CAPITOLO III

VARIETA' A CURVATURA DI SEGNO COSTANTE

3.1. SOTTOVARIETA' E SOTTOIMMERSIONI.

3.1.1. DEFINIZONE. Se M,N sono varietà differenziabili e $f:M \to N$ è differenziabile, si dice che f è un'immersione se per ogni punto x di M è iniettivo il differenziale $(df)_x : T_xM \to T_{f(x)}N$.

3.1.2. DEFINIZIONE. Per sottovarietà M di una varietà N intendemo la coppia (f,M) essendo M una varietà differenziabile, $f:M \to N$ una immersione tale che f sia un omeomorfismo sull'immagine(*).

Se M è una sottovarietà di N identificheremo (f,M) con $f(M)\subseteq N$ e scriveremo di conseguenza $M\subseteq N$ a meno che non possano sorgere dubbi.

Se M è una sottovarietà di N ed N ha una struttura riemanniana, chiaramente questa induce una struttura riemanniana su M. Si può definire allora un'applicazione (fibrata) $P : T(N) \to T(M)$ ponendo $P(X_p) = P_p(X_p)$ avendo indicato con $P_p : T_pN \to T_pM\subseteq T_pN$ la proiezione ortogonale rispetto alla struttura riemanniana.

In modo analogo la connessione ∇ definita su N induce una connessione che indichiamo con $\overline{\nabla}$. Siano infatti $X,Y \in \Gamma(M)$ e $\tilde{X},\tilde{Y}$ estensioni di X,Y a campi di vettori su N; poniamo $(\overline{\nabla}_XY)_p=P_p(\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y})$. Se φ è una funzione reale su N e nulla in un intorno di p in M e se $Z,T\in\Gamma(N)$

(*) In altri contesti può essere utile definire in modo meno restrittivo le sottovarietà, ad esempio richiedendo soltanto che l'immersione sia bigettiva o addirittura limitandosi a supporre che f sia un'immersione.

con $Z_p \in T_pN$ allora risulta $(\nabla_Z(\varphi T))_p = Z_p(\varphi)T_p + \varphi(p)\nabla_{Z_p} T = 0$

e quindi $\bar{\nabla}_X Y$ non dipende dalle estensioni scelte.

Ora, essendo $P_{|T(M)} = I_{T(M)}$, è facile verificare che $\bar{\nabla}$ definisce una connessione compatibile con la struttura riemanniana indotta su M da N e quindi, a norma del teorema 1.1.4., l'unica connessione riemanniana su M.

Ora P è un'applicazione fibrata differenziabile di rango costante e quindi (Ker P) $= \nu(M)$ è un fibrato vettoriale di dimensione la codimensione di M in N.

Ovviamente (Ker P) $= \nu(M) = \{X \in T(N) / \pi(X) \in M\}$ e X è ortogonale a $T_{\pi(X)}M$ avendo indicato con $\pi : T(N) \to N$ la proiezione naturale.

Definiamo allora, per p in M, $S^p : T_pM \times T_pM \to \nu(M)_p$ ponendo

$S^p(X,Y) = \nabla_X \tilde{Y} - \bar{\nabla}_X \tilde{Y}$ essendo $\tilde{Y}$ un'estensione di Y ad un campo di vettori su N.

3.1.3. LEMMA. S^p è ben definita, $\mathfrak{F}(M)$-bilineare e simmetrica.

Dimostrazione. Sia $\varphi : M \to \mathbb{R}$ differenziabile e $\varphi(p) = 0$; allora

$$S^p(X, \varphi Y) = (\nabla_X \varphi\tilde{Y})_p - (\bar{\nabla}_X \varphi\tilde{Y})_p = X(\varphi)Y + \varphi(p)(\nabla_X\tilde{Y})_p - P(X(\varphi)Y + \varphi(p)(\nabla_X\tilde{Y})_p) = 0$$

e quindi S^p è ben definita.

Inoltre se estendiamo X,Y a campi di vettori tali che $[\tilde{X},\tilde{Y}]_p \in T_pM$ risulta

$$S^p(X,Y) = (\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y})_p - (\bar{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y})_p = (\nabla_{\tilde{Y}}\tilde{X})_p - [\tilde{X},\tilde{Y}]_p - (\bar{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{X})_p + [\tilde{X},\tilde{Y}]_p = S^p(Y,X).$$

Essendo S^p chiaramente lineare la tesi è completamente dimostrata.■

S^p prende il nome di 2^forma fondamentale di (f,M) ed è proprio la ben nota 2^forma quadratica fondamentale nel caso in cui M è una superficie bidimensionale immersa in $N = \mathbb{R}^3$(*). Ricordiamo che la prima forma fondamentale non è altro che la metrica riemanniana.

3.1.4. DEFINIZIONE. *Diremo che* M *è geodetica in* p *se per ogni* $X \in T_pM$ *esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che* $\exp_p(tX) \in M$ *se* $|t| < \varepsilon$.

M *si dice totalmente geodetica se è geodetica in ogni punto.*

ESEMPIO. Sia P un sottospazio di T_pN e $B_\varepsilon = \{X \in P / \|X\| < \varepsilon\}$. Per ε abbastanza piccolo $M = \{\exp_p Y / Y \in B_\varepsilon\}$ è una sottovarietà geodetica in p.

3.1.5. PROPOSIZIONE. *Se* M *è geodetica in* p *allora* $S^p = 0$

Dimostrazione. Sia $Z \in T_pM$ e γ la geodetica in M uscente da p con vettore velocità Z. Poiché γ è una geodetica, $(\bar{\nabla}_Z Z)_p = 0$. Ma per l'ipotesi fatta su M e per il fatto che $\gamma(t) = \exp_p(tZ)$ la curva γ è geodetica anche in N perché $\nabla_Z Z = 0$; ne segue che $S^p(Z,Z) = 0$ per ogni $Z \in T_pM$. Ora se $X,Y \in T_pM$, essendo S^p simmetrica, $S^p(X,Y) = \frac{1}{2}(X+Y,X+Y) = 0$ e quindi si ha l'asserto.■

(*) Più precisamente se Z è un campo di versori normali a M risulta $S^p(X,Y) = h^p(X,Y)Z$ e l'applicazione bilineare e simmetrica $h:\Gamma(M)\times\Gamma(M) \to \mathfrak{F}(M)$ definita da $h(X,Y)(p) = h^p(X,Y)$ è, nel linguaggio classico, la 2^forma fondamentale di M relativa a Z.

Ovviamente M è totalmente geodetica se e solo se $S^p = 0$ per ogni p in M(si può vederlo col ragionamento seguito sopra).

Diamo ora delle relazioni tra la curvatura in M e in N. Decomponendo il tensore di curvatura R di N nelle parti tangenziale e normale (rispetto a M) si ottengono le classiche equazioni di Gauss e Codazzi-Mainardi :

$$\text{(G)} \qquad P(\bar{R}(X,Y)Z) = R(X,Y)Z - P(\nabla_X S(Y,Z) - \nabla_Y S(X,Z))$$

$$\text{(C-M)} \qquad (1_{T(N)}-P)(\bar{R}(X,Y)Z) = S(X,\bar{\nabla}_Y Z) - S(Y,\bar{\nabla}_X Z) - S([X,Y],Z) - (1_{T(N)}-P)(\nabla_X S(Y,Z) - \nabla_Y S(X,Z))$$

dove $X,Y,Z \in \Gamma(M)$ e $S(X,Y)_p = S^p(X_p,Y_p)$.

3.1.6. <u>PROPOSIZIONE</u>. <u>Sia $\{S_j\}_{j=1,2,\ldots,(\dim N - \dim M)}$ una base ortonormale per $\nu(M)$ in un aperto coordinato U; siano inoltre $p \in U$ e $X,Y \in T_pM$; allora</u>

$$\bar{K}(X,Y) = K(X,Y) + \Sigma_j((\nabla_X S_j,X)(\nabla_Y S_j,Y) - (\nabla_X S_j,Y)^2).$$

<u>Dimostrazione</u>. E' un semplice calcolo a partire dall'equazione di Gauss(G). ∎

Sia γ una geodetica in N contenuta in $M(\dim M \geq 2)$ e parametrizzata con la lunghezza d'arco. Sia X un campo di vettori tangenti a M lungo γ, parallelo in M, unitario e ortogonale a γ.

3.1.7. <u>COROLLARIO</u>. $K(X(t),\dot{\gamma}(t)) \geq \bar{K}(X(t),\dot{\gamma}(t))$ <u>e l'uguaglianza vale se e solo se</u> X è parallelo in N lungo γ.

<u>Dimostrazione</u>. Segue banalmente della considerazioni fatte in 3.1.6

tenendo presente che $\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ e, se X è parallelo in N,

$\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}X = \nabla_{\dot{\gamma}}X = 0.$ ∎

Esaminiamo ora il concetto duale di sottovarietà. Siano M,N varietà differenziabili di dimensione n+k , n rispettivamente.

3.1.8. DEFINIZIONI. a) Diremo che un'applicazione differenziabile $\pi : M \to N$ è una sottoimmersione(o coimmersione) se $(d\pi)_p$ è suriettivo per ogni p in M. E' ben noto allora che, se π è una sottoimmersione, per ogni p di N $\pi^{-1}(p)$ è una sottovarietà di M di dimensione k.

b) Per $q \in M$, $V_q = T_q\pi^{-1}(\pi(q))$ sarà per definizione il sottospazio verticale di T_qM. V sarà lo spazio dei campi di vettori verticali.

c) Se M ed N sono munite di una struttura riemanniana, $H_q = V_q^{\perp}$ si dirà sottospazio orizzontale di T_qM. H sarà il sottofibrato dei vettori orizzontali.

d) Diremo che π è una sottoimmersione riemanniana se: $(d\pi)_q|_{H_q} : H_q \to T_{\pi(q)}N$ è un'isometria nel senso che $(X,Y)=((d\pi)_q(X), (d\pi)_q(Y))$ per $X,Y \in H_q$.

Dimostreremo ora un teorema che dà una relazione tra la curvatura sezionale in M e la "corrispondente"curvatura sezionale in N.

Siano $X,Y,Z \in \Gamma(N)$ ed indichiamo con $\bar{X},\bar{Y},\bar{Z} \in \Gamma(M)$ i " sollevamenti orizzontali", cioé gli unici campi di vettori tali che $\bar{X},\bar{Y},\bar{Z} \in H$ e $d\pi(\bar{X}) = X, d\pi(\bar{Y}) = Y, d\pi(\bar{Z}) = Z$.

Indichiamo inoltre, se $W \in \Gamma(M)$, con W^V e W^H le componenti, rispettivamente verticale e orizzontale, di W. Infine sia $\bar{\nabla}$ (∇) la connessione riemanniana in $M(N)$, $\bar{K}$ (K) la corrispondente curvatura sezionale, $\bar{R}$ (R) il tensore di curvatura.

3.1.9. <u>PROPOSIZIONE</u>. $[\bar{X},\bar{Y},\ ]_p$ <u>dipende solo da</u> $\bar{X}_p$ <u>e</u> $\bar{Y}_p$.

<u>Dimostrazione.</u> Se T è un campo di vettori verticali si ha

$$([\bar{X},\bar{Y}],T) = (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y},T) - (\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X},T) =$$

$$\bar{X}(\bar{Y},T) - (\bar{Y},\bar{\nabla}_{\bar{X}}T) - \bar{Y}(\bar{X},T) + (\bar{X},\bar{\nabla}_{\bar{Y}}T) = (\bar{X},\bar{\nabla}_{\bar{Y}}T) - (\bar{Y},\bar{\nabla}_{\bar{X}}T). \blacksquare$$

3.1.10. <u>TEOREMA</u> (formula di O'Neill). <u>Con le notazioni già fissate, se</u> $\pi : M \to N$ <u>è una sottoimmersione risulta</u>

$$\bar{K}(\bar{X},\bar{Y}) + \frac{3}{4}\left\|[\bar{X},\bar{Y}]^V\right\| = K(X,Y)\ .$$

<u>Dimostrazione.</u> Cominciamo con l'osservare che

i) $$([\bar{X},\bar{Y}],\bar{Z}) = ([X,Y],Z);$$

ii) se $T \in V$ allora $([\bar{X},T],\bar{Y}) = 0$; in effetti basta tenere conto che $d\pi_{|H}$ è un'isometria e $[d\pi(X),d\pi(Y)] = d\pi([X,Y])$;

iii) $(\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X},\bar{Z}) = \frac{1}{2}\{([\bar{Y},\bar{X}],\bar{Z}) - ([\bar{Y},\bar{Z}],\bar{X}) - ([\bar{X},\bar{Z}],\bar{Y})\} = (\nabla_Y X,Z)$, come si verifica subito ricordando la 1.1.6. e la 1.1.7. .

Sia $X_1,\dots,X_m$ una base locale ortonormale in $T(N)$ $Y_1,\dots,Y_k,\bar{X}_1,\dots\bar{X}_m$, una base ortonormale in $T(M)$ tale che $Y \in V$ e $d\pi(\bar{X}_i) = X_i$.

$(\bar{R}(\bar{X},\bar{Y})\bar{X},\bar{Y}) = -(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X},\bar{Y})+(\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{X},\bar{Y})+(\bar{\nabla}_{[\bar{X},\bar{Y}]}\bar{X},\bar{Y}) = -\bar{X}(\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X},\bar{Y})+(\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X},\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})$ +

$+ \bar{Y}(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{X},\bar{Y})-(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{X},\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{Y})+(\bar{\nabla}_{[\bar{X},\bar{Y}]}\bar{X},\bar{Y}) =$ usando i,ii),iii) e le espressioni

di $\bar{X}$, $\bar{Y}$ nelle basi suddette $= (R(X,Y)X,Y) + \sum_{j=1}^{k}(\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X},\bar{Y}_j)(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y},\bar{Y}_j)$ +

$- \sum_{j=1}^{k} (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{X},Y_j)(\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{Y},Y_j)+ \sum_{j=1}^{k}([\bar{X},\bar{Y}]Y_j)(\nabla_{Y_j}\bar{X},\bar{Y}) = K(X,Y)- \frac{3}{4}||[\bar{X},\bar{Y}]^V||^2.$ ∎

3.1.11. <u>COROLLARIO</u>. <u>Se</u> $\bar{K}(\bar{X},\bar{Y}) \geq 0$ <u>allora</u> $K(X,Y) \geq 0$.

3.2. VARIETA' A CURVATURA COSTANTE.

Ci proponiamo ora di classificare le varietà semplicemente connesse a curvatura costante. Cominceremo col descrivere i "modelli" e dimostreremo poi che ogni varietà semplicemente connessa (e come al solito completa) è isometrica ad una di queste varietà modello.

3.2.1. SPAZIO REALE STANDARD. Consideriamo $\mathbb{R}^m$ con la struttura standard di varietà differenziabile e la metrica "ellittica"

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_{ij}$$

$(\mathbb{R}^m, \delta_{ij})$ è allora una varietà completa semplicemente connessa. Inoltre, per le proprietà di simmetria della derivazione seconda in $\mathbb{R}^m$, $[X,Y] = 0$ e $\nabla_X \nabla_Y Z = \nabla_Y \nabla_X Z$ per cui $R = 0$ e quindi $K = 0$.

3.2.2. SFERA STANDARD. Sia $K > 0$ una costante e $S^m_K = \{X \in \mathbb{R}^{m+1} / ||X||^2 = \frac{1}{K}$

S^m_K ha una struttura canonica di sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^{m+1}$, quindi una metrica indotta dalla struttura riemanniana usuale in $\mathbb{R}^{m+1}$.

Se N è il campo di versori unitari normali "esterni" a S^m_K in un intorno coordinato U risulta $N = \Sigma_i \sqrt{K}\, x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Se Y,Z sono versori tangenti a S^m_K in $(x^1,\dots,x^{m+1})$ e ortogonali, risulta $\nabla_Y N = \Sigma_i \sqrt{K}\, Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ essendo $Y = \Sigma_i Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e quindi dalla proposizione 2.1.6 e da 3.2.1 si ottiene $\overline{K}(Y,Z) = K$ (abbiamo indicato con $\overline{K}$ la curvatura sezionale rispetto alla metrica indotta in S^m_k da $(\mathbb{R}^{m+1}, \delta_{ij})$).

3.2.3. SPAZIO DI POINCARE' Sia $K < 0$ una costante e consideriamo l'insieme $M_K = \{X \in \mathbb{R}^m / ||X||^2 < -\frac{4}{K}\}$. M_K ha ovviamente una struttura canonica di varietà differenziabile e in essa introduciamo la metrica

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\delta_{ij}}{(1+(K/4)||x||^2)^2}$$

dove $||x||$ è ancora la norma in $(\mathbb{R}^m, \delta_{ij})$ di $(x^1, \dots, x^m) \in M_K \subseteq \mathbb{R}^m$.

Ricordando la 1.1.6. e derivando l'uguaglianza $g_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) + \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \Gamma^k_{ij} + \Gamma^j_{ik}$$

ed ancora permutando gli indici e sommando

$$\Gamma^k_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}\right)$$

da cui nel nostro caso, posto $D = (1 + (K/4)||x||^2)^2$, si ottiene

$$\Gamma^i_{jk} = 0 \text{ se } i \neq j \neq k \neq i \quad \text{e} \quad \Gamma^i_{ij} = \Gamma^j_{ji} = \Gamma^i_{ii} = \frac{Kx^i}{2D}, \quad \Gamma^j_{ii} = \frac{Kx^j}{2D}.$$

Ricordando allora la definizione di curvatura si ottiene $K(X,Y) = K$ per ogni coppia (X,Y) di vettori indipendenti in $T_p M_K$.

3.2.4. LEMMA. Siano M, M' due varietà riemanniane connesse e M completa. Se $f : M \to M'$ è un'isometria (cioè se per ogni $p \in M$ $(df)_p : T_p M \to T_{f(p)} M'$ è un'isometria) allora

i) f è suriettiva

ii) f è rivestimento(*)

iii) M' è completa.

Dimostrazione. Essendo f un'isometria $(df)_p$ è non singolare per ogni $p \in M$ e quindi f è un diffeomorfismo locale per il teorema delle funzioni inverse; in particolare f è aperta. Sia $p' \in f(M)$ e V un intorno normale di p' (cioé contenuto in un aperto immagine diffeomorfa tramite $\exp_{p'}$ di un aperto di $T_{p'}M'$ come nel teorema 1.2.10) e $q' \in f(M) \cap V$. Sia $\gamma' : [0,1] \to M'$ l'unica geodetica minimale congiungente p' e q'. Fissato $q \in f^{-1}(q')$ sia γ la geodetica uscente da q con vettore velocità $(df)_q^{-1}(-\dot{\gamma}'(1))$. Poiché f è un'isometria $f \circ \gamma$ è una geodetica uscente da q' con vettore velocità $-\dot{\gamma}'(1)$ e quindi $(f \circ \gamma)(t) = \gamma'(1-t)$. Poiché M è completa $\gamma(1)$ è ben definito e $f \circ \gamma(1) = p'$. Essendo M' connessa ne segue che $f(M) = M'$ e quindi la i).

Con ragionamento analogo mediante la i) si prova la iii).

Per quanto riguarda la ii) sia $p' \in M'$ ed $\varepsilon > 0$ tale che $\exp_{p'}$ sia un diffeomorfismo di $\{X \in T_{p'}M' / \|X\| < 2\varepsilon\}$ su un aperto V' contenente p'. Siano

$V = \exp_{p'}(\{X \in T_{p'}M' / \|X\| < \varepsilon\})$, $\{p_i\} = f^{-1}(p')$ e

$U_i = \exp_{p_i}(\{X \in T_p M / \|X\| < \varepsilon\})$.

Vogliamo verificare che $f^{-1}(V) = \bigcup_i U_i$, $U_i \cap U_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $f_{|U_i} : U_i \to V$

(*) Ricordiamo che un'applicazione continua tra spazi topologici $f: X \to Y$ si dice un rivestimento se $\forall\ p \in Y$ esiste un intorno V

è biunivoca. Se $q \in f^{-1}(V)$ e $q' = f(q)$ esiste un'unica geodetica minimale γ' da p' a q' di lunghezza minore di ε. Poiché f è un diffeomorfismo locale con ragionamento analogo al precedente possiamo "sollevare" γ' ad una geodetica γ uscente da q. Se $t_o = d(p',q')$ essendo M completa $\gamma(t_o)$ è ben definito ed $f(\gamma(t_o)) = p'$ quindi $\gamma(t_o) = p_i$ per qualche i e $q \in U_i$ (γ è parametrizzata con la lunghezza d'arco). Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ per $i \neq j$ allora $d(p_i,p_j)<2\varepsilon$ e se γ è una geodetica minimale tra p_i e p_j $f\cdot\gamma$ sarà una geodetica di lunghezza minore di 2ε uscente da p' e confluente in p'. Per come è stato scelto ε si avrebbe allora $(f\cdot\gamma)(t) = p'$ per ogni t; ma questo è impossibile perché f è un diffeomorfismo locale e $p_i \neq p_j$.
Infine se $q_1,q_2 \in U_i$, $q_1 \neq q_2$, e se γ_j è una geodetica minimale da p_i a q_j, $j = 1,2$, $f\cdot\gamma_1$ ed $f \cdot \gamma_2$ sono due geodetiche di lunghezza minore di ε da p' a $f(q_j)$. Per la definizione di ε allora $f(q_1) \neq f(q_2)$.■

Vedremo ora che in un certo senso i precedenti esempi esauriscono tutte le varietà semplicemente connesse a curvatura sezionale costante.

Diremo che due varietà M_1,M_2 sono isometriche se esiste un'isometria $f : M_1 \to M_2$ che sia anche un diffeomorfismo.

3.2.5. TEOREMA. *Sia M una m-varietà riemanniana completa e semplicemente connessa tale che per ogni $p \in M$, $X,Y \in T_pM$ e $K(X,Y) = K =$ costante. Allora*

---

tale che $f^{-1}(V) = \bigcup_\alpha U_\alpha$ con U_α aperti disgiunti tali che $f_{|U_\alpha}$ sia un omeomorfismo su V per ogni α.

i) se $K > 0$ M è isometrica alla sfera S^m_K

ii) se $K = 0$ M è isometrica a $(\mathbb{R}^m, \delta_{ij})$

iii) se $K < 0$ M è isometrica alla varietà di Poincarè.

Dimostrazione. Cominciamo col ricordare (paragrafo 2.2.) che, nelle nostre ipotesi, se $\gamma : [0,\infty) \to M$ è una geodetica uscente da $p \in M$ e $\{p_i(t)\}$ una base ortonormale parallela in $T_{\gamma(t)}M$ con $P_1(t) = \gamma(t)$, i campi di Jacobi nulli in $t = 0$ costituiscono il sottospazio vettoriale di $\Gamma(\gamma)$ generato dai campi di vettori

a) $X_1 = ct\dot{\gamma}(t) = ctP_1(t)$, $c \in \mathbb{R}$

b) $X_i = \Phi(t)P_i(t)$, $t \neq 1$, ove Φ è una soluzione dell'equazione differenziale ordinaria $\Phi''(t)+K\Phi(t) = 0$ con la condizione iniziale $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) = 1$. Inoltre indicato con $Q_i(t)$ il trasporto parallelo di $P_i(0)$ lungo $\{t\dot{\gamma}(0)\}$ in T_pM, $(d\exp_p)_{t\dot{\gamma}(0)}tQ_i(t)=\Phi(t)P_i(t)$.

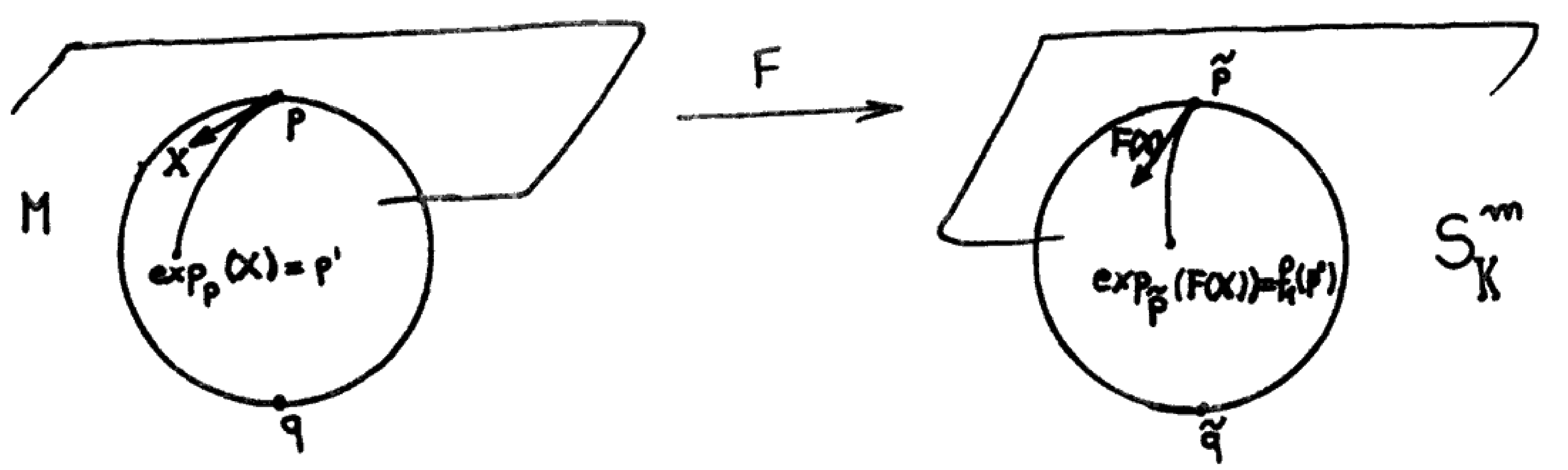
Se $K = 0$ $\Phi(t)=t$ e quindi $||(d\exp_p)_{t\dot{\gamma}(0)}Q_i(t)||^2=(1/t^2)\Phi^2(t)||P_i(t)||= 1$, pertanto $\exp_p : T_pM \to M$ è un'isometria $(T_pM=(\mathbb{R}^m,\delta_{ij}))$. Inoltre per il lemma 3.2.4. $\exp_p$ è un rivestimento e quindi, essendo M semplicemente connessa, un diffeomorfismo.(*)

(*) Infatti, valendo per un rivestimento f la proprietà di sollevamento della omotopia si ha che se $f(p)=f(q)$ e $p\neq q$, un cammino da p a q si proietta in un cammino chiuso di origine $f(q)$. Se la base è semplicemente connessa, una omotopia di questo cappio al cappio costante si solleva ad un' omotopia del cammino originario ad un cammino tutto contenuto in $f^{-1}(f(p))$ (omotopia che mantiene fissi gli estremi). Ma ciò è assurdo perché la fibra di un rivestimento è discreta.

Sia $K < 0$. $\exp_p$ è un diffeomorfismo locale in quanto non vi sono punti coniugati. Inoltre per una delle interpretazioni geometriche della curvatura date nel capitolo I, le geodetiche uscenti da p"divergono" e quindi, salvo qualche noiosa verifica, possiamo concludere che $\exp_p$ è globalmente bigettiva. Sia M_1 lo spazio di Poincarè costruito precedentemente; ovviamente le stesse considerazioni valgono per M_1. Se $F : T_pM \to T_oM_1$ è un'isometria, consideriamo l'applicazione differenziabile $f : M \to M_1$ definita da $f = \exp \circ F \circ \exp_p^{-1}$.

Risulta allora $(df)_{\gamma(t)} X_i(t) = \tilde{X}_i(t)$ dove $\tilde{X}_i$ sono i campi di Jacobi costruiti su M_1 analogamente agli X_i lungo la geodetica $t \to \exp_o(tF(\dot{\gamma}(0)))$ (ricordiamo che γ è la geodetica lungo la quale sono definiti gli X_i). Ne segue allora che f è un'isometria e per lo stesso argomento del caso precedente M ed M_1 sono isometriche.

Se $K > 0$, con le notazioni dell'ultimo paragrafo del capitolo II si ottiene $C^1(p) = \{X \in T_pM / ||X|| = \pi/\sqrt{K}\}$, $\Phi(t) = \operatorname{sen} \sqrt{K}\, t$, e quindi, fissato sulla sfera standard S^m_K un punto p ed un'isometria $F: T_pM \to T_{\tilde{p}} S^m_K$, resta definita un'applicazione continua $f_1 : M \to S^m_K$, $f_1 = \exp_{\tilde{p}} \circ F \circ \exp_p^{-1}$, che è differenziabile su $\exp_p(\{X \in T_pM / ||X|| < \pi/\sqrt{K}\})$.



Consideriamo ora $q = \exp_p(C^1(p))$ e l'applicazione $\sigma : T_pM \to T_qM$ data da $\sigma(X) = \left[\frac{d\exp_p(tX)}{dt} \right]_{t=\pi/\sqrt{K}}$.

Se $\alpha : M \to M$ è l'applicazione $\alpha(p) = \exp_p(C^1(p))$ risulta $(d\alpha)_p = \sigma$ e quindi σ è lineare. Analogamente sia $\tilde{\sigma} : T_{\tilde{p}}S^m_K \to T_{\tilde{p}}S^m_K$ l'analoga applicazione per S^m_K. Possiamo allora definire

$f_2 = \exp_{\tilde{q}} \circ \tilde{\sigma} \circ F \circ \sigma^{-1} \circ \exp_q^{-1} : M \to S^m_K$.

La differenziabilità di f_2 in q ed il fatto che $f_1 = f_2$ ci forniscono una applicazione differenziabile su tutta la varietà M, $f : M \to S^m_K$.

Con ragionamenti simili a quelli già seguiti si prova poi che M ed S^m_K sono isometriche.■

OSSERVAZIONI: 1) Per concludere che $(df)_p$ è un'isometria abbiamo usato implicitamente il fatto che un'applicazione lineare che manda una base ortonormale biunivocamente su una base ortonormale è un'isometria.

2) Notiamo che nel caso $K > 0$ la differenziabilità di f_1 in q non è affatto scontata a priori. In effetti per poter definire f_1 su tutta M e per provare la continuità ci siamo valsi solo del fatto che $C^1(p) = \{X \in T_pM / ||X|| = K_o\}$, $C^1(p) = C^1_{m-1}(p)$ (cioè $\exp_p(C^1(p)) = \{q\}$) e del fatto che la restrizione di $\exp_p$ a $\{X \in T_pM / ||X|| < K_o\}$ è localmente bigettiva.

Queste sole ipotesi però non implicano che f_1 sia differenziabile.

3.3. VARIETA' A CURVATURA DI SEGNO COSTANTE.

Facciamo ora cadere l'ipotesi che la curvatura sezionale rimanga costante per ogni 2-piano tangente e vediamo come alcune delle conclusioni del paragrafo precedente rimangano vere sotto l'ipotesi più debole che K abbia segno costante.

3.3.1. LEMMA. *Sia* M *una varietà completa*, $p \in M$ *e* $\exp_p : T_pM \to M$ *ovunque non singolare. Allora* $\exp_p$ *è un rivestimento.*

Dimostrazione. Definiamo una metrica in T_pM diversa dalla metrica ellittica considerata in 3.2.1. ponendo per $X \in T_pM$, $V,W \in T_XT_pM$

$$(V,W) = ((d\exp_p)_X V \ , \ (d\exp_p)_X W).$$

Il prodotto scalare così definito ($(dex_p)_X$ è non singolare per ogni $X \in T_pM$) munisce T_pM di una struttura riemanniana rispetto alla quale $\exp_p : T_pM \to M$ è un'isometria. Inoltre le geodetiche uscenti da $0 \in T_pM$ rispetto alla nuova metrica non sono altro che i "sollevamenti" delle geodetiche in M uscenti da p e quindi sono ancora i raggi $\{tX/ \ t \in \mathbb{R}, X \in T_pM\}$. Per il teorema di Hopf-Rinow enunciato nel capitolo I T_pM risulta completa rispetto a questa nuova metrica e, per il lemma 3.2.4. , $\exp_p$ risulta essere un rivestimento. ∎

3.3.2. TEOREMA. (di Cartan-Hadamard). *Sia* M *una varietà completa e semplicemente connessa. Indicata con* K *la curvatura sezionale sia* $K(X,Y) \leq 0$ *per ogni* X,Y. *Allora* $\exp_p : T_pM \to M$ *è un diffeomorfismo, quindi* M *risulta diffeomorfa ad* $\mathbb{R}^m$.

<u>Dimostrazione</u> Se proviamo che $\exp_p$ risulta ovunque non singolare, per il lemma 2.1.7. avremo che $\exp_p$ è un rivestimento e l'ipotesi di semplice connessione assicurerà la tesi.

Ricordando dalla proposizione 2.2.7. che i punti coniugati a p sono tutte e solo le immagini di punti singolari di $\exp_p$ basterà dimostrare che se $\gamma : [0, \infty) \to M$ è una geodetica e $J \in \Gamma(\gamma)$ è un campo di Jacobi nullo in 0 e non identicamente nullo, allora $J(t) \neq 0$ per ogni $t \neq 0$

Ora dall'equazione di Jacobi risulta $(\frac{D^2}{dt^2} J,J) = (R(\dot\gamma,J)\dot\gamma,J) = -K(\dot\gamma,J) \geq 0$ e quindi $\frac{d}{dt}(\frac{D}{dt} J,J) = (\frac{D^2}{dt^2} J,J) + ||\frac{D}{dt} J||^2 \geq 0$, pertanto la funzione $\varphi = (\frac{D}{dt}J,J)$ è monotona non decrescente e $\varphi(0) = 0$. Se per qualche $t_o \neq 0$ risulta $\varphi(t_o) = 0$ si ha dunque $\varphi(t) = 0$ per ogni $t \in [0,t_o]$ e quindi $J(t) = 0$ come segue immediatamente. ∎

Per studiare il caso $K > 0$ introduciamo una "misura di curvatura" un po' diversa.

Se $p \in M$ e $X_1, X_2 \in T_pM$ definiamo $\bar{C}(X_1,X_2) : T_pM \to T_pM$ ponendo $\bar{C}(X_1,X_2)(Y) = R(X_1,Y)X_2$ essendo R al solito il tensore di curvatura.

3.3.3. <u>DEFINIZIONE</u>. <u>Definiamo curvatura di Ricci in</u> X_1,X_2 <u>e la indichiamo con</u> $C(X_1,X_2)$ <u>la traccia dell'applicazione</u> $\bar{C}(X_1,X_2)$. <u>In particolare poniamo</u> $C(X) = C(X,X)$.

E' facile vedere che la curvatura di Ricci è un tensore doppio covariante.

3.3.4. LEMMA. *Sia $\{X_1,\ldots.X_m\}$ una base ortonormale in T_pM. Se indichiamo come al solito con K la curvatura sezionale risulta*

$$C(X_m) = C(X_m,X_m) = \sum_{i=1}^{m-1} K(X_m,X_i).$$

Dimostrazione. $C(X_m)$ = traccia $((R(X_m,X_i)X_m,X_j))$ =

$$= \sum_{i=1}^{m} (R(X_m,X_i)X_m,X_i) = \sum_{i=1}^{m-1} K(X_m,X_i). \blacksquare$$

3.3.5. TEOREMA (di Mayers-Bonnet). *Se per ogni $p \in M$ e $X \in T_pM$ con $||X|| = 1$ risulta $C(X) \geq \frac{m-1}{r^2}$, $r > 0$, allora nessuna geodetica di lunghezza maggiore di πr è minimale.*

Dimostrazione. Sia $\gamma : [0,1] \to M$ una geodetica di lunghezza $L>0$ parametrizzata con la lunghezza d'arco. Sia $\{X_1(t),\ldots..,X_m(t)\}$ una base ortonormale in $T_{\gamma(t)}M$ tale che i campi di vettori $X_i(t)$ siano paralleli lungo γ e $X_m = (1/L)\dot{\gamma}(t)$. Poniamo $J_i = (\text{sen } \pi t)X_i$. Risulta allora

$$\tfrac{1}{2} E_{**}(J_i,J_i) = \int_0^1 (J_i(t), \frac{D^2}{dt^2} J_i(t)+R(\dot{\gamma}(t),J_i(t))\dot{\gamma}(t))\, dt =$$

$$= \int_0^1 (\text{sen } \pi t)^2 \{\pi^2 - L^2((X_m(t),X_i(t))X_m(t), X_i(t))\}dt.$$

Sommando e tenendo conto del lemma 3.3.4. si ottiene

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1} E_{**}(J_i,J_i) = \int_0^1 (\mathrm{sen}\ \pi t)^2\{(m-1)\pi^2-L^2C(X_m)\}dt$$

Poiché $C(X_m) \geq \frac{m-1}{r^2}$, se $L > \pi r$ risulta $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1} E_{**}(J_i,J_i) < 0$.

La forma E_{**} non è quindi semidefinita positiva su $T_\gamma\Omega$ e quindi per il corollario 2.1.13. γ non è minimale.■

3.3.6. <u>COROLLARIO</u>. <u>Nelle stesse ipotesi del teorema precedente risulta</u>

1) M è compatta
2) $\pi_1(M)$ è finito.

<u>Dimostrazione</u>. Per la 1) osserviamo che $M=\exp_p(\{X \in T_pM/ ||X|| \leq \pi r\})$ e quindi essendo immagine continua di un compatto è un compatto.

Per la 2) sia $\eta : \tilde{M} \to M$ il rivestimento universale di M (si veda Spanier [25]).

Sollevando la metrica di M su $\tilde{M}$ mediante η cioé ponendo per definizione $(X,Y) = (d\eta(X),d\eta(Y))$, si ottiene su $\tilde{M}$ una struttura riemanniana con le stesse caratteristiche di curvatura e dunque per 1) $\tilde{M}$ è compatta. Ma allora per ogni $p \in M$ $\eta^{-1}(p)$ è un insieme finito di punti e quindi $\pi_1(M)$ è finito (si veda ancora Spanier).■

3.3.7. <u>COROLLARIO</u>. <u>Se</u> $K(X,Y) \geq K_o > 0$ <u>per ogni</u> X,Y <u>allora</u> $C(X) \geq \frac{n-1}{\sqrt{K_o}^{-1}}$ <u>e quindi valgono le conclusioni del teorema di Myers-Bonnet.</u>

3.4. GRUPPI DI LIE E SPAZI SIMMETRICI.

Esaminiamo ora alcuni dei concetti e risultati fin qui esposti su un tipo particolare di varietà: gli spazi simmetrici. Dette varietà sono importanti perché la struttura di cui sono dotate permette calcoli "effettivi" ed inoltre esse costituiscono una classe abbastanza vasta da offrire una gamma di esempi interessanti e buoni tests su cui controllare congetture.

Per le definizioni e prime proprietà rimandiamo a Helgason [13].

Se G è un gruppo di Lie, e l'elemento neutro di G, $\mathfrak{g} = T_eG$ l'algebra di Lie associata indichiamo con L_g la traslazione sinistra per $g \in G$ e con R_g quella destra e sia $(Ad_g)_e = (d(R_g \cdot L_{g^{-1}})_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ la rappresentazione aggiunta. Un prodotto scalare sull'algebra $\mathfrak{g}$ induce una metrica riemanniana su G invariante per traslazioni sinistre.

In generale non sarà possibile munire G di una metrica invariante sia a sinistra che a destra salvo in casi particolari. Ad esempio se G è unimodulare(*) e $<\ ,\ >$ un prodotto scalare in $\mathfrak{g}$, ponendo

(*) Ricordiamo che una misura su un gruppo di Lie G è una famiglia continua $\{\mu_g\}_{g \in G}$ di misure su T_gG. E' noto che se G è localmente compatto, come nel caso di gruppi di Lie lineari reali, una misura μ_e assegnata su T_eG si può estendere tramite il differenziale delle traslazioni sinistre a ogni T_gG in modo continuo e si ottiene così una misura invariante a sinistra su G.
Se tale misura, detta di Haar, è anche invariante a destra si dice che G è unimodulare. Ciò si verifica sicuramente se G è compatto; più in generale si prova che G è unimodulare se e solo se $\det(Ad_g) = 1$ per ogni $g \in G$.

$$(V,W) = \int_{G\times G} \langle (dL_g) \circ (dR_h)\ (V),\ (dL_h) \circ (dR_g)\ (W) \rangle d\mu(g)d\mu(h)$$

si ottiene una metrica riemanniana invariante a destra e a sinistra.

Ricordiamo inoltre che le geodetiche uscenti da e, rispetto ad una metrica invariante a sinistra, sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$\dot{\gamma}_X(t) = (dL_{\gamma(t)})(X) \quad , \quad \gamma_X(0) = e$$

e quindi se X è un campo di vettori invariante a sinistra $\nabla_X X = 0$.

3.4.1. PROPOSIZIONE. Sia G un gruppo di Lie con una metrica invariante a sinistra e a destra (biinvariante). Siano X,Y,Z,W campi di vettori su G invarianti a sinistra. Allora

i) $([X,Y],Z) = -(X,[Y,Z])$

ii) $R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[[X,Y],Z]$

iii) $(R(X,Y)Z,W) = \frac{1}{4}([X,Y],[Z,W])$.

Dimostrazione. Se X,Y sono invarianti a sinistra, anche $X+Y$ lo è e dunque

$$0 = \nabla_{X+Y}X+Y = \nabla_X Y + \nabla_Y X \quad \text{per cui} \quad \nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y].$$

Inoltre $0 = Y(X,Z) = (\nabla_Y X,Z) + (X,\nabla_Y Z)$ e quindi $([Y,X],Z) = -(X,[Y,Z])$.

Usando ancora l'uguaglianza $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$ si ottiene la ii)

$$R(X,Y)Z = -\nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]}Z = \dots = \frac{1}{4}[[X,Y],Z].$$

Analogamente si verifica la iii).■

3.4.2. COROLLARIO. Nelle ipotesi della proposizione precedente si verifica $K(X,Y) \geq 0$

$K(X,Y) = 0$ se e solo se $[X,Y] = 0$.

Indichiamo con $\mathcal{C} = \{X \in \mathfrak{g} / [X,Y] = 0, \ \forall Y \in \mathfrak{g}\}$ il centro di $\mathfrak{g}$.

3.4.3. TEOREMA. Un gruppo di Lie con metrica biinvariante e centro nullo è compatto ed ha gruppo fondamentale $\pi_1(G)$ finito.

Dimostrazione. Sia X un vettore unitario in g e $\{X, X_1, \ldots X_{m-1}\}$ una base ortonormale. Poiché $\mathcal{C} = \{0\}$ esiste $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ tale che $[X, X_i] \neq 0$.

Ne segue allora

$$C(X) = \sum_{i=1}^{n-1} (R(X,X_i)X, X_i) > 0$$

inoltre $C(X)$ è una funzione continua sulla sfera unitaria $S = \{X \in \mathfrak{g} / \ ||X|| = 1\}$ e quindi esiste K_o tale che $C(X) \geq K_o > 0$ per ogni $X \in S$.

La conclusione segue allora dal teorema di Myvers-Bonnet 3.3.5..■

Ricordando il teorema di struttura dei gruppi di Lie commutativi (un gruppo di Lie commutativo G si può ottenere dal prodotto

$G \cong S^1 x \ldots x S^1 x \mathbb{R}^k$ dove S^1 è il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi di modulo unitario ed $\mathbb{R}^k$ il gruppo additivo sostegno di uno spazio vettoriale di dimensione k) si ottiene la seguente caratterizzazione dei gruppi con metrica biinvariante.

3.4.4. COROLLARIO. *Un gruppo di Lie* G *possiede una metrica biinvariante se e solo se* $G = G' \times S^1 \times \ldots S^1 \times \mathbb{R}^k$ *con* G' *compatto.*

Dimostrazione. Se $G = G' \times S^1 \times \ldots \times S^1 \times \mathbb{R}^k$ allora possiede una metrica biinvariante poiché G' è compatto (si ricordino le considerazioni fatte all'inizio del paragrafo) e gli altri fattori sono abeliani. Viceversa se G possiede una metrica biinvariante e $\mathfrak{z}$ è il centro di $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{z}^{\perp} = \{X \in \mathfrak{g} / (X,Y) = 0 \quad \forall\, Y \in \mathfrak{z}\}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{z}^{\perp}$ e quindi G è prodotto $G = G' \times G''$ di due gruppi di Lie le cui algebre sono rispettivamente $\mathfrak{g}' = \mathfrak{z}^{\perp}$ e $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{z}$.

Ne segue allora che G' è compatto per il teorema 3.4.3. e G'' è abeliano. ∎

Sia G un gruppo di Lie con una metrica biinvariante e H un sottogruppo chiuso. Introdotta nel gruppo G/H la topologia quoziente modulo la relazione $x \sim y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$, si può definire canonicamente su G/H una struttura di varietà differenziabile rispetto alla quale la proiezione $\pi : G \to G/H$ è differenziabile.

Siano $\mathfrak{g}$ ed $\mathfrak{h}$ le algebre di Lie di G ed H rispettivamente e $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}$; allora $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ e $T_{\pi(e)} G/H \cong \mathfrak{m}$

Poiché la metrica su G è biinvariante esiste un'unica metrica su G/H tale che $d\pi_{|(dL_x)(\mathfrak{m})} : (d\,L_x)(\mathfrak{m}) \to T_{\pi(x)} G/H$ è un'isometria.

G/H dotato di una tale metrica si dice uno spazio omogeneo normale e $\pi : G \to G/H$ risulta una coimmersione riemanniana.

3.4.5. DEFINIZIONE. Uno spazio omogeneo G/H si dice simmetrico se G è connesso ed è dotato di un'involuzione $\sigma : G \to G$, cioé di un automorfismo analitico σ tale che $\sigma^2 = I_G$, e se il sottogruppo chiuso H è contenuto nello insieme G dei punti fissati di σ e contiene la componente di e in G.

Posto

$$\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g} \mid (d\sigma)_e X = -X\} \qquad \mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid (d\sigma)_e X = X\}$$

risulta

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m} \quad , \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{h} \quad , \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$$

Tale decomposizione inoltre è invariante per traslazioni sinistre per elementi di G e destre per elementi di H. Inoltre σ induce un automorfismo analitico involutivo su G/H.

Sia $(G/H, \sigma)$ uno spazio simmetrico e $(\ ,\ )$ una metrica in G invariante per traslazioni sinistre per elementi di G, per traslazioni destre per elementi di H e per σ.

Se $X \in \mathfrak{h}$ e $Y \in \mathfrak{m}$, $(X,Y) = (\sigma(X), \sigma(Y)) = -(X,Y)$ e dunque $\mathfrak{h}$ ed $\mathfrak{m}$ sono ortogonali.

La metrica di G induce in modo naturale una metrica su G/H (ovviamente invariante per σ).

3.4.6. PROPOSIZIONE. Se $(G/H, \sigma)$ è dotato della struttura riemanniana suddetta si ha

$$K((d\pi)_e(X) \ , (d\pi)_e(Y)) = \| [X,Y] \|^2$$

dove K è la curvatura sezionale in G/H e $\pi : G \to G/H$ la suriezio ne canonica.

ESEMPIO 1). Come è noto $S^m = \dfrac{SO(m+1)}{SO(m)}$ è un gruppo di Lie; consideriamo in $T_I SO(m+1)$ il prodotto scalare

$$(X,Y) = -\frac{1}{2} \text{ traccia } (X \cdot Y)$$

e l'involuzione σ in $SO(m+1)$ definita da

$$\sigma(X) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} .$$

Estendendo (,) per traslazioni sinistre si ottiene su $SO(m+1)$ una metrica invariante per σ .

Indicando con Skew(m+1) l'insieme delle matrici antisimmetriche si vede facilmente che $\text{Skew}(m+1) \cong T_I SO(m+1)$ $(\exp A \in O(m+1) \Leftrightarrow A \in \text{Skew}(m+1))$.

Se $C \in \text{Skew}(m)$, $c = (c_1 c_2 \dots c_m)$ e c^t è la matrice trasposta di c è immediato vedere che Skew(m+1) e $\mathfrak{m}$ sono formati rispettivamente dalle matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & c \\ c^t & C \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c^t & 0 \end{pmatrix} .$$

Se $X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x^t & 0 \end{pmatrix}$ ed $Y = \begin{pmatrix} 0 & y \\ y^t & 0 \end{pmatrix}$ sono due matrici di $\mathfrak{m}$ risulta

$(X,Y) = \Sigma_i x_i y_i$ e $||X|| = (\Sigma_i x_i^2)^{\frac{1}{2}}$.

Se inoltre X e Y sono ortonormali, in base alla 3.4.6. si ha

$$K((d\pi)_e(X), (d\pi)_e(Y)) = ||[X,Y]||^2 = -\frac{1}{2} \text{ traccia } ((\Sigma_k (x_i y_k - y_i x_k) \cdot (x_k y_j - y_k x_j))_{i,j}) = \frac{1}{2} \Sigma_{i,k} (x_i y_k - y_i x_k)^2 = 1.$$

ESEMPIO 2). Consideriamo lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{C}P^m = \frac{U(m+1)}{U(1) \times U(m)}$ con la metrica $(X,Y) = -R$ traccia $(X \cdot Y)$. Si vede subito che l'algebra di Lie di $U(m+1)$ è l'algebra delle matrici antiermitiane; si verifica facilmente inoltre che l'involuzione $\sigma(X) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ munisce $\mathbb{C}P^m$ di una struttura di spazio simmetrico.

Procedendo analogamente a quanto fatto nel caso precedente si vede che $\mathfrak{m}$ è lo spazio delle matrici del tipo $X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -{}^t\bar{x} & 0 \end{pmatrix}$ e quindi se $X, Y \in \mathfrak{m}$ sono ortonormali e se Ψ è l'angolo formato dai vettori di $\mathbb{R}^{2m}$ immagine di x ed y tramite l'identificazione canonica di $\mathbb{C}^m$ con $\mathbb{R}^{2m}$ risulta

$$K((d\pi)_e(X), (d\pi)_e(Y)) = ||[X,Y]||^2 = 1 + 3 \cos^2\Psi.$$

In particolare $1 \leq K \leq 4$.

Dai teoremi visti nei paragrafi precedenti si ottiene allora il seguente risultato.

3.4.7. PROPOSIZIONE. Se $p \in \mathbb{C}P^m$ e γ è una geodetica uscente da p allora il primo punto coniugato rispetto a p lungo γ è a distanza $\frac{\pi}{2}$ ed ha ordine 1, il secondo si trova a distanza doppia ed ha ordine $m-1$, il terzo a distanza tripla ed ha ordine 1 e così via.

Notiamo come un gruppo di Lie connesso G possa dotarsi di una struttura canonica di spazio simmetrico.

Infatti consideriamo $G^2 = G\times G$ e l'involuzione $\sigma : G^2 \to G^2$ definita da $\sigma(x_1,x_2) = (x_2,x_1)$; ovviamente l'insieme dei punti fissi è la diagonale Δ che è isomorfa a G ed è un sottogruppo chiuso ed inoltre

$G^2/\Delta \cong G$.

3.4.8. TEOREMA. Sia $(G/H,\sigma)$ uno spazio simmetrico e $p \in G/H$. Esiste allora un'isometria $I_p : G/H \to G/H$ tale che $I_p(p) = p$ e se γ è una geodetica tale che $\gamma(0) = p$ allora $I_p(\gamma(t)) = \gamma(-t)$.

Dimostrazione(cenno). σ induce un'isometria di G/H in sé che gode della proprietà suddetta per $p = \pi(e)$. Se $p \neq e$ sia $g \in G$ tale che $L_g(p) = \pi(e)$.

Allora $I_p = L_g \circ \sigma \circ L_{g^{-1}}$ fornisce l'isometria cercata.∎

OSSERVAZIONE. Si può dimostrare che una varietà M con una famiglia di isometrie come nell'enunciato del teorema precedente è uno spazio simmetrico.

3.4.9. PROPOSIZIONE. Siano X,Y,Z campi di vettori lungo una geodetica γ di uno spazio simmetrico $M = (G/H,\sigma)$ e paralleli lungo γ. Allora $R(X,Y)Z$ è parallelo lungo $\gamma^{(*)}$.

Dimostrazione. Se W è un campo di vettori parallelo lungo γ e $q = \gamma(c)$, $T = I_{\gamma(c/2)} \cdot I_p$ è un'isometria che porta p in q.

Risulta allora

$$(R(X_q,Y_q)Z_q,W_q) = (R((dT)_e(X_p),(dT)_e(Y_p))(dT)_e(Z_p),(dT)_e(W_p)) =$$

$$= (R(X_p,Y_p)Z_p,W_p) ,$$

cioé $(R(X,Y)Z,W)$ è costante per ogni campo parallelo W; le componenti, rispetto a un riferimento parallelo lungo γ, di $R(X,Y)Z$ sono quindi costanti e perciò $R(X,Y)Z$ è parallelo. ∎

Cerchiamo, ora, nel caso di spazi (localmente) simmetrici, soluzioni esplicite dell'equazione di Jacobi.

Sia $\gamma : R \to M$ una geodetica e $K_\gamma : T_{\gamma(0)}M \to T_{\gamma(0)}M$ la trasformazione lineare data da $K_\gamma(X) = R(\dot{\gamma}(0),X)\dot{\gamma}(0)$. Indichiamo con $k_1,\dots k_m$ gli autovalori di K_γ.

(*) Le varietà che godono della proprietà che $R(X,Y)Z$ è parallelo se X,Y,Z sono paralleli si dicono spazi localmente simmetrici (le simmetrie I_p in tali spazi possono definirsi solo localmente). Un noto teorema di Cartan ci assicura che se M è completa, semplicemente connessa e localmente simmetrica allora M è uno spazio simmetrico.

3.4.10. TEOREMA. I punti coniugati a $p = \gamma(0)$ lungo γ sono i punti $(\pi n/\sqrt{k_i})$ con $n \in (Z - \{0\})$ e k_i autovalore positivo di K_γ.

Dimostrazione(cenno). Innanzitutto notiamo che K_γ è autoaggiunto $(K_\gamma(X),Y) = (X,K_\gamma(Y))$ e quindi esiste una base ortonormale $\{X_1,\dots,X_m\}$ con $K_\gamma(X_i) = k_i X_i$. Trasportando gli X_i parallelamente lungo γ si ottiene un riferimento ortonormale parallelo rispetto al quale le componenti W_j di un campo di Jacobi soddisfano l'equazione $W_j''+e_j W_j = 0$ e quindi si ha facilmente la tesi. ■

In questo capitolo abbiamo cominciato a vedere come facendo delle ipotesi sulla curvatura si possono ottenere proprietà topologiche sulla varietà.

E' naturale a questo punto domandarsi se, inversamente, data una varietà con determinate proprietà topologiche sia possibile dedurre proprietà delle metriche che si possono definire sulla varietà stessa.Probabilmente non esiste ancora nessun metodo per ottenere risultati di questo tipo e pochissimi sono anche i risultati parziali.

Uno dei pochi risultati è che esistono varietà differenziabili omeomorfe a sfere che non ammettono metriche a curvatura positiva.

Il seguente esempio è ripreso da Cheeger-Hebin [8].

Sia $Sp(m)$ il gruppo delle matrici mxm ad elementi nel corpo dei quaternioni e tali che $A.\bar{A}^t = I$. $Sp(m)$ è un gruppo di Lie compatto ed è quindi dotabile di una metrica biinvariante. Consideriamo l'azione di $Sp(1)$ su $Sp(2)$ data da $* : Sp(1) \times Sp(2) \to Sp(2)$ definita ponendo

$$q * A = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \bar{q} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa azione è libera e lo spazio quoziente $Sp(2)/*$ risulta essere omeomorfo a S^7. Applicando i risultati precedenti è facile vedere che la curvatura sezionale è non negativa. Si può vedere inoltre che detta curvatura è strettamente positiva su un insieme denso ma non è noto se è ovunque strettamente positiva né se $Sp(2)/*$ è dotabile di un'altra metrica con curvatura strettamente positiva.

La ricerca di esempi di questo tipo ha interesse anche per dare direttive e suggerimenti in problemi di carattere generale. Infatti, ad esempio, una delle difficoltà maggiori nell'affrontare il problema della classificazione delle varietà a curvatura strettamente positiva è la mancanza di esempi, se si eccettuano le varietà classiche degli spazi proiettivi complessi e quaternionali e pochissime altre.