bar M$ una geodetica uscente da $\bar p$ entrambe parametrizzate con la lunghezza d'arco nell'intervallo. $[0,a]$.

Siano inoltre $V \in \Gamma(\gamma)$ e $\bar{V} \in \Gamma(\bar{\gamma})$ campi di Jacobi tali che

$||V'(0)|| = ||\bar{V}'(0)||$ e $(\bar{V}', \dot{\bar{\gamma}})_{\bar{p}} = (V', \dot{\gamma})_p = 0$ e $V(0) = \bar{V}(0) = 0$.

Supponiamo infine che per ogni $t \in [0,a]$ e per ogni 2-piano $P \subseteq T_{\gamma(t)}M$ contenente $\dot{\gamma}(t)$ e $\bar{P} \subseteq T_{\bar{\gamma}(t)}\bar{M}$ contenente $\dot{\bar{\gamma}}(t)$ si abbia $K_M(P) = K_{\bar{M}}(\bar{P})$ ($K_M, K_{\bar{M}}$ denotano le curvature sezionali rispettivamente in M ed $\bar{M}$).

Allora se per ogni $t \in [0,a]$ $\bar{\gamma}(t)$ non è coniugato a $\bar{\gamma}(0)$ lungo γ, risulta $||V(t)|| \geq ||\bar{V}(t)||$ per ogni t.

Dimostrazione. Posto $f(t) = ||V(t)||^2$ e $g(t) = ||\bar{V}(t)||^2$ risulta

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f''(t)}{g''(t)} = 1.$$ Basterà dunque provare che la funzione $\frac{f(t)}{g(t)}$, ove è definita, è non decrescente, cioé $\frac{d}{dt}\frac{f}{g} \geq 0$

o equivalentemente $\frac{f'(t)}{f(t)} \geq \frac{g'(t)}{g(t)}$ per ogni t.

Osserviamo che se $g(t_o) = 0$ la tesi è banale per $t = t_o$, mentre se $f(t_o) = 0$ e se in un intorno sinistro di t_o risulta $f(t) \geq g(t)$ la continuità di f e g assicura che $f(t_o) \geq g(t_o)$.

Fissato $t_o \in [0,a]$ con $f(t_o) \neq 0$ e $g(t_o) \neq 0$ poniamo

$X = \dfrac{V}{f(t_o)^{\frac{1}{2}}}$, $\overline{X} = \dfrac{V}{g(t_o)^{\frac{1}{2}}}$. X e $\overline{X}$ sono dunque campi di

Jacobi nulli in 0 e tali che $||X(t_o)|| = ||\overline{X}(t_o)|| = 1$.

Ora

$$\frac{f'(t_o)}{f(t_o)} = 2\,\frac{(V,V')(t_o)}{(V,V)(t_o)} = 2(X,X')(t_o) = 2\int_0^{t_o} \frac{d}{dt}(X,X')dt =$$

$$= 2\int_0^{t_o} \{(X',X') + (X'',X)\}dt =$$

$$= 2\int_0^{t_o}\{||X'||^2 - (R(\dot\gamma,X)\dot\gamma,X)\}dt = 2\int_0^{t_o}\{||X'||^2 - K_M(\dot\gamma,X)\}\,dt.$$

Sia $\{E_i(t)\}$ una base ortonormale parallela lungo γ tale che

$E_1(t_o) = X(t_o)$ e analogamente $\{\overline{E}_i\}$ una base ortonormale parallela

lungo $\overline{\gamma}$ tale che $\overline{E}_1(t_o) = \overline{X}(t_o)$.

Esprimiamo X e $\overline{X}$ in queste basi: $X = \Sigma_i X_i E_i$ $\overline{X} = \Sigma_i \overline{X}_i \overline{E}_i$ e po-

niamo $\overline{X}_N = \Sigma_i X_i \overline{E}_i$.

Allora $||\overline{X}_N|| = ||X||$ e $||\overline{X}_N'|| = ||X'||$. Sia h dunque ricordando

l'ipotesi e il teorema 4.1.2.

$$\frac{f'(t_o)}{f(t_o)} \geq 2 \int_o^{t_o} \{ ||X'||^2 - K_{\bar{M}}(\dot{\bar{\gamma}}, \bar{X}_N)\} dt = 2 \int_o^{t_o} \{ ||\bar{X}_N'||^2 - K_{\bar{M}}(\dot{\bar{\gamma}}, \bar{X}_N)\} dt \geq$$

$$\geq 2 \int_o^{t_o} \{ ||\bar{X}'||^2 - K_M(\dot{\bar{\gamma}}, \bar{X})\} dt = \frac{g'(t_o)}{g(t_o)} . \blacksquare$$

4.1.4. <u>COROLLARIO</u>. I) <u>Se</u> $K_M \leq K_o \in \mathbb{R}$ <u>allora per ogni geodetica</u> γ <u>la distanza tra un punto ed il primo punto coniugato ad esso</u> lungo γ è maggiore o uguale a $\frac{\pi}{\sqrt{K_o}}$ (*).

II) Se $K_M \geq H_o \in \mathbb{R}$ la suddetta distanza è minore o uguale a $\frac{\pi}{\sqrt{H_o}}$.

<u>Dimostrazione</u>. Basta applicare il teorema di Rauch ad M e ad $\bar{M} = S^m_{K_o}$ ove $S^m_{K_o}$ è la sfera in $\mathbb{R}^{m+1}$ di raggio $K_o^{-\frac{1}{2}}$ (e quindi curvatura costante K_o). $\blacksquare$

4.1.5. <u>COROLLARIO</u>. <u>Sia</u> $\Phi : T_pM \to T_{\bar{p}}\bar{M}$ <u>un'isometria,</u> $X \in T_pM$ <u>e</u>

(*) Se $K_o \leq 0$ tale distanza è infinita nel senso che non esiste alcuna coppia di punti coniugati lungo una geodetica.

$Y \in T_X(T_pM)$.

<u>Supponiamo che per ogni</u> $t_o \in [0,1]$, $\exp_{\bar{p}}(t_o\Phi(X))$ <u>non sia coniugato</u>

<u>a</u> $\bar{p}$ <u>lungo la geodetica</u> $t \mapsto \exp_{\bar{p}}(t\,\Phi(X))$ <u>e che le curvature sezio-</u>

<u>nali di</u> M <u>e</u> $\bar{M}$ <u>si confrontino come in</u> 4.1.3.. <u>Allora</u>

$||(d \exp_p)_X (Y)|| \geq ||(d \exp_{\bar{p}})_{\Phi(X)} (d\Phi_X (Y))||$.

<u>Dimostrazione</u>. Segue dal teorema di Rauch tenendo presenti le proprietà fondamentali dei campi di Jacobi viste in precedenza.■

4.2. IL TEOREMA DELLE SFERE.

Vogliamo dare ora un'applicazione del Teorema di Rauch che, oltre ad essere un importante risultato per sé, illustra molto efficacemente la potenza delle tecniche di confronto. Seguiremo qui la dimostrazione di Klingemberg [16] che mette particolarmente in evidenza la relazione tra la struttura del luogo coniugato e la topologia della varietà.

4.2.1. DEFINIZIONE. Diremo che M soddisfa l'ipotesi (Σ, k) in $p \in M$ se lungo ogni raggio $\{tX|\ t \geq 0\}$ con $X \in T_pM$ non vi sono punti coniugati nell'intervallo $\{tX|\ 0 < t < \pi\}$ e vi sono almeno k punti coniugati (contati con la propria molteplicità) nell'intervallo $\{tX|\pi \leq t < 2\pi\}$.

Almeno nel caso $k = m - 1$ la condizione (Σ,k) può essere interpretata dicendo che il primo luogo coniugato è "simile" a quello di una sfera.

4.2.2. LEMMA. Supponiamo che $\exp_{p|\ \{X|\ ||X||<\pi\}}$ non abbia punti critici.

Sia $q \in M$ e c_o,c_1 geodetiche in M congiungenti p e q, $c_o \neq c_1$, e tali che esiste un'omotopia $H : [\ 0,1\ ] \to \Omega(p,q)$ tale che $H(0)=c_o$, $H(1)=c_1$ e $L(H(t)) \leq L(c_1)$.

Allora

$$L(c_o) + L(c_1) \geq 2\pi$$

<u>Dimostrazione</u>. Si può assumere $L(c_o) < \pi$ altrimenti il lemma è banale. Possiamo allora sollevare c_o in T_pM ottenendo un segmento

$\tilde{H}(0) = \{tY_p \mid 0 \leq t \leq 1\}$.

Per la continuità di H possiamo sollevare $H(t)$ per piccoli valori di t. Ma questo non è possibile per tutti i t di $[0,1]$ poiché altrimenti per $t = 1$ otterremo un secondo segmento avente agli stessi estremi di $\tilde{H}(0)$ e questo è impossibile poiché $c_o \neq c_1$. Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $t_o \in [0,1)$ tale che $H(t_o)$ non

può essere sollevato in $\{X \mid \|X\| < \pi - \varepsilon\}$.

Per il Lemma di Gauss si ha dunque

$$L(C_o) + L(H(t_o)) \geq 2\pi - 2\varepsilon$$

e quindi la conclusione poiché

$$L(H(t_o)) \leq L(c_1). \blacksquare$$

4.2.3. <u>LEMMA</u>. <u>Sia</u> M <u>una varietà semplicemente connessa e verificante</u> (Σ,k) <u>in</u> p <u>con</u> $k \geq 2$. <u>Allora</u> M <u>è compatta e</u>

a) $\forall q \in M$ <u>vicino a</u> p <u>e non coniugato a</u> p <u>lungo alcuna geodetica esiste un'unica geodetica minimale congiungente</u> p <u>e</u> q <u>e tutte le altre geodetiche hanno lunghezza maggiore o uguale a</u> $2\pi - d(p,q)$.

b) <u>Ogni geodetica non costante da</u> p <u>a</u> q <u>ha lunghezza maggiore o uguale a</u> 2π <u>(quindi indice</u>(*) <u>non inferiore</u> a k) <u>e la distanza da</u> p

(*) *Per indice di una geodetica* $\gamma:[0,\ell] \to M$ *si intende il numero di* punti coniugati a $\gamma(0)$ lungo γ nell'intervallo $[0,\ell]$ (contati con la propria molteplicità).

<u>al suo luogo di taglio è maggiore o uguale a</u> π.

<u>Dimostrazione</u>. M è chiaramente compatta per il corollario 2.3.6. ed inoltre esiste $\delta > 0$ tale che ogni geodetica di lunghezza $\geq 2\pi - \delta$ ha indice $\geq k$.

Sia $d(p,q) < \delta$, c_o la geodetica minimale congiungente p e q (certamente unica se δ è piccolo) e c_1 un'altra geodetica qualsiasi da p a q. Poiché M è semplicemente connessa esiste un'omotopia $H : [0,1] \to \Omega(p,q)$ con $H(i) = c_i$. $i = 0,1$.

In [21] Milnor descrive la struttura di CW complesso di $\Omega(p,q)$ in termini della funzione energia(*). Da quella discussione segue che una curva $H(t_o)$ di lunghezza massimale tra le $H(t)$ è una geodetica ed ha indice 1 se $H(t_o) \neq c_1$.

D'altra parte se $H(t_o) \neq c_1$ per il lemma 4.2.2. si ha

$L(H(t_o)) \geq 2\pi - L(c_o) \geq 2\pi - \delta$ per cui $H(t_o)$ dovrebbe avere indice

---

(*) Enunciamo il teorema di struttura per $\Omega(p,q)$ che servirà anche per dimostrare il teorema delle sfere.

<u>Siano</u> $p,q \in M$ <u>non coniugati lungo alcuna geodetica. Allora</u> $\Omega(p,q)$ <u>ha una struttura di</u> CW-complesso c<u>on una cella in dimensione</u> K <u>per ogni geodetica in</u> $\Omega(p,q)$ <u>di indice</u> K.

Notiamo inoltre che $\Omega(p,q)$ è omeomorfo a $C^\circ(p,q)$(vedi ancora Milnor [21]) $\forall p,q \in M$ e che la fibrazione dei cammini puntata in p

$$\Omega(p,q) \to PM \to M$$

è una fibrazione nel senso di Serre per cui tutte le fibre $\Omega(p,q)$ hanno lo stesso tipo di omotopia.(per questo e tutti gli altri argomenti di topologia algebrica si veda Spanier [25]).

$k \geq 2$. Quindi $H(t_o) = c_1$ ed il lemma 4.2.2. applicato ancora completa la dimostrazione di a). Osserviamo che per la proposizione 2.2.7., la condizione (Σ,k) assicura l'ipotesi del lemma 4.2.2..

La prima asserzione del punto b) segue non appena si noti che se un cappio geodetico non banale $c \in \Omega(p,q)$ ha lunghezza $2\pi - 2d < 2\pi$ esiste $q = c(t_o)$ vicino a p, quanto basta perché p e q non siano coniugati e la geodetica c tra essi abbia lunghezza pari alla loro distanza cioé sia una geodetica non minimale da p a q di lunghezza $< 2\pi - d(p,q)$ che è in contraddizione con a).

La seconda affermazione si ha non appena si noti che in caso contrario il punto del luogo di taglio a distanza minima da p non sarebbe coniugato a p per l'ipotesi (Σ,k) e quindi per il Teorema 2.3.1. esisterebbe un cappio geodetico non banale di lunghezza $< 2\pi$.■

4.2.4. <u>TEOREMA</u>. <u>Supponiamo che</u> M <u>sia semplicemente connessa e verifichi la</u> (Σ, k) <u>in</u> p <u>per</u> $k \geq 2$. <u>Allora</u> $\pi_i(M) = 0$ <u>per</u> $1 \leq i \leq k$.

<u>Dimostrazione</u>. Dal lemma 4.2.3. e dal teorema citato sulla struttura di $\Omega(p,q)$ segue che $\Omega(p,q)$ è un CW-complesso con una 0-cella e celle di dimensione $\geq k$.

Ne segue dunque che $\pi_i(\Omega(p,q)) = 0 \quad 0 \leq i \leq k - 1$.

Ma $\pi_i(\Omega(p,q)) \cong \pi_{i+1}(M)$ come segue immediatamente dalla successione esatta della fibrazione dei cammini (PM è contraibile !)

$\Omega(p,q) \to PM \to M$ e quindi la tesi.■

4.2.5. COROLLARIO. Nelle stesse ipotesi del teorema 4.2.4. se $k \geq \frac{m-1}{2}$ e $m \neq 3,4$ M è omeomorfa a S^m.

Dimostrazione. $\pi_i(M) = 0$ per $i \leq \frac{m-1}{2}$ per il teorema precedente. In omologia si ha allora $H_i(M,\mathbb{Z}) = 0$ per $i \leq \frac{m-1}{2}$ e quindi per dualità (M semplicemente connessa $\Longrightarrow$ M orientabile) $H_i(M) = 0$ per $i < m$. Definiamo l'applicazione "pizzico"

$$P : M \to S^m$$

nel modo seguente

Sia D^m un disco immerso in M e $\bar{q}$ un punto di S^m.

Definiamo $P_{|\mathring{D}^m}$ come un diffeomorfismo di $\mathring{D}^m$ su $S^m - \{\bar{q}\}$ e $P(M - \mathring{D}^m) = \bar{q}$.

E' facile vedere che P induce un isomorfismo in omologia e quindi per il teorema di Whitehead è un'equivalenza omotopica. La tesi segue dal teorema di Smale(*). ■

4.2.6. COROLLARIO. (Teorema delle sfere). Sia M una varietà semplicemente connessa la cui curvatura sezionale prende valori solo nell'intervallo $(\frac{1}{4}, 1]$.

Allora se $M \neq 3,4$ M è omeomorfa ad S^m (**).

(*) Congettura generalizzata di Poincaré (dimostrata per $m \neq 3,4$ da Smale): Se M^m ha il tipo di omotopia di S^m allora è omeomorfa a S^m (vedi Smale [24]).

(**) La nostra dimostrazione richiede $n \neq 3,4$ ma il teorema è valido senza questa ipotesi (vedi Berger [3]).

Dimostrazione. Segue dai corollari 4.1.4. e 4.1.5. che M soddisfa $(\Sigma,m-1)$ in ogni punto e quindi si ha la tesi per il corollario 4.2.5. ∎

Vogliamo concludere questo paragrafo con una rapido cenno ad una generalizzazione della condizione (Σ,k).

Siano $a,b,c \in \mathbb{R}$ tali che $1<a<b<c$ $a\leq 2, 2b+1\leq 2a+c$.

4.2.7. DEFINIZIONE. Diremo che M soddisfa la condizione (π,k,a,b,c) in $p\in M$ se lungo ogni raggio $\{tX|t \geq 0\}$, con $X \in T_pM$, non vi sono punti coniugati in $\{tX|0 \leq t < \pi\}$, ve ne sono k in $\{tX|\pi \leq t < a\pi\}$ ($k \geq 1$ dispari), nessuno in $\{tX|a\pi \leq t < b\pi\}$ e $\lambda > 2k + 1$ in $\{tX|b\pi \leq t < c\pi\}$.

Indichiamo con $P^m(k)$ lo spazio proiettivo complesso ($k = 1$), quaternionale ($k = 3$) o il piano di Caley ($k = 7$). Allora è facile vedere che $P^m(k)$ soddisfa $(\pi,k, \frac{5}{4}, 2, \frac{5}{2})$.

Così come (Σ,k) esprimeva una similarità della struttura del luogo coniugato di M con quello di S^m, (π,k,a,b,c) esprime una similarità con il luogo coniugato di $P^m(k)$.

L'analogo del Teorema 4.2.4. per la condizione (π,k,a,b,c) si enuncia nel modo seguente:

4.2.8. TEOREMA. Sia M semplicemente connessa e soddisfi la (π,k,a,b,c) rispetto a $p \in M$ e se $k = 1$ supponiamo esista un punto $q \in M$ con $d(p,q) = \pi$. Allora $\Omega(p,q)$ ha il tipo di omotopia di un CW-complesso consistente di una sfera k-dimensionale S^k e celle di dimensione non inferiore a $k + \lambda$.

In particolare

$$\pi_i(M) = 0 \qquad 1 \leq i \leq k$$

$$\pi_j(M) = \pi_{j-1}(S^k) \qquad k+1 \leq j \leq k+\lambda$$

Inoltre se $k + \lambda \geq b$ l'anello di coomologia intera è un anello polimoniale troncato generato da un elemento in $H^{k+1}(M)$.(in particolare $k \in \{1,3,7,n-1\}$; vedi Adams [1]).

4.3. VARIETA' CON LUOGO CONIUGATO SFERICO.

Vogliamo ora studiare varietà soddisfacenti un'ipotesi più forte della (Σ,k) o (π,k,a,b,c) . I risultati che otterremo sono per la maggior parte contenuti nel precedente paragrafo ma gli argomenti sono particolarmente interessanti.

Sia M una varietà riemanniana n-dimensionale e $p \in M$. Ricordiamo (paragrafo 2.3) che $C^1(p)$ è il luogo dei punti $X \in T_pM$ tale che X è coniugato rispetto a p e tX non è coniugato rispetto a p $\forall t < 1$.

4.3.1. DEFINIZIONE. Diremo che M è di tipo $A(\lambda,L)$ in p se e solo se $C^1(p) = \{X \in T_pM \mid ||X|| = L\}$ e ogni X di $C^1(p)$ ha ordine λ .

Esempi	1) S^m	è di tipo	$A(m-1,\pi)$	$\forall p \in S^m$
	2) $\mathbb{R}P^m$	" " "	$A(m-1,\pi)$	$\forall p \in \mathbb{R}P^m$
	3) $\mathbb{C}P^m$	" " "	$A(1,\pi)$	$\forall p \in \mathbb{C}P^m$
	4) $\mathbb{Q}P^m$	" " "	$A(3,\pi)$	$\forall p \in \mathbb{Q}P^m$
	5) $\mathbb{C}aP^2$	" " "	$A(7,\pi)$	$\forall p \in \mathbb{C}aP^2$

Vogliamo dimostrare che in un certo senso queste sono tutte e sole le varietà di tipo $A(\lambda,L)$.

Sia allora M una varietà di tipo $A(\lambda,L)$ in p.

$C^1(p) = \{X|\ ||X|| = L\}$ e $\dim \operatorname{Ker}(d \exp_p)_X = \lambda \quad \forall X \in C^1(p)$ allora

$C^1(p)$ è una sfera di raggio L e per il lemma di Gauss

$\theta_X = \operatorname{Ker}(d \exp_p)_X \subseteq T_X C^1(p) \qquad \forall X \in C^1(p).\quad \eta = \{\theta_X | X = C^1(p)\}$

definisce allora una distribuzione λ-dimensionale su $C^1(p)$ che è ovviamente integrabile in quanto per ogni g in $F(M)$ è

$(d \exp_p)_X([V,W])(g) = V((d \exp_p)_X(W)(g)) - W((d \exp_p)_X(V)(g)) = 0$

se $V,W \in \theta_X$. Sia I_X la varietà integrale massimale passante per X.

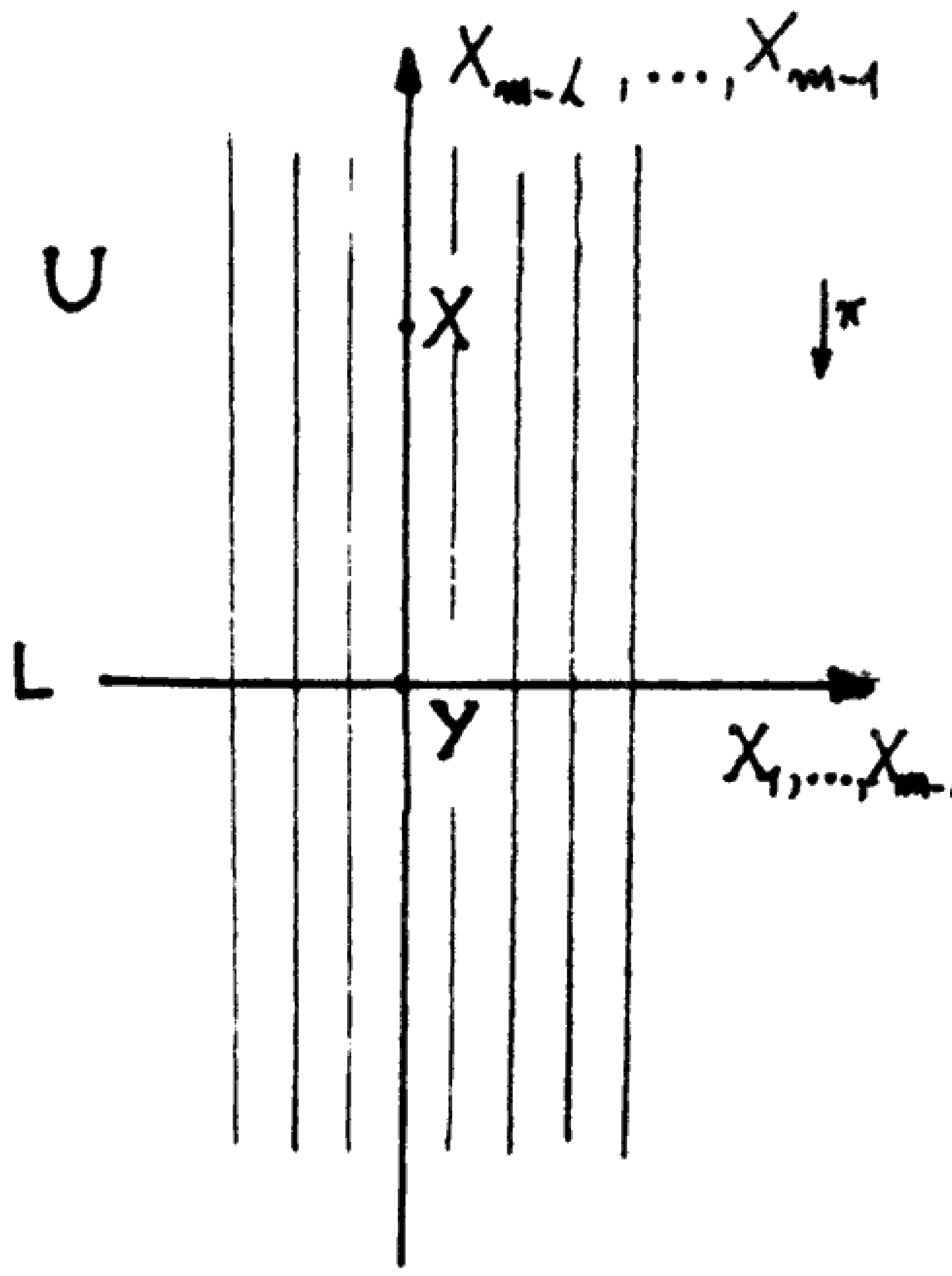
4.3.2. <u>LEMMA</u>. I_X <u>è diffeomorfa ad</u> S^λ.

<u>Dimostrazione</u>. Cominciamo col notare che I_X è un sottospazio topologico di $C^1(p)$.

Infatti dato $Y \in I_X$ scegliamo un sistema di coordinate $\{X_1,..,X_{m-1}\}$ in $C^1(p)$ intorno a Y tale che le varietà integrali di η siano le sottovarietà X_1 = costante, ... , $X_{m-1-\lambda}$ = costante. Sia T il sottoinsieme del dominio coordinato scelto, U, dato dalle condizioni

$x_{m-\lambda} = \ldots = x_{m-1} = 0.$

Poiché $(d \exp_p)_Y$ è non singolare su T avremo che $\exp_p$ è localmente iniettiva su T; ne segue che I_Y ha la topologia relativa ed è dunque una sottovarietà chiusa e quindi compatta di $C^1(p)$.



Sia $X \in C^1(p)$ e $q = \exp_p X$.

Notiamo che se $Y \in I_X$ e $||X-Y|| < \delta$

$$(d\exp_p)_X\, T_X C^1(p) = (d\exp_p)_Y\, T_Y C^1(p).$$

Infatti usando le notazioni poste sopra e indicando con $\pi : U \to L$ la proiezione naturale risulta $\exp_p = \exp_p \circ \pi$ su U e quindi $(d\exp_p)_X(T_X C^1(p)) =$

$$= (d\exp_p)_{\pi(X)} \circ \pi(T_X C^1(p)) =$$

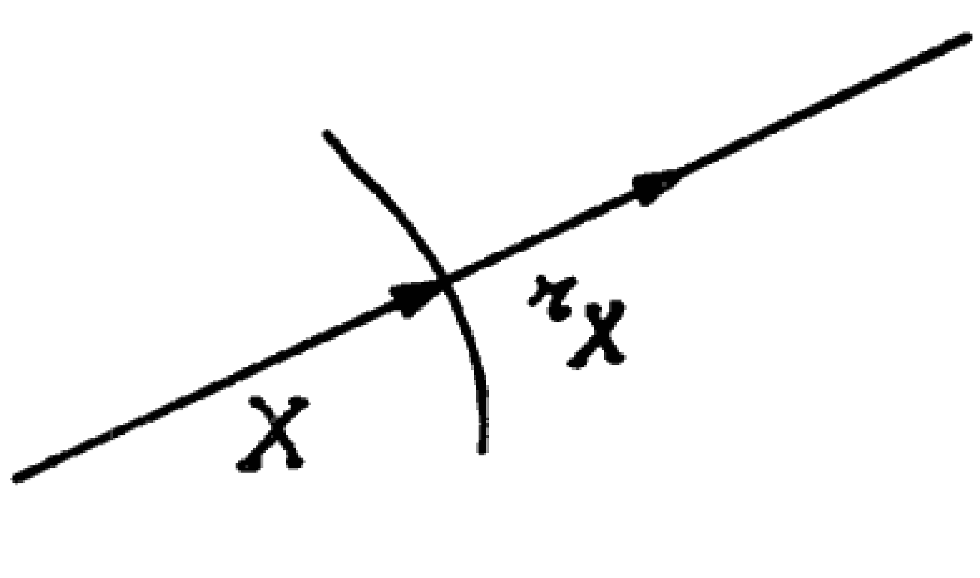
$$= (d\exp_p)_Y(T_Y C^1(p)).$$

Poiché inoltre I_X è connessa la relazione vale $\forall Y \in I_X$. Poniamo allora

$$S_q = (d\exp_p)_X\,(T_X C^1(p)) \subseteq T_q M$$

e

$$\Sigma_q = \{W \in T_q M \mid W \perp S_q,\ ||W|| = 1\}.$$



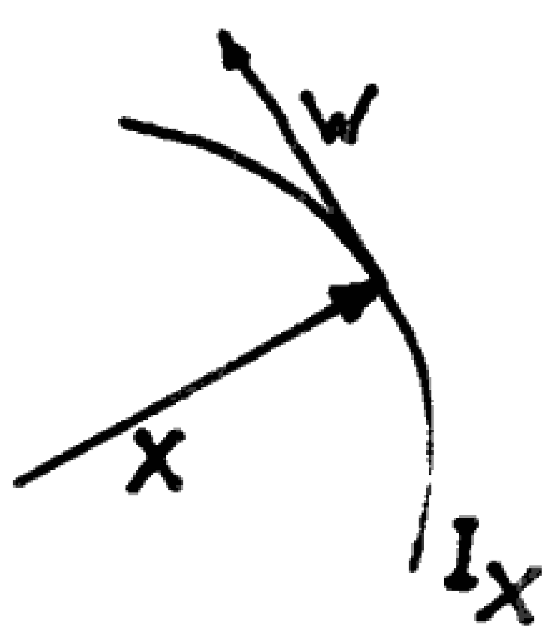
Sia, per $X \in C^1(p)$, r_X il vettore unitario in $T_X(T_p M)$ tangente in X al raggio $\{tX \mid t \geq 0\}$ e definiamo

$$\alpha : I_X \to \Sigma_q$$

ponendo $\alpha(Y) = d\, \exp_p)_Y (r_X)$. Chiaramente α è una applicazione differenziabile di I_X in Σ_q.

Proviamo che α è un diffeomorfismo.

α è iniettiva. Infatti se $\alpha(Y_1) = \alpha(Y_2)$ avremo geodetiche, $t \mapsto \exp_p((1-t)\, Y_1)$ e $t \mapsto \exp_p((1-t)Y_2)$ uscenti da q con lo stesso vettore tangente e quindi devono coincidere; pertanto $Y_1 = Y_2$.



α è non singolare.

Sia $W \in T_X I_X$ e γ una curva differenziabile in I_X tale che $\gamma(0) = X$ e $\dot\gamma(0) = W$

Definiamo $\beta : \mathbb{R}^2 \to T_p M$ ponendo, se (u,v) sono le coordinate correnti in $\mathbb{R}^2$

$$\beta(u,v) = \frac{1}{L}\, u(\gamma(v)).$$

Sia
$$\omega = \exp_p \circ \beta$$

$$W_1 = \frac{\partial\omega}{\partial u} = (d\,\omega)_{(u,v)} \left(\frac{\partial}{\partial u}\right) ; \quad W_2 = \frac{\partial\omega}{\partial v} = (d\,\omega)_{(u,v)} \left(\frac{\partial}{\partial v}\right).$$

Ora W_2 è un campo di Jacobi lungo la geodetica $\omega(u,0)$, $t \mapsto \exp_p tX$, e si annulla in q (poiché $W_2(1,0) = W \in \operatorname{Ker}(d\, \exp_p)_X$) e quindi la sua derivata lungo il vettore velocità $\nabla_{W_1} W_2$ è non nulla in q essendo $W_2(t) \neq 0$ per qualche t. Allora

$$(d\alpha)_X(W) = (d\alpha)_X(\dot{\gamma}(0)) = \left(\frac{d\alpha\cdot\gamma}{dt}\right)(0) = \frac{d}{dt}\left(d\,\exp_{\gamma(t)} r_{\gamma(t)}\right)(0) =$$

$$= (\nabla_{W_2} W_1)(0) = (\nabla_{W_1} W_2)(0) \neq 0.$$

Poiché Σ_q e I_X hanno la stessa dimensione λ, α è aperta e $\alpha(I_x)$ è un aperto. Ma I_x è un compatto per cui $\alpha(I_x)$ è un compatto e quindi chiuso in Σ_q. Dall'ipotesi di connessione segue allora $\alpha(I_X) = \Sigma_q$.

Inoltre essendo I_X compatta e Σ_q di Hansdorff α è un diffeomorfismo ed infine poiché α è non singolare, quindi localmente invertibile in modo differenziabile, α^{-1} è ben definita e differenziabile.

4.3.3. <u>COROLLARIO</u>. <u>Ciascuna geodetica</u> γ <u>uscente da</u> p <u>ritorna in</u> p <u>al tempo</u> $2L$. <u>Inoltre l'intero luogo coniugato consiste di sfere concentriche di raggio</u> $L, 2L, 3L$ .... <u>e ordine</u> $\lambda, n-1, \lambda, n-1, \ldots$ ... rispettivamente.

<u>Dimostrazione.</u> Infatti, con le stesse notazioni del lemma 4.3.2., essendo α suriettiva se $\dot{\gamma}(L) \in \mathrm{Im}(\alpha)$ anche $-\dot{\gamma}(L) \in \mathrm{Im}(\alpha)$ e quindi esiste un vettore Y di T_pM tale che $||Y|| = L$ e $\frac{d}{dt}(\exp_p tY)_{t=1} =$

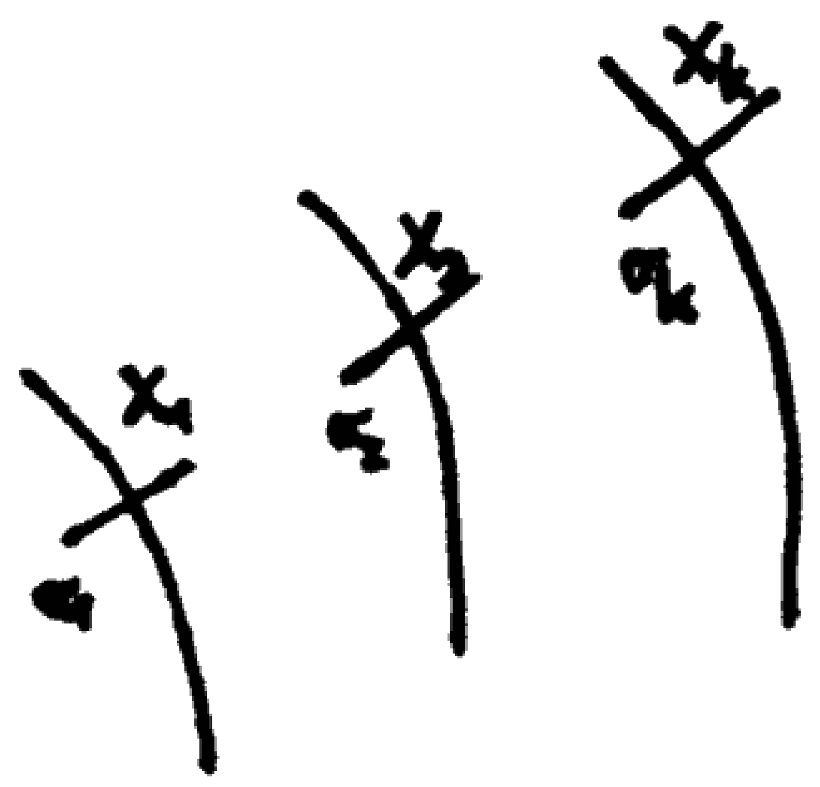
$= -\dot{\gamma}(L)$.

Ovviamente deve aversi $\gamma(L+t)=\exp_p(L-t)Y$ da cui $\gamma(2L) = \exp_p(0) = p$. ■

4.3.4. <u>LEMMA</u>. <u>Sia</u> $I_X \neq I_Y$ <u>allora</u> $\exp_p(I_X) \neq \exp_p(I_Y)$.

<u>Dimostrazione</u>. Poiché $\exp_p$ è localmente iniettiva sulle varietà trasverse alle varietà integrali di η esiste al più un numero finito di dette varietà integrali massimali nell'immagine inversa di un punto q e siano $\{I_{X_i}\}_{i=1,\dots,k}$.

Esistono allora sottovarietà $\sigma_1,\dots,\sigma_k$ su $C^1(p)$, trasverse rispettivamente a $I_{X_1},\dots I_{X_k}$ ed abbastanza piccole nel senso che per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, gli insiemi



$$W_i = \{tY \mid Y \in J_i,\ \ 1-\varepsilon < t \leq 1\}$$

sono disgiunti, essendo J_i l'unione di tutte le varietà integrali massimali di η che intersecano σ_i.

Proviamo intanto che $\bigcup_{i=1}^{k} \exp_p(W_i)$ è un intorno di q.

Se non fosse vero esisterebbe una successione p_j convergente a q con $p_j \notin \bigcup_{i=1}^{k} \exp_p(W_i)$.

Per ogni j troveremo allora $Y_i \in B = \{X \in T_pM \mid ||X|| \leq L\}$ tale che

$\exp_p(Y_j) = p_j$ ed essendo B compatto ci sarebbe una sottosuccessione convergente Y_{j_i} convergente a $Y \in B$.

Per continuità $\exp_p(Y) = \lim \exp_p(Y_{j_i}) = \lim p_{j_i} = q$ e quindi

$Y \in \bigcup_{i=1}^{k} I_{X_i}$; ma dunque per j_i abbastanza grande $Y_{j_i} \in W_k$

per qualche k quindi $p_{j_i} = \exp_p(Y_{j_i}) \in \bigcup_{i=1}^{k} \exp_p(W_i)$, il che è assurdo.

Sia Ora V un intorno aperto di q, $V \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \exp_p(W_i)$.

Localmente $K = \exp_p(C^1(p))$ è una sottovarietà di dimensione $n - \lambda - 1$ e quindi, a patto di prendere V piccolo, $V - K$ è connesso.

D'altra parte $V - K$ è ricoperto dagli aperti $\exp_p(W_i - W_i \cap C^1(p))$ e quindi uno al più di detti aperti interseca $V - K$ non banalmente, diciamo $\exp_p(W_1 - W_1 \cap C^1(p))$.

Ora se $Y \in I_{X_j}$, $j \neq 1$ risulta $\exp_p(tY) \notin V-K$ $\forall t \in (1-\varepsilon, 1)$.

Ma $Y = \lim_{t \to 1} tY$ e supposto $\exp_p(Y) = q$ deve esistere una successione in $\exp_p(W_j - W_j \cap C^1(p))$ convergente a q. Questo è impossibile perché in ogni intorno di q abbastanza piccolo cadono solo punti di

K e di $\exp_p(W_1)$ e nessun punto di $\exp_p(W_1 - W_j \cap C'(p))$ se $j \neq 1$. ∎

4.3.5. LEMMA. *Sia* M *semplicemente connessa e di tipo* $A(L,\lambda)$ *in* p. *Allora* $C^1(p)$ *contiene il luogo dei punti di taglio.*

Dimostrazione. Definiamo su $C^1(p)$ la seguente relazione di equivalenza $X \sim Y \Leftrightarrow X \in I_Y$. Sia $B = \{X \in T_pM / ||X|| \leq L\}$ e definiamo in B la relazione di equivalenza $X \approx Y$ $X,Y \in \partial B$ e $X \sim Y$. Allora $B/\approx$ ha un'unica struttura di varietà differenziabile tale che la proiezione $P : B \to B/\approx$ è differenziabile.
L'esponenziale induce un'applicazione $E : B/\approx \to M$ tale che il seguente diagramma sia commutativo.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "P"] \arrow[dr, "\exp_p|B"'] & & B/\approx \\ & M \arrow[ur, "E"'] & \end{tikzcd}$$

Senza entrare in dettagli notiamo che E è un diffeomorfismo locale e quindi, essendo $B/\approx$ una varietà compatta, E è un rivestimento. Ma M è semplicemente connessa e quindi E è globalmente biunivoca e non ci possono essere punti di taglio in $B - \partial B$ altrimenti esisterebbero due geodetiche minimali congiungenti p con il punto del luogo di taglio più vicino a p e quindi due vettori distinti in $B - \partial B$ mandati nello stesso punto dall'applicazione esponenziale, il che è contro l'invertibilità di E. Dall'osservazione 1) del paragrafo 1.5 segue la tesi. ∎

4.3.6. TEOREMA. *Se* M *è semplicemente connessa e di tipo* $A(m-1,L)$

in p allora M è omeomorfa ad S^m.

Dimostrazione. Supponiamo $L = \pi$ e sia $q = \exp_p(C^1(p))$ il punto "diametralmente opposto a p". Allora M è di tipo $A(n-1,\pi)$ in q.

$M = \exp_p(\{X \in T_pM / ||X|| \leq \pi/2\})$ $\exp_q(\{X \in T_qM / ||X|| \leq \pi/2\})$ ed è quindi unione di due dischi attaccati mediante un diffeomorfismo delle frontiere ottenuto restringendo all'insieme $\{X \in T_qM / ||X|| = \pi/2\}$ la funzione composta $\exp_p^{-1} \circ \exp_p$, quindi si ha la tesi.∎

Notiamo che in generale M non è diffeomorfa ad S^m. Warner ha dimostrato in [30] che ogni varietà omeomorfa ad S^m può essere dotata di una metrica rispetto alla quale M è di tipo $A(m-1,\pi)$ in qualche punto.

Se M è di tipo $A(m-1,\pi)$ in ogni punto allora è diffeomorfa ad una sfera in quanto si può dimostrare che il diffeomorfismo di attaccamento usato nella dimostrazione del teorema precedente si estende ad un diffeomorfismo del disco (si veda Allamingeon [2]).

In quest'ultimo caso (M di tipo $A(m-1,\pi)$ in ogni punto) non è noto se M è addirittura isometrica ad S^m; per il caso $m=2$ la risposta è affermativa (si veda Green [12]) ma in generale il problema presenta notevoli difficoltà.

Un'altra risposta parziale, dovuta a Berger, è la seguente: se la curvatura sezionale è minore o uguale a uno e se M è di tipo

$A(m-1,L\ )$ per qualche p allora M è isometrica ad $S^{m(*)}$.

Dimostriamo ora un teorema che classifica le varietà di tipo $A(\lambda,L)$.

4.3.7. TEOREMA. Sia M una varietà semplicemente connessa di tipo $A(\lambda,L)$ in $p \in M$. Allora $\lambda \in \{1,3,7,m-1\}$ ed inoltre

a) se $\lambda = 1$ $H^{+}(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\,x]/(x^{k+1})$ con $x \in H^{2}(M, \mathbb{Z})$ ed $m=2k$

b) se $\lambda = 3$ $H^{+}(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\,x]/(x^{k+1})$ con $x \in H^{4}(M, \mathbb{Z})$ ed $m=4k$

c) se $\lambda = 7$ $H^{+}(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\,x]/(x^{k+1})$ con $x \in H^{8}(M, \mathbb{Z})$ $m=16=2k$

d) se $\lambda = m-1$ allora M è omeomorfa ad S^{m}.

Dimostrazione. Se poniamo $\varphi = \exp'_{p|C^{1}(p)} : C^{1}(p) \to M$, φ è una fibrazione sull'immagine. Inoltre $C^{1}(p)$ è una sfera di dimensione $m-1$ e le fibre, per il lemma 4.3.2., sono diffeomorfe a S^{λ}.

Dal noto teorema di Adams sulle fibrazioni di sfere con sfere come fibre (vedi Adams [1]) segue che $\lambda = 1,3,7$ o $m - 1$.

Nel caso $\lambda = m - 1$ vale il teorema precedente. Per gli altri casi indichiamo con $\tilde{C}^{1}(p)$ l'immagine di φ. Mediante la successione esatta di Gysin si trova facilmente che $H^{*}(\tilde{C}^{1}(p), \mathbb{Z}) \cong Z[\,x\,]/(x^{k})$ con

---

(*)Notiamo che quando si assume $L = \pi$ si normalizza la metrica e quindi non si può assumere allo stesso tempo, senza perdere la generalità, che la curvatura sia minore o uguale ad uno.

$x \in H_{\lambda}(\tilde{C}^1(p), \mathbb{Z})$.

Poiché M è unione di $C^1(p)$ con una cella m-dimensionale, usando tecniche abbastanza consuete in topologia algebrica e tenendo conto dell'orientabilità di M si trova il risultato cercato(*). ■

Le varietà di tipo $A(\lambda,L)$ si presentano come generalizzazioni naturali, almeno dal punto di vista del lavoro di Allamingeon, delle varietà armoniche.
Rimandiamo ad Allamingeon [2] per i particolari.

A conclusione di questo paragrafo vogliamo descrivere per sommi capi il lavoro di Warner [30] sulle varietà con luogo coniugato regolare.

In realtà dall'analisi del teorema 4.3.7. si vede che nella dimostrazione non si è sfruttata completamente l'ipotesi $A(\lambda,L)$ ma solo quanto segue:

I il luogo di taglio è contenuto nel luogo coniugato;

II $\mathrm{Ker}(\mathrm{dexp}_p)$ definisce una distribuzione λ-dimensionale su $C^1(p)$

Warner dimostra in [30] che se l'ordine λ del primo punto coniugato a p in ogni direzione è non inferiore a 2 allora I è ancora vera (M semplicemente connessa). Inoltre, se l'ordine λ è costante, $C^1(p)$ è una varietà differenziabile immersa in T_pM e diffeomorfa ad una sfera. Ancora nell'ipotesi $\lambda \geq 2$ $\mathrm{Ker}(\mathrm{dexp}_p)_Y = T_Y C^1(p)$ $\forall\, Y \in C^1(p)$

(*) Per ulteriori dettagli sulla dimostrazione si veda Warner [30] o Allamingeon [2].

e quindi anche la seconda condizione è verificata.(si veda Warner [29]).
Si può dunque provare il seguente teorema analogo a 4.3.7.

4.3.8. TEOREMA. Se M è una varietà semplicemente connessa, $p \in M$ e se $Y \in C^1(p)$ l'ordine di Y è costante, $\lambda \geq 2$, allora $\lambda \in \{3,7,m-1\}$ ed inoltre

i) se $\lambda = m-1$ $C^1(p) = \{X/||X||=L\}$ ed M è omeomorfa ad una sfera;

ii) se $\lambda = 3$ $H^*(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^{k+1})$ con $x \in H^4(M, \mathbb{Z})$ ed $m = 4k$

iii) se $\lambda = 7$ allora $m = 16$ e $H^*(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^3)$ con $x \in H^8(M, \mathbb{Z})$.

Infine si può dimostrare facilmente che se m è dispari l'ipotesi $\lambda \geq 2$ non è necessaria nel senso indicato dal seguente teorema (vedi Mercuri [20]).

4.3.9. TEOREMA. Sia M semplicemente connessa e di dimensione dispari, p un suo punto e supponiamo che per ogni $Y \in C^1(p)$ l'ordine λ di Y sia costante.
Allora $\lambda = m - 1$ e quindi M è omeomorfa ad S^m.

Dimostrazione. Supposto $\lambda \geq 2$ per il teorema 4.3.8 risulta $\lambda = 3,7,m-1$.

Se $\lambda \neq m - 1$ $H^m(M, \mathbb{Z}) = 0$ (poiché m è dispari) e quindi si ha una contraddizione essendo M compatta ed orientabile. Basterà dunque far vedere che $\lambda \neq 1$.

Se fosse $\lambda = 1$, $\mathrm{Ker}(\mathrm{dexp}_p)$ sarebbe, per il lemma di Gauss, ortogonale ai raggi per l'origine. Ma $C^1(p)$ è una varietà differenziabile omeomorfa ad S^{m-1} e trasversa ai raggi per l'origine. Ne seguirebbe che $\mathrm{Ker}(\mathrm{dexp}_p)_Y$ ha una proiezione non banale su $T_Y C^1(p)$ e quindi definisce una distribuzione 1-dimensionale su $T_Y C^1(p)$, quindi di un fibrato vettoriale di dimensione 1 su $C^1(p)$.

Poiché ogni fibrato vettoriale di dimensione 1 su una sfera è banale potremmo allora definire su $C^1(p)$, che è diffeomorfa ad S^{m-1}, un campo di vettori ovunque diverso da zero il che è impossibile in quanto $m - 1$ è dispari. ∎

4.4. CENNI SUL TEOREMA DI TOPOGONOV.

In quest'ultimo paragrafo vogliamo enunciare un altro teorema fondamentale che può considerarsi come una generalizzazione del teorema di Rauch.

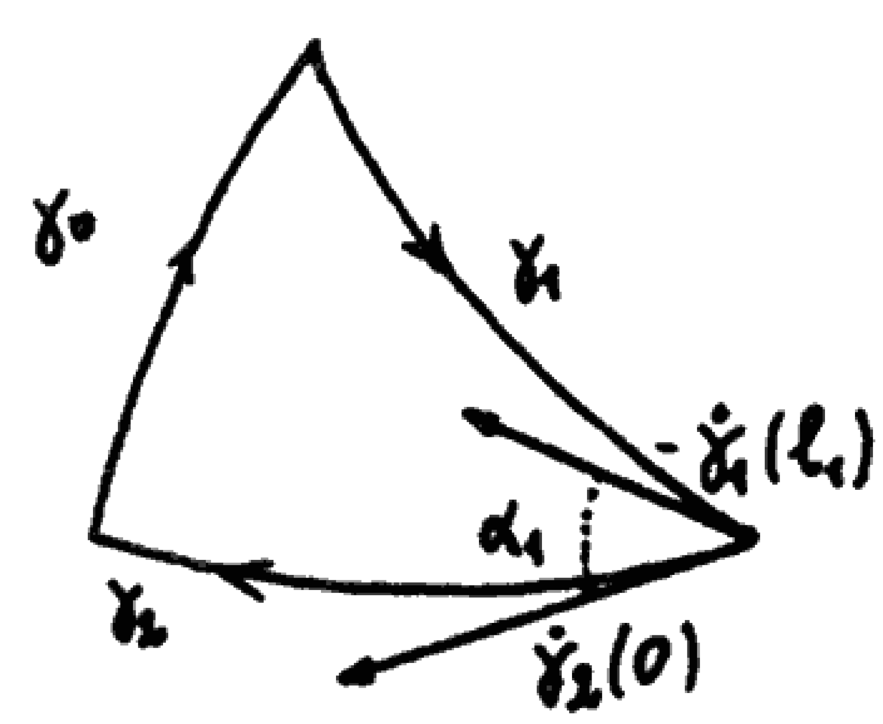
Sia al solito M una varietà riemanniana m-dimensionale ed indichiamo con K_M la curvatura sezionale.

4.4.1. DEFINIZIONE. Un triangolo geodetico in M è un'insieme di tre geodetiche $\{\gamma_i\}_{i=0,1,2}$ parametrizzate con la lunghezza d'arco $\gamma_i : [0,l_i] \to M$ e tali che (leggendo gli indici modulo tre)

a) $\gamma_i(l_i) = \gamma_{i+1}(0)$

b) $l_i + l_{i+1} \geq l_{i+2}$

Per un tale triangolo denotiamo con α_i l'angolo formato da $-\dot{\gamma}_i(l_i)$ e da $\dot{\gamma}_{i+1}(0)$.



4.4.2. TEOREMA (di Topogonov, prima versione). Sia $\{\gamma_i\}$ un triangolo geodetico su M e $K_M \geq H \in \mathbb{R}$. Supponiamo che γ_o e γ_2 siano geodetiche minimali e che, se $H > 0$, $l_1 \leq \pi/\sqrt{H}$. Sia M^H la varietà 2-dimensionale semplicemente connessa a curvatura costante H.

Esiste allora un triangolo geodetico $\{\bar{\gamma}_i\}$ in M^H con $\bar{l}_i = l_i, \bar{\alpha}_o \leq \alpha_o$ ed $\bar{\alpha}_2 \leq \alpha_2$.

Inoltre fatta eccezione per il caso $H > 0$ e $l_i = \pi/\sqrt{H}$, tale triangolo è unicamente determinato (a meno di isometrie).

Di questo teorema diamo anche una versione equivalente.

4.4.3. TEOREMA.(di Topogonov, seconda versione). Siano γ_1, γ_2 due geodetiche in M con $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ ed α l'angolo formato da $\dot{\gamma}_1(0)$ con $\dot{\gamma}_2(0)$.

Sia γ_1 minimale e, se $H > 0$, $l_2 \leq \pi/\sqrt{H}$. Siano $\bar{\gamma}_1$ e $\bar{\gamma}_2$ geodetiche in M^H con $\bar{\gamma}_1(0) = \bar{\gamma}_2(0)$, $\bar{l}_i = l_i$ e $\alpha = \bar{\alpha}$ (con l'ovvio significato dei simboli). Allora

$$d_M(\gamma_1(l_1) , \gamma_2(l_2)) \leq d_{M^H}(\bar{\gamma}_1(\bar{l}_1) , \bar{\gamma}_2(\bar{l}_2)).$$

Per una dimostrazione rimandiamo a Topogonov [26] e Cheeger-Ebin [8].

Diamo infine un brevissimo cenno di come si possa dimostrare il <u>teorema delle sfere</u> 4.2.6. senza condizioni sulla dimensione usando il teorema di Topogonov.

Supponiamo $\frac{1}{4} < \delta \leq K_M \leq 1$ e $p,q \in M$ tali che $d(p,q)$ è massimale. Il diametro della sfera a curvatura δ è $\pi\delta^{-1} = 2(\pi - \varepsilon) < 2\pi$ per $\varepsilon = \pi/2(2-\delta^{-1}) > 0$.

Allora usando il teorema di Topogonov si vede che restringendo $\exp_p$ ed $\exp_q$ rispettivamente agli insiemi $\{X \in T_pM / \, ||X|| < \pi - \varepsilon\}$ e $\{X \in T_qM / ||X|| < \pi - \varepsilon\}$ si ottengono immersioni biunivoche e le immagini ricoprono M.

M quindi è unione di due dischi aperti e per il teorema di M. Brown [7] è omeomorfa ad S^m.