

I N T R O D U Z I O N E

Uno dei punti centrali in geometria differenziale è la ricerca delle relazioni tra invarianti metrici e topologici di varietà differenziabili.

Tra gli invarianti metrici la curvatura è stato, per il suo significato geometrico, uno dei più studiati. Già Gauss, con il suo "Teorema egregium" portava alla luce la natura intrinseca del concetto in un'epoca in cui tutte le varietà si supponevano immerse.

In questa direzione uno dei primi teoremi veramente significativi è il teorema di Gauss-Bonnet che lega un invariante metrico, l'integrale della curvatura, ad un invariante topologico, la caratteristica di Eulero-Poincarè.

Per un lungo periodo si è affrontato il problema con tecniche essenzialmente analitiche; lo studio delle forme differenziabili ed in particolare delle forme armoniche conduce infatti a risultati sulla coomologia della varietà essenzialmente per il tramite dei teoremi di Hodge e di de-Rham.

Una via più geometrica è stata invece portata avanti efficacemente negli anni 60, prendendo impulso soprattutto dai lavori di Rauch e di Topogonov; essa consiste nello studio del comportamento in grande delle geodetiche (metodi di confronto). In particolare questi metodi sono basati sul confronto tra il comportamento delle geodetiche su varietà con curvatura "simile".

Resta ancora insoluto però uno dei problemi più importanti: la classificazione delle varietà a curvatura positiva.

Importante e significativo in questa direzione è il lavoro di Cheeger e Gromoll [9] che essenzialmente riduce il problema alle

varietà compatte.

Una delle difficoltà maggiori nell'affrontare il problema è forse la mancanza di esempi. Infatti gli spazi omogenei di rango 1 (sfere e spazi proiettivi) sono gli unici esempi di varietà compatte a curvatura strettamente positiva, se si eccettua un numero molto ristretto di esempi non "standard" (vedi Wallach [27] e [28])

A questo punto una congettura naturale sebbene strettamente ingenua è che, fatta eccezione per pochi altri casi, gli spazi simmetrici di rango uno sono le uniche varietà compatte a curvatura positiva. Se non altro, quindi, sorge naturale il problema di studiare varietà "simili" a detti spazi.

Le presenti note, in cui C. Guido ha raccolto e sviluppato essenzialmente gli argomenti discussi in un seminario tenuto da me presso l'Università di Lecce nel 1974, presentano alcuni lavori in tale direzione e vogliono cercare di costruire un "ponte" tra la geometria differenziale elementare ed alcuni aspetti della ricerca attuale.

Nei primi due capitoli sono raggruppati alcuni richiami di geometria riemanniana con particolare riguardo alla teoria delle geodetiche.

Nel terzo capitolo si discutono alcuni teoremi classici in geometria riemanniana dal punto di vista dei teoremi di confronto ed alcuni esempi.

Il capitolo conclusivo contiene, con alcune limitazioni, la descrizione dei lavori di Allamingeon [2] Klingenberg [16] e [30] particolarmente interessanti nello studio di varietà "simili" a

spazi omogenei di rango 1.

L'intento, nello scrivere queste note, è di presentare gli argomenti suddetti in modo "leggibile" evitando dimostrazioni troppo lunghe o che richiedono troppe premesse e limitandosi d'altro canto, ove è sembrato più opportuno, ad accennare soltanto a definizioni e concetti basilari che si possono trovare senza difficoltà su testi ormai classici citati nella bibliografia e, dove occorre, tra le pagine stesse di questi appunti.

Ci auguriamo che la trattazione risulti abbastanza agile e possa servire almeno a chi voglia avere un'idea di alcune relazioni tra la "derivata prima" (topologia differenziale) e la "derivata seconda" (geometria differenziale) senza dover passare per un trattato.

Un ringraziamento alla Sig.na PALMA che ha curato il dattiloscritto.

Francesco MERCURI

I N D I C E

Summary	ii
Introduzione	iii
CAPITOLO I. VARIETA' RIEMANNIANE	
1.1 Connessioni su varietà riemanniane	1
1.2 Parallelismo e geodetiche. Applicazione esponenziale	9
1.3. Curvatura	23
CAPITOLO II. ELEMENTI DI TEORIA DELLE GEODETICHE	
2.1 Formule variazionali	31
2.2 Punti di taglio e punti coniugati	40
2.3 Luogo di taglio e luogo coniugato	49
CAPITOLO III. VARIETA' A CURVATURA DI SEGNO COSTANTE	
3.1 Sottovarietà e sottoimmersioni	60
3.2 Varietà a curvatura costante	67
3.3 Varietà a curvatura di segno costante	74
3.4 Gruppi di Lie e spazi simmetrici	78
CAPITOLO IV. I TEOREMI DI CONFRONTO	
4.1 Il teorema dell'indice e i teoremi di Rauch	89
4.2 Il teorema delle sfere	96
4.3 Varietà con luogo coniugato sferico	103
4.4 Cenni sul teorema di Topogonov	116
Appendice	119
Bibliografia	121

CAPITOLO I

VARIETA' RIEMANNIANE

1.1. CONNESSIONI SU VARIETA' RIEMANNIANE.

Richiamiamo alcune nozioni di geometria riemanniana soprattutto per fissare le notazioni.

Per "differenziabile" intenderemo sempre differenziabile di classe C^∞ ; se M è una varietà di dimensione m indicheremo con $T_p M$, $p \in M$, lo spazio tangente a M in p e con $T(M)$ il fibrato tangente. $\Gamma(M)$ sarà l'algebra dei campi di vettori su M e $\mathcal{F}(M)$ l'anello delle funzioni differenziabili a valori reali. Se $X \in \Gamma(M)$ indichiamo con X_p il valore di X nel punto $p \in M$. Se $f : M \rightarrow N$, con M ed N varietà differenziabili, è un'applicazione differenziabile, indicheremo con $\Gamma(f)$ l'insieme dei campi di vettori lungo f , cioè le applicazioni $X : M \rightarrow T(N)$ differenziabili tali che $\pi_N \circ X = f$ essendo $\pi_N : T(N) \rightarrow N$ la proiezione canonica del fibrato tangente su N .

1.1.1. - DEFINIZIONE. Per metrica riemanniana su M intenderemo una famiglia di forme bilineari, simmetriche e definite positive

$$\{(\cdot, \cdot)_p / p \in M \text{ e } (\cdot, \cdot)_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}\}$$

tale che se $X, Y \in \Gamma(M)$ l'applicazione $p \mapsto (X_p, Y_p)$ è in $\mathcal{F}(M)$ cioè è differenziabile.

La coppia costituita da una varietà e da una metrica riemanniana sul-

la varietà sarà detta varietà riemanniana.

Indicheremo con $||X_p||$, per $X_p \in T_p M$, la norma del vettore tangente rispetto alla metrica riemanniana definita sulla varietà, cioè $||X_p|| = (X_p, X_p)^{\frac{1}{2}}$.

Se $f : M \rightarrow N$ è una applicazione differenziabile sia

$df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ il suo differenziale. Nel caso $M = \mathbb{R}$ se $\frac{d}{ds}$

è la sezione standard di $T\mathbb{R}$ definiamo vettore velocità di f in

$t_0 \in \mathbb{R}$ il vettore tangente su N , $\dot{f}(t_0) = df_{t_0} \left(\frac{d}{ds} \right) \in T_{f(t_0)} N$.

Se $\{x_1, \dots, x_m\}$ è un sistema di coordinate locali in un intorno di $f(t_0)$ e se $f_i(t)$ sono le coordinate del generico punto $f(t)$ ri-

sulta ovviamente $\dot{f}(t) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{df_i}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Sia ora M una varietà riemanniana e $\gamma : (a,b) \rightarrow M$ una curva differenziabile. Ricordiamo che si definisce la lunghezza di γ , $L_a^b(\gamma)$,

ponendo $L_a^b(\gamma) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} ||\dot{\gamma}(t)|| dt$.

E' ben noto allora che $L_a^b(\gamma)$ non dipende dalla particolare parametrizzazione e che è ben definita anche quando γ è solo continua in (a,b) e differenziabile nel complementare di un insieme finito (cioè differenziabile a tratti). Inoltre se denotiamo con $\Omega(p,q)$ l'insieme delle curve

$\gamma : [0,1] \rightarrow M$ differenziabili a tratti e tali che $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$ la funzione

$$d(p,q) = \inf_{\gamma \in \Omega(p,q)} L_0^1(\gamma)$$

è una distanza in M compatibile con la topologia di M .

Se M è una sottovarietà di \mathbb{R}^k , $X \in T_p M$ e $Y \in \Gamma(M)$, ha senso considerare la derivata direzionale di Y rispetto a X nel modo usuale. Il vettore che si ottiene non è in generale tangente a M ; se però componiamo detta operazione con la proiezione sul piano tangente otteniamo una applicazione

$$\nabla_p : T_p M \times \Gamma(M) \rightarrow T_p M$$

che gode delle seguenti proprietà:

$$1) \nabla_p \text{ è } \mathbb{R}\text{-bilineare, cioè } \forall a,b \in \mathbb{R}, X_p, X'_p \in T_p M \text{ e } Y, Y' \in \Gamma(M)$$

risulta

$$\nabla_p(X_p, aY+bY') = a \nabla_p(X_p, Y) + b \nabla_p(X_p, Y')$$

$$\nabla_p(aX_p + bX'_p, Y) = a \nabla_p(X_p, Y) + b \nabla_p(X'_p, Y)$$

$$2) \nabla_p(X_p, fY) = X_p(f) Y + f(p) \nabla_p(X_p, Y) \quad \forall f \in \mathcal{F}(M), X_p \in T_p M, Y \in \Gamma(M).$$

$(X_p(f))$ è la derivata direzionale di f rispetto a X_p

3) Se $X, Y \in \Gamma(M)$ l'applicazione $M \rightarrow TM$ data da $p \mapsto \nabla_p(X, Y)$

è un campo di vettori (differenziabile) su M .

Le considerazioni precedenti permettono allora d'introdurre un concetto formale di derivazione di campi di vettori per varietà, non necessariamente immerse, nel modo seguente.

1.1.2. DEFINIZIONE. Sia M una varietà differenziabile. Diremo connessione su M una applicazione

$$\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$$

tale che

1') ∇ è \mathbb{R} -bilineare

2') ∇ è $\mathcal{F}(M)$ -lineare nel primo argomento (cioè $\nabla(fX, Y) = f \nabla(X, Y)$ per $X, Y \in \Gamma(M)$ $f \in \mathcal{F}(M)$)

3') $\nabla(X, fY) = X(f) Y + f \nabla(X, Y)$.

Indicheremo in seguito con $\nabla_X Y$ il campo di vettori $\nabla(X, Y)$ e si chiamerà anche derivata covariante di Y rispetto a X . Naturalmente data una famiglia $\{ \nabla_p \}_{p \in M}$ di operatori verificanti le 1) 2) 3) si può definire una connessione affine tale che $(\nabla_X Y)_p = \nabla_p(X, Y)$ e viceversa è facile vedere che per un'applicazione ∇ che verifica la definizione 1.1.2. $(\nabla_X Y)_p$ dipende solo dal valore di X in p e quindi ∇ definisce una famiglia $\{ \nabla_p \}_{p \in M}$ di applicazioni verificanti le 1) 2) 3).

1.1.3. DEFINIZIONE. Se M è una varietà riemanniana diremo che una con-

nessione ∇ su M è compatibile (o riemanniana) se risulta $\forall X, Y, Z \in \Gamma(M)$

a) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (*) cioè ∇ è simmetrica.

b) $X(Y, Z) = (\nabla_X Y, Z) + (Y, \nabla_X Z)$.

Si ha allora il seguente teorema (per la dimostrazione si consulti un qualunque testo di geometria riemanniana).

1.1.4. TEOREMA. Se M è una varietà riemanniana esiste una ed una sola connessione su M verificante a) e b).

In seguito quando parleremo di connessione su una varietà riemanniana ci riferiremo sempre a quella riemanniana la cui esistenza è assicurata dal teorema precedente.

Se $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ è una curva differenziabile, avremo in seguito necessità di "derivare" un campo di vettori $V \in \Gamma(\gamma)$ rispetto a $\dot{\gamma}$. Questo sarà possibile a norma del seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione.

1.1.5. TEOREMA. Se M è una varietà riemanniana con connessione riemanniana ∇ , e $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ è una curva differenziabile, esiste un unico operatore

$$\frac{D}{dt} : \Gamma(\gamma) \rightarrow \Gamma(\gamma)$$

tale che se $V, W \in \Gamma(\gamma)$

1) $\frac{D}{dt} (V + W) = \frac{D}{dt} (V) + \frac{D}{dt} (W)$

(*) $[,]$ indica l'operatore parentesi di Lie cioè $[X, Y]$ è il campo di vettori che su $f \in \mathcal{F}(M)$ vale $X(Y(f)) - Y(X(f))$.

2) se $f \in \mathcal{F}((a,b))$, $\frac{D}{dt}(fV) = \left(\frac{df}{dt}\right) V + f \frac{D}{dt}(V)$

3) se $Y \in \Gamma(M)$ e $Y_{\gamma(t)} = V(t) \quad \forall t \in (a,b)$

allora $\left(\frac{D}{dt}(V)\right)_s = \nabla_{\dot{\gamma}(s)} Y \quad \forall s \in (a,b)$

Il campo di vettori lungo γ , $\frac{D}{dt}(V)$, sarà spesso indicato con $\frac{DV}{dt}$ o, quando non vi sia possibilità di equivoco, con V' .

A volte può essere utile avere un'espressione in coordinate locali di ∇ e $\frac{D}{dt}$. Sia allora $p \in M$ e $\{x_1, \dots, x_m\}$ un sistema di coordinate locali in un intorno U di p . Sia $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right\}$ la base associata in $TM|_U$ e poniamo

1.1.6. $\Gamma_{ij}^k = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right)$

Le funzioni Γ_{ij}^k determinano completamente ∇ in U .

Infatti se $X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \sum_{j=1}^m Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}$, usando le proprietà

formali di ∇ si ottiene facilmente

1.1.7. $\nabla_X Y = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^m X^i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(Y^k) + \sum_{j=1}^m \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Analogamente se $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ è una curva differenziabile

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$ e $V = \sum_{i=1}^m V_i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \gamma(t)$ è un campo di vet-

tori lungo γ .

$$1.1.8. \quad \frac{DV}{dt} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{dV_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^m \frac{d\gamma_i(t)}{dt} \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) V_j \right) \frac{\partial}{\partial x_k} .$$

Una situazione in cui ci troveremo spesso è la seguente:

sia $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ una "superficie parametrizzata", cioè una funzione differenziabile, e $V \in \Gamma(S)$. Se x, y sono le coordinate correnti in \mathbb{R}^2 e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ la base ad esse associata possiamo definire la deriva-

ta di V lungo $\frac{\partial}{\partial x}$ o $\frac{\partial}{\partial y}$ nel modo seguente.

Fissato $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sia $S_{x_0}: \mathbb{R} \rightarrow M$ la curva $S_{x_0}(t) = S(x_0, t)$.

Definiamo allora $\left(\frac{DV}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)} = \left(\frac{DV}{dt} \right)_{t=y_0}$ ove $\frac{D}{dt}$ è l'operatore

introdotto precedentemente.

Analogamente per $\left(\frac{DV}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)}$. Si definisce allora per ogni (x_0, y_0)

una coppia di vettori in $T_{S(x_0, y_0)} M$.

Usando la 1.1.8. è facile vedere che le applicazioni

$$(x,y) \mapsto \frac{DV}{\partial x}$$

$$(x,y) \mapsto \frac{DV}{\partial y}$$

definiscono campi di vettori lungo S (cioè sono differenziabili).

1.1.9. PROPOSIZIONE. Se una connessione ∇ verifica la a) della definizione 1.1.3. e $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ è una applicazione differenziabile, allora

$$\frac{D}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{D}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial x} \quad (*)$$

Dimostrazione. In termini di coordinate locali mediante la 1.1.8 si ottiene

$$\frac{D}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial y} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 S_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j,k=1}^m \frac{\partial S_i}{\partial y} \frac{\partial S_j}{\partial x} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

avendo posto $S(x,y) = (S_1(x,y), \dots, S_m(x,y))$; analoga espressione si trova per il secondo membro dell'uguaglianza.

Ma per la a)

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right], \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \Gamma_{ji}^k \end{aligned}$$

$$(*) \quad \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)} = dS_{(x_0, y_0)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$$



([$\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}$] = 0 per la simmetria della derivata seconda in R^2) e

quindi si ha la tesi. ■

1.2. PARALLELISMO E GEODETICHE - APPLICAZIONE ESPONENZIALE

Sia M una varietà riemanniana, ∇ e $\frac{D}{dt}$ gli operatori di derivazione associati alla metrica introdotti nel paragrafo precedente.

1.2.1. DEFINIZIONE. Se $\gamma : (a,b) \rightarrow M$ è una curva differenziabile e $V \in \Gamma(\gamma)$, diremo che V è parallelo lungo γ se $\frac{DV}{dt} = 0$

Intuitivamente nel caso che γ è una curva su una superficie M e "facciamo rotolare M su un piano lungo γ " un campo di vettori lungo γ risulterà parallelo se il corrispondente campo di vettori sul piano indotto dal "rotolamento" è un campo parallelo nel senso ovvio.

1.2.2. PROPOSIZIONE. Se $\gamma : R \rightarrow M$ è una curva differenziabile e $X_p \in T_p M$, $p = \gamma(o)$, allora esiste un unico campo di vettori $X \in \Gamma(\gamma)$

tale che:

- 1) X è parallelo lungo γ
- 2) $X(o) = X_p$.

Dimostrazione. L'equazione $\frac{DX}{dt} = 0$ in coordinate locali è una equazione differenziale lineare del 1° ordine (vedi 1.1.8.) per cui i ben noti teoremi sulle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie

ci assicurano la tesi. ■

1.2.3. COROLLARIO. Se $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ è una curva differenziabile e se

$t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, l'isomorfismo $T_{t_1}^{t_2} : T_{\gamma(t_1)} M \rightarrow T_{\gamma(t_2)} M$ che al vettore

$X_{\gamma(t_1)}$ associa il valore in t_2 dell'unico campo X parallelo lungo

γ tale che $X(t_1) = X_{\gamma(t_1)}$ è una isometria.

Dimostrazione. Osserviamo intanto che per la proposizione precedente

l'applicazione $T_{t_1}^{t_2}$ è biunivoca e che dalla \mathbb{R} -linearità di $\frac{D}{dt}$

segue che $T_{t_1}^{t_2}$ è lineare; inoltre se X è parallelo lungo γ

$$\frac{d}{dt} (\|X\|^2) = \dot{\gamma}(t)(X, X) = 2\left(\frac{DX}{dt}, X\right) = 0$$

dunque $T_{t_1}^{t_2}$ conserva la norma (e quindi il prodotto scalare). ■

Un'osservazione che ci sarà particolarmente utile nei calcoli in seguito è la seguente. Sia $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ una curva differenziabile e

$a < c < b$. Sia $\{P_1, \dots, P_m\}$ una base ortonormale in $T_{\gamma(c)} M$. Trasportando parallelamente $\{P_i\}$ lungo γ si determina per ogni $t \in (a, b)$ una base

$\{P_i(t) = T_c^t(P_i)\}$ che è ancora ortonormale. Se $X \in \Gamma(\gamma)$ si può scrivere

re $X(t) = \sum_{i=1}^m X^i(t) P_i(t)$ con $X^i(t) \in \mathcal{M}((a, b))$. Risulta allora

$$\frac{DX}{dt}(t) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{dX^i}{dt}(t) \right) P_i(t) .$$

1.2.4. DEFINIZIONE. Diremo che una curva $\gamma : (a,b) \rightarrow M$ è una geodetica se $\dot{\gamma}(t)$ è parallelo lungo γ .

1.2.5. PROPOSIZIONE. Sia $p \in M$ e $X_p \in T_p M$. Esiste allora $\epsilon > 0$ ed un'unica curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tale che

- 1) γ è una geodetica
- 2) $\gamma(0) = p$
- 3) $\dot{\gamma}(0) = X_p$

Dimostrazione. L'equazione $\frac{D}{dt} \dot{\gamma}(t)$ è (in coordinate locali) una equazione differenziale ordinaria del 2° ordine. I teoremi ricordati nella dimostrazione della proposizione 1.2.2. ci assicurano allora la tesi. ■

OSSERVAZIONI: 1) Se M è una superficie di R^3 ritroviamo il concetto di geodetica come curva il cui vettore accelerazione $\ddot{\gamma} = \frac{D\dot{\gamma}}{dt}$ è perpendicolare ad M . (si ricordino le considerazioni fatte prima della definizione 1.1.2.).

2) Dalla dimostrazione del corollario 1.2.3. segue che se γ è una geodetica $||\dot{\gamma}(t)|| = c \in R$ per ogni valore del parametro t e pertanto $L_o^s(\gamma) = \int_0^s c dt = sc$. Quindi una geodetica è sempre para-

metrizzata con parametro proporzionale alla lunghezza d'arco.

Sia $p \in M$ e $X_p \in T_p M$. Esiste allora un'unica geodetica

$\gamma : (-2\varepsilon, 2\varepsilon) \rightarrow M$ con condizioni iniziali $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = X_p$. Sia

$\varepsilon_1 < \varepsilon$ e $|t| < 2$; allora $|t\varepsilon_1| < 2\varepsilon$ e quindi $\gamma(\varepsilon_1 t)$ è definita per $|t| < 2$ e $\alpha(t) = \gamma(\varepsilon_1 t)$ è una geodetica con condizioni iniziali $\alpha(0) = p$ e $\dot{\alpha}(0) = \varepsilon_1 X_p$ definita nell'intervallo $(-2, 2)$. Poiché le soluzioni di un'equazione differenziale dipendono differenziabilmente (se le funzioni che intervengono nell'equazione sono differenziabili) dalle condizioni iniziali, esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni vettore X_p in un opportuno intorno di 0 la soluzione con dati iniziali p, X_p è definita in $(-\varepsilon, \varepsilon)$ con ε indipendente da X_p . Se ne conclude che esiste $\varepsilon_1 > 0$ tale che se $\|X_p\| < \varepsilon_1$ la geodetica con dati iniziali p, X_p è definita in $(-2, 2)$.

Si ha allora la seguente

1.2.6. PROPOSIZIONE. L'insieme N_p dei vettori $X_p \in T_p M$ tali che la geodetica con dati iniziali p e X_p è definita in un intervallo del parametro contenente 1 è un intorno di $0 \in T_p M$.

Se $X_p \in T_p M^{(*)}$ indichiamo con γ la geodetica di dati iniziali p, X_p .

1.2.7. DEFINIZIONE. Definiamo, per $X_p \in N_p$, $\exp_p X = \gamma_X(1)$.

$\exp_p : N_p \rightarrow M$ si dice applicazione esponenziale.

(*) Quando il contesto non crea ambiguità indichiamo semplicemente con una lettera X, Y, \dots un vettore tangente in un punto della varietà.

Il nome deriva dal caso classico del gruppo lineare $GL(m, \mathbb{R})$.

In tal caso infatti se I è la matrice identica $T_I GL(m, \mathbb{R}) = M(m, \mathbb{R})$ e la geodetica uscente da I con vettore velocità $A \in M(m, \mathbb{R})$ è il sottogruppo ad un parametro e^{tA} e quindi risulta

$$\exp_I A = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

1.2.8. PROPOSIZIONE. \exp_p è un diffeomorfismo di un intorno aperto di
 0 in $T_p M$ su un intorno aperto di p in M .

Dimostrazione. Poiché le soluzioni di un'equazione differenziale dipendono differenziabilmente dalle condizioni iniziali e N_p è un intorno di 0 allora \exp_p è differenziabile in un intorno di 0 . Inoltre, previa l'usuale identificazione $T_p M = T_o(T_p M)$, $(d \exp_p)_o(X) = X \quad \forall X \in T_p M$ in quanto il segmento $\{tX \mid -1 < t < 1\}$ è mandato sulla geodetica γ_X e quindi $(d \exp_p)_o X$ è il vettore tangente a γ_X in 0 cioè X . La conclusione segue dal teorema delle funzioni inverse. ■

Se U è un intorno di $0 \in T_p M$ tale che $\exp_p|_U$ sia un diffeomorfismo, $\exp_p|_U$ ci fornisce un sistema di coordinate locali, dette normali, in un intorno $V = \exp_p(U)$ di p in M .

Un tale sistema di coordinate realizza formalmente l'idea intuitiva di proiettare localmente lo spazio tangente sulla varietà facendo corrispondere alle rette per l'origine di $T_p M$ le geodetiche per p su M . Inoltre è un tipo di coordinate particolarmente utile nei calcoli locali in

quanto, detta $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}$ la base naturale associata alle coordinate

normali (x_1, \dots, x_m) in $T(M)|_V$ risulta $\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_q = 0 \quad \forall q \in V$

e se $X_p \in T_p M$, $\nabla_{X_p} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0$.

OSSERVAZIONI : 3) Dato $X_p \in T_p M$, la curva $t \mapsto \exp_p(tX_p)$ è la geodetica di dati iniziali p e X_p

4) Se $\gamma(t) = \exp_p(tX_p)$ allora per ogni valore del parametro t , $||\dot{\gamma}(t)|| = ||X_p||$ (*). Ne segue allora che \exp_p è un'isometria lungo i raggi, cioè se X_p e Y_p sono vettori paralleli in $T_p M$, cioè se $X_p = KY_p$, allora $||\exp_p X_p - \exp_p Y_p|| = d(\exp_p X_p, \exp_p Y_p)$.

Estendiamo ora l'applicazione esponenziale al fibrato tangente $TM \xrightarrow{\pi} M$.

Sia $N = \{X \in T(M) / \exp_{\pi(X)} X \text{ è definito}\}$.

Possiamo allora definire

$$\text{Exp} : N \rightarrow M \times M, \quad \text{Exp}(X) = (\pi(X), \exp_{\pi(X)} X)$$

N è ovviamente un intorno della zero sezione in $T(M)$ e Exp è una appli

(*) infatti $||\dot{\gamma}(t)|| = ||\dot{\gamma}(0)|| = ||X_p||$ per l'osservazione 2).

cazione differenziabile.

1.2.9. PROPOSIZIONE. Exp è un diffeomorfismo di un intorno della zero sezione in $T(M)$ su un intorno della diagonale in $M \times M$.

Dimostrazione. Chiaramente se $p \neq q$, $X_p \in T_p M$, $X_q \in T_q M$ allora $\text{Exp } X_p \neq \text{Exp } X_q$. Inoltre se (x_1, \dots, x_m) è un sistema di coordinate locali in un intorno di $p \in M$ e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}$ la base associata in $T(M)$ e se un vettore in $T(M)$ vicino al vettore nullo in $T_p M$ ha coordinate $(x_1, \dots, x_m; V_1, \dots, V_m)$ e risulta

$$\begin{aligned} \text{Exp}(x_1, \dots, x_m; V_1, \dots, V_m) &= (x_1, \dots, x_m; \exp_{(x_1, \dots, x_m)} \sum_{i=1}^m V_i \frac{\partial}{\partial x_i}) = \\ &= (x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m; V_1, \dots, V_m), \dots, f_m(x_1, \dots, x_m; V_1, \\ &\dots, V_m); g_1(x_1, \dots, x_m; V_1, \dots, V_m), \dots, g_m(x_1, \dots, x_m; V_1, \dots, V_m)), \end{aligned}$$

allora ovviamente

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_o &= \delta_{ij} & \text{(b)} \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial V_j} \right)_o &= 0 \\ \text{(c)} \quad \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_k} \right)_o &= \delta_{ik} & \text{(d)} \quad \left(\frac{\partial g_i}{\partial V_k} \right)_o &= \delta_{ik} \quad ; \end{aligned}$$

la (a) e (b) sono ovvie, la (c) viene dal fatto che $\text{Exp}_p 0 = p$ quindi per $V = 0$ $g_i = x_i$, la (d) viene dalla dimostrazione della proposizione

1.2.8. .

La tesi segue allora dal teorema delle funzioni inverse essendo $(d \text{Exp})_{(p;0)}$ non singolare. ■

Procediamo ora ad uno studio "locale" del comportamento delle geodetiche uscenti da un punto

1.2.10. TEOREMA . Per ogni $p \in M$ esiste un intorno U_p di p e $\epsilon > 0$ tale che ogni coppia di punti in U_p è congiunta da un'unica geodetica di lunghezza minore di $\epsilon^{(*)}$. Inoltre questa geodetica dipende differenzialmente dai due punti $(**)$.

Dimostrazione. Per 1.2.9. esiste un intorno U di $(p,0) \in T(M)$ tale che $\text{Exp}|_U$ è un diffeomorfismo su un intorno aperto di (p,p) in $M \times M$.

Possiamo ovviamente supporre che U sia della forma $\{(q,V) \mid q \text{ è in un intorno di } p \text{ e } ||V|| < \epsilon\}$.

Si ha allora la tesi non appena si ricordi che la lunghezza del vettore tangente ad una geodetica è costante e dunque

$$\int_0^1 || \frac{d}{dt} \exp_q tV || dt = \int_0^1 ||V|| dt < \epsilon . \blacksquare$$

Caratterizziamo ora le geodetiche mediante una proprietà di "minimalità locale".

(*) Sarebbe possibile dimostrare che per un'opportuna scelta di ϵ , tale geodetica è completamente contenuta in U_p , cioè che U_p è un "intorno convesso".

(**) Esplicitamente questo significa che l'applicazione di $U_p \times U_p$ in $U_p \times TM|_{U_p}$ data da $(q_1, q_2) \mapsto (q_1, \dot{\gamma}(0))$, dove γ è la geodetica in questione da q_1 a q_2 , è differenziabile.

1.2.11. TEOREMA. Siano $\epsilon \in U_p$ come in 1.2.10 e $\gamma: [0,1] \rightarrow M$ una geodetica di lunghezza minore di ϵ . Sia inoltre $\omega: [0,1] \rightarrow M$ una curva differenziabile a tratti congiungente $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$.

Allora $L(\gamma) \leq L(\omega)$ e $L(\gamma) = L(\omega)$ se e solo se

$$\{\gamma(t) \mid t \in [0,1]\} = \{\omega(t) \mid t \in [0,1]\}^{(*)}$$

Premettiamo due lemmi che insieme costituiscono il cosiddetto "lemma di Gauss". In essi useremo le stesse notazioni del teorema enunciato sopra.

1.2.12. LEMMA. Consideriamo in U_p per ogni $r_0 \in (0, \epsilon)$ l'insieme

$$\Sigma r_0 = \{\exp_p v \mid \|v\| = r_0\}$$

Allora le geodetiche uscenti da p sono curve ortogonali a Σr_0 (**).

(*) Il teorema si può enunciare intuitivamente dicendo che le geodetiche sono caratterizzate, a meno di un cambiamento di parametro, dal fatto che minimizzano la lunghezza tra tutte le curve che congiungono due punti abbastanza vicini.

(**) Poiché $\exp_p|_{U_p}$ è un diffeomorfismo e $\Sigma r_0 = \exp_p(S_{r_0})$, $S_{r_0} =$

$=\{v \in T_p M \mid \|v\| = r_0\}$, Σr_0 è una ipersuperficie di M .

Dimostrazione. Sia $X : \mathbb{R} \rightarrow T_p M$ una curva differenziabile con $\|X(t)\| = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e definiamo una superficie differenziabile $F : [0, \epsilon) \times \mathbb{R} \rightarrow M$ ponendo

$$F(r, t) = \exp_p(rX(t)).$$

Dall'osservazione 3) segue che, per t_0 fissato in \mathbb{R} , $r \mapsto F(r, t_0)$ è un arco dell'unica geodetica uscente da p e passante per il punto $q_0 = \exp_p(r_0 X(t_0))$ che al variare della curva X e di t_0 descrive la ipersuperficie Σ_{r_0} .

Bisogna dunque provare che la geodetica $r \mapsto F(r, t_0)$ è ortogonale alla curva $t \mapsto \exp_p(r_0 X(t))$ qualunque sia $X : \mathbb{R} \rightarrow T_p M$ tale che $X(t_0) = q_0$.
per questo basta verificare che

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t} \right) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad r \in [0, \epsilon).$$

(Ricordiamo che se $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial t}$ sono i vettori della base standard in \mathbb{R}^2 , $\frac{\partial F}{\partial r} = dF\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)$ e $\frac{\partial F}{\partial t} = dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$).

Ora

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \left(\frac{D}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{D}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial t} \right)$$

ma $r \mapsto F(r, t)$ per t fissato è una geodetica e quindi $\frac{D}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial r} = 0$

inoltre per la 1.1.9. $\frac{D}{\partial r} \frac{F}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial r}$ e quindi

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{D}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial r} \right) = 0;$$

infatti ancora, per t fissato, $r \mapsto f(r,t)$ è una geodetica e quindi

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \text{costante} = X(t) = 1$$

In definitiva $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t} \right) = 0$ e poiché $F(o,t) = p \quad \forall t \in \mathbb{R}$

si ottiene $\forall r,t \quad \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t} \right)_{r=0} = 0 \quad \blacksquare$

1.2.13. LEMMA. Sia $\omega : [a,b] \rightarrow (U_p - \{p\})$ differenziabile a tratti; allora

$\int_a^b ||\dot{\omega}|| dt \geq |r(a) - r(b)|$ (*) e l'uguaglianza vale se e solo se $r(t)$ è

monotona e $X(t)$ è costante (*), essendo $X : \mathbb{R} \rightarrow T M$ come nel lemma pre-

cedente.

Dimostrazione. Sia, come sopra, $F(r,t) = \exp_p(r X(t))$ allora

$$\omega(t) = F(r(t),t) \quad e \quad \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right) r' + \frac{\partial F}{\partial t} .$$

Poiché $\left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial t} \right) = 0$ e $||\frac{\partial F}{\partial r}|| = 1$ si ha

$$||\dot{\omega}(t)||^2 = |r'(t)|^2 + ||\frac{\partial F}{\partial t}||^2 \geq |r'(t)|^2$$

(*) Ciascun punto $\omega(t)$ può scriversi in modo unico come $\omega(t) = \exp_p(r(t) X(t))$ con $0 < r(t) < \varepsilon$ e $||X(t)|| = 1$.

e vale il segno di uguaglianza se e solo se $\left| \left| \frac{\partial F}{\partial t} \right| \right| = 0$ cioè $X(t) = 0$.

$$\text{Quindi } \int_a^b \left| \left| \dot{\omega}(t) \right| \right| dt \geq \int_a^b |r'(t)| dt \geq |r(b) - r(a)|$$

e vale il segno di uguaglianza se e solo se r è monotona e $X = X(t)$ è costante. ■

Dimostrazione del teorema 1.2.11. Sia $\gamma : [0,1] \rightarrow M$ una geodetica e sia $X = \frac{\dot{\gamma}(0)}{\left| \left| \dot{\gamma}(0) \right| \right|}$. Consideriamo un cammino ω da p a $q = \exp_p(rX) \in U_p$ con $0 < r = \left| \left| \dot{\gamma}(0) \right| \right| < \epsilon$. Per ogni $\delta > 0$ il cammino conterrà un tratto congiungente un punto di Σ_δ con un punto di Σ_r e giacente sulla corona circolare $\Sigma_r - \Sigma_\delta$. Per il lemma 1.2.13., essendo $\left| \left| X \right| \right| = 1$, la lunghezza di questo tratto sarà maggiore o uguale a $r - \delta$ e quindi facendo tendere δ a zero $L(\omega) \geq r = L(\gamma)$. Se poi

$$\{\omega(t) \mid t \in [0,1]\} = \{\exp_p tX \mid t \in [0,r]\}^{(*)}$$

allora dall'ultima asserzione del lemma 1.2.13. segue $L(\omega) = r = L(\gamma)$. ■

Come ovvia conseguenza si ottiene

1.2.14. COROLLARIO. Supponiamo che $\omega : [0,1] \rightarrow M$ sia un cammino parametrizzato proporzionalmente alla lunghezza d'arco e minimizzante la lunghezza tra tutti i cammini congiungenti $\omega(0)$ e $\omega(1)$. Allora ω è una geodetica (**).

(*) Si ricordi che $\exp_p(t\dot{\gamma}(0)) = \gamma(t) \quad \forall t \in [0,1]$ se $\gamma : [0,1] \rightarrow M$ è una geodetica ed \exp_p è definito in $\dot{\gamma}(0)$.

(**) Si ha, in particolare, che ω è differenziabile.

Per terminare con queste prime considerazioni vogliamo solo notare esplicitamente che se il concetto di lunghezza di un cammino differenziabile a tratti non dipende dalla parametrizzazione, il concetto di geodetica dipende dalla parametrizzazione (*).

Già da questi primi fatti appare evidente l'utilità di un'applicazione quale l'esponenziale; ma senza ulteriori ipotesi un argomento sul quale intervenga l'esponenziale può essere portato avanti solo per problemi di natura locale. Vediamo ora brevemente che tipo di ipotesi sono necessarie perché l'esponenziale sia definito globalmente e quanto esse siano restrittive.

1.2.15. DEFINIZIONE. Diremo che una varietà riemanniana M è completa se lo è rispetto alla metrica introdotta nel paragrafo precedente. Diremo che M è geodeticamente completa se ogni geodetica è definita per tutti i valori reali del parametro.

1.2.16. TEOREMA di HOPF-RINOW. Sia M una varietà riemanniana connessa.

1) Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- a) M è completa
- b) M è geodeticamente completa
- c) Esiste $p \in M$ tale che \exp_p è definito su tutto $T_p M$
- d) Exp è definito su tutto $T(M)$
- e) Ogni sottoinsieme di M chiuso e limitato è compatto.

2) Se M è completa, per ogni coppia di punti $p, q \in M$ esiste una geodetica $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ tale che $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$ e $L(\gamma) = d(p, q)$ (esiste cioè una geodetica minimale congiungente p e q).

(*) Un facile calcolo in coordinate locali mostra che se la curva $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, è una geodetica e se $t = t(\tau)$, $\tau \in [a, b]$, è una funzione lineare di $[a, b]$ su $[0, 1]$, $\gamma = \gamma(t(\tau))$ è ancora una geodetica. Questo risultato non vale però per una qualunque riparametrizzazione della curva γ .

Per la dimostrazione rimandiamo ad un qualunque buon testo di geometria differenziale.

Le varietà che considereremo le assumeremo sempre complete; dal nostro punto di vista (cioè lo studio della topologia delle varietà mediante l'uso di concetti metrici) una tale assunzione può essere giustificata (solo in parte però) dal seguente teorema.

1.2.17. TEOREMA. Sia M una varietà riemanniana. Esiste allora una struttura riemanniana su M , conforme alla data e rispetto alla quale M è completa^(*). Per la dimostrazione rimandiamo a Hicks [15].

Un'altra ragione che rende meno restrittiva l'ipotesi fatta sulle varietà che prenderemo in considerazione è l'equivalenza fornitaci dal teorema di Hopf-Rinow tra la completezza (metrica) e la completezza geodetica. Questa giustificazione però cade se tentiamo di generalizzare la geometria riemanniana al caso di varietà modellate su spazi di Hilbert (varietà di dimensione infinita). Infatti in tal caso la completezza metrica (ipotesi ancora accettabile) non implica la completezza geodetica e il richiedere quest'ultima costantemente è un po' troppo restrittivo.

(*) Ricordiamo che due strutture riemanniane $(,)$ e \langle , \rangle su M si dicono conformi se $\forall X, Y \in T_p M$ (e $\forall p \in M$) risulta

$$\frac{(X, Y)}{((X, X) (Y, Y))^{\frac{1}{2}}} = \frac{\langle X, Y \rangle}{(\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle)^{\frac{1}{2}}}$$

1.3. CURVATURA

1.3.1. DEFINIZIONE. Assegnata una varietà M con una connessione riemanniana ∇ , si dice curvatura l'applicazione

$$R : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$$

definita ponendo (*)

$$R(X,Y,Z) = R(X,Y)Z = - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

R è un campo di tensori del tipo (1,3), infatti si verifica facilmente che è un'applicazione $\mathcal{F}(M)$ -multilineare.

OSSERVAZIONE. 1) $(R(X,Y)Z)(p)$ dipende solo dai valori che X,Y,Z assumono in p, nel senso che se $X',Y',Z' \in \Gamma(M)$ e $X'_p = X_p, Y'_p = Y_p, Z'_p = Z_p$ risulta $(R(X',Y')Z')(p) = (R(X,Y)Z)(p)$.

Avrà senso allora scrivere $R(X_p, Y_p)Z_p$ se $X_p, Y_p, Z_p \in T_p M$.

Si parlerà quindi di tensore di curvatura sulla varietà M associato alla connessione ∇ .

Il tensore di curvatura misura di quanto la "derivata covariante seconda" si discosta dall'essere simmetrica. Daremo ora un calcolo che giustifica tale affermazione.

(*) Molti testi definiscono la curvatura ponendo

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

La definizione che abbiamo dato qui ha il vantaggio che il prodotto scalare $(R(\partial_h, \partial_i) \partial_j, \partial_k)$ coincide con il simbolo classico R_{hijk} .

1.3.2. LEMMA. Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ una superficie di parametri x e y e sia X un campo di vettori lungo F . Risulta allora

$$\frac{D}{\partial y} \frac{D}{\partial x} X - \frac{D}{\partial x} \frac{D}{\partial y} X = R\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) X$$

dove $\frac{D}{\partial y} = \nabla_{\frac{\partial F}{\partial y}}$ e $\frac{D}{\partial x} = \nabla_{\frac{\partial F}{\partial x}}$.

Dimostrazione. Esprimiamo i due termini dell'uguaglianza su scritta in un sistema di coordinate locali (x_1, \dots, x_m) ; siano $(x^i), (y^i), (X^i)$ rispettivamente le componenti dei campi di vettori $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, X$ nella base naturale $(\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i})$; risulta allora

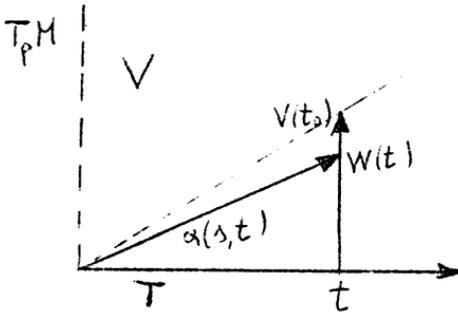
$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial y} \frac{D}{\partial x} X - \frac{D}{\partial x} \frac{D}{\partial y} X &= \sum_{i=1}^m X^i \left(\frac{D}{\partial y} \frac{D}{\partial x} \partial_i - \frac{D}{\partial x} \frac{D}{\partial y} \partial_i \right) = \\ &= \sum_{i,j,k} X^i x^j y^k (\nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_j} \partial_i - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_k} \partial_i) = (\text{poich\u00e9 } [\partial_i, \partial_k] = 0) = \\ &= \sum_{i,j,k} X^i x^j y^k R(\partial_j, \partial_k) \partial_i = R\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) X. \blacksquare \end{aligned}$$

1.3.3. LEMMA. Il tensore di curvatura verifica le seguenti propriet\u00e0 (si ricordi che la connessione ∇ si \u00e8 supposta riemanniana) qualunque siano i campi di vettori $X, Y, Z, W \in \Gamma(M)$.

- a) $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0$
- b) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$
- c) $(R(X, Y)Z, W) = - (R(X, Y)W, Z)$
- d) $(R(X, Y)Z, W) = (R(Z, W)X, Y)$.

La dimostrazione \u00e8 un semplice calcolo.

Diamo ora una prima interpretazione geometrica di R. Il calcolo che faremo ci sembra particolarmente istruttivo perché è un primo esempio di "teorema di confronto". Si tratta in questo caso di confrontare una grandezza nello spazio "piatto" $T_p M$ con la corrispondente nello spazio "curvo" M.



Sia T un vettore unitario in $T_p M$ e V ortogonale a T e unitario. Sia $V(t)$ il campo lungo il raggio $\{tT | t \geq 0\}$ ottenuto trasportando V parallelamente e sia $W(t) = tV(t)$.

Poniamo $J(t) = (d \exp_p)_{tT}(W(t))$; allora $J(t)$

è un campo di vettori lungo la geodetica

$t \mapsto \gamma(t) = \exp_p(tT)$. Poniamo inoltre $\alpha(s, t) = sW(t) + tT^{(*)}$; chiaramente, fissato

s_0 , $t \mapsto \alpha(s_0, t)$ è un raggio in $T_p M$ e quindi $t \mapsto \exp_p(\alpha(s_0, t))$ è una geodetica. Se poniamo $\beta(s, t) = \exp_p(\alpha(s, t))$, chiaramente $J(t) = \left(\frac{\partial \beta}{\partial s}\right)_{(0, t)}$.

Risulta allora

$$J''(t) = \left(\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \beta}{\partial s}\right)_{(0, t)} = \left(\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \beta}{\partial t}\right)_{(0, t)} = \left(\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \beta}{\partial t}\right)_{(0, t)} + R\left(\frac{\partial \beta}{\partial s}, \frac{\partial \beta}{\partial t}\right) \frac{\partial \beta}{\partial t}$$

ma $t \mapsto \beta(s_0, t)$ è una geodetica e quindi $\frac{D}{\partial t} \frac{\partial \beta}{\partial t} = 0$

Dunque

$$(1.3.4) \quad J''(t) + R(\dot{\beta}(0, t), J(t))\beta(0, t) = 0$$

Poniamo per semplicità $X = \dot{\beta}(0, t)$.

(*) con il significato ovvio (anche se non molto corretto) del simbolo

$tT + sW(t)$.

Ora sviluppando con la formula di Taylor:

$$\|J(t)\|^2 = (J(0), J(0)) + \left(\frac{d(J, J)}{dt}\right)_0 t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2(J, J)}{dt^2}\right)_0 t^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3(J, J)}{dt^3}\right)_0 t^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{d^4(J, J)}{dt^4}\right)_0 t^4 + \dots$$

$$J(0) = 0 \Rightarrow (J(0), J(0)) = 0$$

$$\left(\frac{d(J, J)}{dt}\right)_0 = 2(J'(0), J(0)) = 0$$

$$\left(\frac{d^2(J, J)}{dt^2}\right)_0 = 2\|J'(0)\|^2$$

$$\left(\frac{d^3(J, J)}{dt^3}\right)_0 = \left(\frac{d^2}{dt^2} 2(J', J)\right)_0 = 2\left(\frac{d(J'', J)}{dt}\right)_0 + 2\left(\frac{d(J', J')}{dt}\right)_0 =$$

$$= 2(J''(0), J'(0)) + 2(J'''(0), J(0)) + 4(J''(0), J(0)) = 0$$

(infatti per (1.3.4.) e per l'osservazione 1) se $J(0) = 0$ si ha $J''(0) = 0$).

$$\frac{1}{24} \left(\frac{d^4(J, J)}{dt^4}\right)_0 = \frac{1}{6} (J', J''')_0$$

$$\text{Inoltre } (J', J''')_0 = (J', \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} J') = (J', \nabla_X \nabla_X J') = (J', \nabla_X \nabla_X J' X)_0 =$$

$$= (\text{poich\u00e9 } [\bar{X}, J'] = 0) = -(J', R(X, J')X)_0$$

Concludendo

$$(1.3.5.) \quad \|J(t)\|^2 = t^2 - \frac{1}{6} (J', R(X, J')X)_0 t^4 + o(t^5)$$

1.3.6. PROPOSIZIONE. 1) L'effetto di $d \exp_p$ sui vettori del tipo $tV(t)$ ortogonali a T \u00e8 misurato al 4\u00b0 ordine da $(J', R(X, J')X)_0$

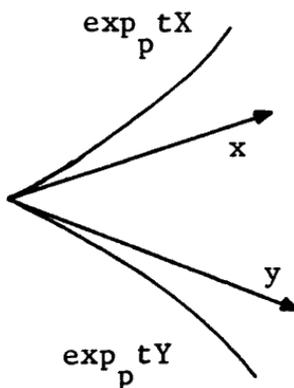
2) Se $(V_p, R(W_p, V_p)W_p) \leq 0 \quad \forall V, W \in T_p M$ ortonorma-

li allora le geodetiche uscenti da p si allontanano tra di loro più rapidamente dei corrispondenti raggi in $T_p M$

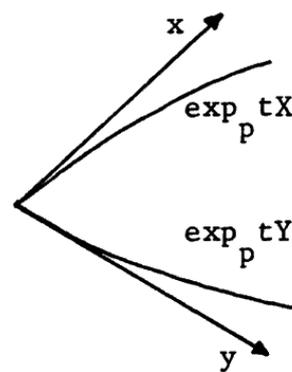
3) Se $(V_p, R(W_p, V_p)W_p) \geq 0 \quad \forall V, W \in T_p M$ le geode-

tiche uscenti da p si allontanano meno rapidamente dei corrispondenti raggi in $T_p M$.

(Naturalmente tutte le considerazioni precedenti hanno carattere locale).



caso 2)



caso 3)

Come è facile intuire la quantità $(R(V,W) V,W)$ gioca un ruolo essenziale nella determinazione del comportamento delle geodetiche. Diamo allora la seguente definizione:

1.3.7. DEFINIZIONE. Siano X, Y vettori indipendenti in $T_p M$.

Chiameremo curvatura gaussiana (o sezionale) rispetto ad X e Y la quantità (*)

$$K(X, Y) = \frac{(R(X, Y) X, Y)}{||X||^2 ||Y||^2 - (X, Y)^2}$$

(*) Se il tensore di curvatura R è definito come nella nota alla definizione 1.3.1., si pone

$$K(X, Y) = \frac{(R(X, Y) Y, X)}{||X||^2 ||Y||^2 - (X, Y)^2}$$

Il nome deriva dal caso classico delle superfici in \mathbb{R}^3 .

Infatti, come è facile controllare con semplici calcoli (Hicks [15]), $K(X,Y)$ dipende solo dal piano generato da X e Y in $T_p M$ e non da X, Y stessi. Se allora $P = \{tX+sY \mid t,s \in \mathbb{R}\}$ e U è un intorno di 0 in P abbastanza piccolo, $\exp_p(U)$ è una sottovarietà 2-dimensionale di M munita di una metrica riemanniana indotta da quella di M . Per il "Teorema Egregium" la curvatura gaussiana di una superficie in \mathbb{R}^3 (prodotto delle curvatures principali) non dipende dall'immersione in \mathbb{R}^3 ma solo dalla struttura metrica della superficie e quindi per il solo tramite degli invarianti metrici di $\exp_p(U)$, è possibile definire la curvatura gaussiana K_p di $\exp_p(U)$ in p . Come allora ci attendiamo risulta $K_p = K(X,Y)$.

Sia p un punto di una varietà riemanniana M, P un piano per 0 in $T_p M$ e $K(P)$ la curvatura sezionale di M in p rispetto al piano P .

Sia inoltre r un numero reale positivo e $\gamma_r : [0, 2\pi] \rightarrow P$ la circonferenza su P di centro 0 e raggio r .

Supposto r abbastanza piccolo per cui esista un $r' > r$ tale che \exp_p sia un diffeomorfismo su $B_{r'} = \{X \in T_p M \mid \|X\| < r'\}$, indichiamo con $L(\gamma_r) = 2\pi r$ la lunghezza della circonferenza γ_r e con $L(r)$ la lunghezza della curva chiusa $\exp_p \circ \gamma_r : [0, 2\pi] \rightarrow M$.

Si verifica (*) allora con calcoli laboriosi che

$$\frac{dL}{dr}(0) = 2\pi \quad \frac{d^2 L}{dr^2}(0) = 0 \quad \frac{d^3 L}{dr^3}(0) = -6\pi K(P),$$

e quindi dallo sviluppo di $L(r)$ in serie di Taylor in un intorno dello

(*) Vedi Hermann [14].

zero si ottiene il seguente Lemma

$$1.3.8. \text{ LEMMA. } K(P) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{L(\gamma_r) - L(r)}{\pi r^2} .$$

Questo risultato permette di provare la seguente proposizione.

1.3.9. PROPOSIZIONE. Siano N ed M due varietà riemanniane e $\varphi: N \rightarrow M$ una immersione isometrica di N in M , cioè una applicazione differenziabile tale che

$$||d\varphi_p(X)|| = ||X_p|| \quad \text{per } p \in N, X \in T_p N.$$

Sia inoltre P un piano per 0 in $T_p M$ tale che per ogni $X \in P$ la curva $t \mapsto \varphi(\exp_p(tX))$ sia una geodetica in M .

Indicate allora con $K_N(P)$ e $K_M(P')$ la curvatura sezionale rispettivamente di N ed M in p rispetto a P ed a $P' = d\varphi_p(P)$ risulta

$$K_N(P) = K_M(P').$$

Dimostrazione. Se γ_r è la circonferenza su P di centro 0 e raggio r , poiché φ è una isometria sarà

$$L(r) = L(\exp_p \circ \gamma_r) = L(\varphi \circ \exp_p \circ \gamma_r) = L'(r).$$

Risulta allora ovviamente $K_N(P) - K_M(P') = 0$. ■

Vediamo ora come questi risultati diano un'altra interpretazione geometrica della curvatura sezionale, ben nota nel caso bidimensionale, e come forniscono uno dei possibili metodi per verificare lo stretto legame che c'è tra la curvatura sezionale qui definita e la curvatura gaussiana di una superficie.

OSSERVAZIONI. 1) Consideriamo la superficie $\Sigma = \exp_p(U)$ costruita in precedenza e l'ingezione canonica $j: \Sigma \rightarrow M$. Chiaramente la metrica indotta su Σ è tale che j è una isometria, dunque la curvatura sezionale di M in p

rispetto al piano P che individua Σ coincide con la curvatura sezionale della sottovarietà Σ in p . Poiché si verifica che la curvatura sezionale di Σ in p è proprio la curvatura gaussiana definita nel modo classico, si ottiene quanto si era già asserito.

2) La 1.3.9. ci permette anche di affermare che in genere l'applicazione esponenziale non è una isometria, sebbene lo sia lungo i raggi^(*).

In effetti se per un punto $p \in M$, $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ fosse una isometria, considerata la sua restrizione ad un intorno opportunamente piccolo di 0 sul quale \exp_p è un diffeomorfismo, la curvatura sezionale di M in p dovrebbe essere uguale alla curvatura sezionale di $T_p M$ in 0 , cioè dovrebbe essere nulla; in generale ciò non si verifica.

Più precisamente la "non isometria" di \exp_p si manifesta sui vettori ortogonali ai raggi e (1.3.5.) e (1.3.8) ci dicono appunto che K misura quanto \exp_p si discosti dall'essere una isometria.

(*) Vedi l'osservazione 4 del paragrafo 2.

CAPITOLO II

ELEMENTI DI TEORIA DELLE GEODETICHE

2.1. FORMULE VARIAZIONALI

Sia M una varietà riemanniana completa. (*)

2.1.1. DEFINIZIONE. Diremo che un'applicazione $\omega : [a, b] \rightarrow M$ è un cammino differenziabile a tratti se esiste una suddivisione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ dell'intervallo $[a, b]$ tale che ω sia continua in $[a, b]$ e differenziabile sui segmenti $[t_i, t_{i+1}]$ per ogni i .

Denotiamo con $\Omega(p, q; M)$, o semplicemente con Ω quando non sorgono equivoci, l'insieme dei cammini differenziabili a tratti $\omega : [a, b] \rightarrow M$ tali che $\omega(a) = p$ e $\omega(b) = q$.

Ad Ω possiamo dare una struttura di spazio metrico ponendo

$$d'(\omega_1, \omega_2) = \sup_{t \in [a, b]} d(\omega_1(t), \omega_2(t)) + \left\{ \int_a^b (|\dot{\omega}_1(t)| - |\dot{\omega}_2(t)|)^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} (**)$$

Ω con la topologia indotta da d' assomiglia ad una varietà di dimensione infinita. Ci proponiamo di trasportare a questa situazione le tecniche classiche dello studio dei punti stazionari per le funzioni reali differenziabili definite su una varietà (di dimensione finita).

Sia $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Per definire il differenziale di F cominciamo con l'introdurre qualcosa di simile allo "spazio tangente".

(*) Da questo momento consideriamo sempre varietà complete.

(**) Indichiamo, al solito, con d la distanza indotta in M dalla struttura riemanniana.

2.1.2 DEFINIZIONE. a) Sia $\omega \in \Omega$; è naturale definire curva in Ω passante per ω o variazione di ω (mantenente gli estremi fissi) una applicazione continua

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$$

tale che, se indichiamo con s la variabile in $(-\epsilon, \epsilon)$ e t quella in $[a, b]$ e se $\{t_i\}_{i=0, \dots, k}$ è una suddivisione di $[a, b]$ per cui

$\omega|_{[t_i, t_{i+1}]}$ risulti differenziabile, si abbia:

$$1) \alpha(0, t) = \omega(t) \quad \text{per ogni } t \in [a, b]$$

$$2) \alpha|_{(-\epsilon, \epsilon) \times [t_i, t_{i+1}]} \quad \text{è differenziabile per ogni } i = 0, 1, \dots,$$

$$3) \alpha(s, 0) = p \quad \alpha(s, 1) = q \quad \text{per ogni } s \in (-\epsilon, \epsilon).$$

b) Naturalmente il "vettore velocità di α in ω ", o campo variazionale sarà il campo di vettori dato da

$$W(t) = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \right)_{(0, t)} = (d\alpha)_{(0, t)} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right).$$

c) Per spazio tangente a Ω in $\omega^{(*)}$, $T_\omega \Omega$, intenderemo lo spazio vettoriale dei campi di vettori W continui lungo ω differenziabili sugli intervalli $[t_i, t_{i+1}]$ $i = 0, \dots, k-1$ tali cioè che

$$W|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \Gamma(\omega|_{[t_i, t_{i+1}]})$$

OSSERVAZIONE: 1) Dato $W \in T_\omega \Omega$ esiste una variazione α di ω tale che

(*) Le notazioni sono le stesse della definizione 2.1.1.

$$W(t) = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \right)_{(0,t)} \cdot \text{Basta considerare} \quad \alpha(s,t) = \exp_{\omega(t)}(sW(t)).$$

2.1.3. DEFINIZIONE. Diremo differenziale di una funzione $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ in ω l'applicazione $(dF)_{\omega} : T_{\omega} \Omega \rightarrow T_{F(\omega)} \mathbb{R}$ definita ponendo

$$(dF)_{\omega}(W) = \left[\frac{d}{ds} (F(\bar{\alpha}(s))) \right]_{s=0} \quad (1)$$

dove α è una variazione di ω avente W come campo variazionale e $\bar{\alpha}(s)$ è la curva $\bar{\alpha}(s)(t) = \alpha(s,t)$.

Osserviamo che a priori il differenziale di F così definito (che indicheremo anche con F_*) può non esistere o comunque potrebbe dipendere da α che non è univocamente determinata da W . In ogni caso però la seguente definizione, che è poi quella che ci interessa, è corretta.

2.1.4. DEFINIZIONE. Diremo che $\omega \in \Omega$ è critico per F se per ogni variazione α di ω $F(\bar{\alpha}(s))$ è una curva differenziabile in \mathbb{R} e

$$\left[\frac{d}{ds} F(\bar{\alpha}(s)) \right]_{s=0} = 0$$

Ritornando al concetto di variazione, possiamo generalizzarlo nel modo seguente.

2.1.5. DEFINIZIONE. a) Sia $B_{\epsilon}^n = \{u \in \mathbb{R}^n / \|u\| < \epsilon\}$; diremo variazione n -dimensionale di ω in Ω un'applicazione continua

$$\alpha : B_{\epsilon}^n \times [a,b] \rightarrow M$$

tale che

$$1) \alpha(0,t) = \omega(t) \quad \text{per ogni } t \in [a,b]$$

$$2) \alpha(u,0) = p \quad \alpha(u,1) = q \quad \text{per ogni } u \in B_{\epsilon}^n$$

$$3) \alpha|_{B_{\epsilon}^n \times [t_i, t_{i+1}]} \text{ è differenziabile per ogni } i = 0, \dots, k-1.$$

(1) Se $F(\bar{\alpha}) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile, $\frac{d}{ds}(F(\bar{\alpha}))_{s=0} \in T_{F(\omega)} \mathbb{R}$.

b) Se x_1, \dots, x_n sono coordinate in B_ϵ^n si definiscono i campi variazionali di α

$$W_i(t) = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \right)_{(0,t)} = (d\alpha)_{(0,t)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Possiamo definire a questo punto l'analogo della "derivata seconda".

2.1.6. DEFINIZIONE. Siano $W_1, W_2 \in T_\omega \Omega$ e $\alpha : B_\epsilon^2 \times [a, b] \rightarrow M$ una variazione di dimensione due tale che $W_i(t) = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \right)_{(0,t)}$ (*)

Poniamo allora

$$F_{**}(W_1, W_2) = \left(\frac{\partial^2 F(\alpha(x_1, x_2))}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_{(0,0)}$$

(Anche qui vanno fatte le riserve già avanzate nel caso di F_*).

Vogliamo ora cercare delle formule esplicite per F_* e F_{**} nel caso che F sia la funzione lunghezza o energia. Ricordiamo che si definisce, per $\omega \in \Omega$

$$L(\omega) = \int_a^b ||\dot{\omega}(t)|| dt = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||\dot{\omega}(t)|| dt$$

$$E(\omega) = \int_a^b ||\dot{\omega}(t)||^2 dt = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||\dot{\omega}(t)||^2 dt.$$

2.1.7. LEMMA. $E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è continua rispetto alla topologia indotta su Ω dalla distanza d' definita all'inizio di questo paragrafo. (**)

(*) Come nel caso 1-dimensionale, la formula $\alpha(x_1, x_2, t) = \exp_{\omega(t)}(x_1 W_1(t) + x_2 W_2(t))$ ci assicura l'esistenza di almeno una tale variazione.

(**) Questo lemma giustifica l'introduzione del termine integrale nella definizione di d' rispetto alla solita definizione che contiene solo il termine $\sup_{t \in [a, b]} d(\omega_1(t), \omega_2(t))$. In ogni caso le due topologie sono equivalenti.

Dimostrazione. Tenendo presente che $||\dot{\omega}|| \in L^2([a,b])$ se $\omega \in \Omega$ si ha

$$|E(\omega_1) - E(\omega_2)| \leq \int_a^b \left| ||\dot{\omega}_1||^2 - ||\dot{\omega}_2||^2 \right| dt = \int_a^b \left| ||\dot{\omega}_1|| + ||\dot{\omega}_2|| \right| \left| ||\dot{\omega}_1|| - ||\dot{\omega}_2|| \right| dt$$

$$\leq \left\{ \int_a^b (||\dot{\omega}_1|| + ||\dot{\omega}_2||)^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b (||\dot{\omega}_1|| - ||\dot{\omega}_2||)^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq M(\omega_1) d'(\omega_1, \omega_2),$$

cioè E è continua in ogni ω_1 . ■

2.1.8. LEMMA. La funzione E assume i suoi minimi relativi sull'insieme delle geodetiche minimali.

Dimostrazione. $L^2(\omega) = \left(\int_a^b ||\dot{\omega}|| \cdot 1 dt \right)^2 \leq \int_a^b ||\dot{\omega}||^2 dt \int_a^b 1 dt =$

$$= (b - a) E(\omega)$$

e vale l'uguaglianza se e solo se ω è parametrizzata con parametro proporzionale alla lunghezza d'arco (cioè $||\dot{\omega}|| = \text{cost}$).

Supponiamo che γ sia una geodetica minimale da $\omega(a) = p$ a $\omega(b) = q$

$$E(\gamma) = \frac{L^2(\gamma)}{(b-a)} \leq \frac{L^2(\omega)}{(b-a)} \leq E(\omega). \text{ Quindi } E(\gamma) \text{ è minimo per } E. \text{ Inoltre vale}$$

il segno di uguaglianza se e solo se ω è anch'essa una geodetica minimale. ■

Vogliamo ora studiare i cammini critici per le funzioni E ed L . Supporremo tutti i cammini parametrizzati in $[0,1]$.

2.1.9. TEOREMA. (1^a formula variazionale). Sia $\omega \in \Omega(p,q;M)$ e $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [0,1] \rightarrow M$ una variazione di ω con vettore variazionale

$$W(t) = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \right)_{(0,t)}. \text{ Sia } \Delta_t \dot{\omega} = \dot{\omega}(t_0^+) - \dot{\omega}(t_0^-) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \dot{\omega}(t) - \lim_{t \rightarrow t_0^-} \dot{\omega}(t). \quad (*)$$

(*) Ovviamente $\Delta_t \dot{\omega} \neq 0$ solo nei punti in cui ω non è C^1 e quindi (ω è C^∞ a tratti) in un insieme finito di punti.

Risulta allora

$$\frac{1}{2} \left[\frac{dE(\bar{\alpha}(s))}{ds} \right]_{s=0} = - \sum_t (W(t), \Delta_t \dot{\omega}(t)) + \int_0^1 (W(t), \frac{D}{dt} \dot{\omega}(t)) dt \quad (**)$$

Dimostrazione.

$$\frac{1}{2} \left[\frac{dE(\bar{\alpha}(s))}{ds} \right]_{s=0} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{ds} \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) dt \right) \right]_{s=0}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) dt \right]_{s=0} = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 2 \left(\frac{D}{ds} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) dt \right]_{s=0} = \left[\int_0^1 \left(\frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) dt \right]_{s=0}$$

integriamo allora per parti ricordando che

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) = \left(\frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)$$

e quindi

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d}{ds} E(\bar{\alpha}(s)) \right]_{s=0} = \left[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) dt \right]_{s=0} - \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) dt \right]_{s=0} =$$

$$= \sum_i \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)_{s=0} \right]_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_0^1 (W(t), \frac{D}{dt} \dot{\omega}(t)) dt = - \sum_t (W(t), \Delta_t \dot{\omega}(t)) - \int_0^1 (W(t), \frac{D}{dt} \dot{\omega}(t)) dt. \blacksquare$$

2.1.10. COROLLARIO. $\omega \in \mathfrak{A}$ è critico per E se e solo se ω è una geodetica.

Dimostrazione. Chiaramente se ω è una geodetica $\Delta_t \dot{\omega}(t) = 0$ per ogni

$t \in [0, 1]$ e $\frac{D}{dt} \dot{\omega}(t) = 0$ e quindi per ogni variazione α risulta

$$\left[\frac{d}{ds} E(\bar{\alpha}(s)) \right]_{s=0} = 0 \quad \text{e quindi } \omega \text{ è critico per } E.$$

Viceversa supponiamo che ω sia un cammino critico per l'energia; se $\dot{\omega}$ è

(*) La sommatoria va estesa a tutti i t per cui $\Delta_t \dot{\omega} \neq 0$.

discontinuo in t_1, \dots, t_k consideriamo una funzione $C_{,f}^\infty : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(t_i) = 0$, $f(s) > 0$ se $s \neq t_i$. Consideriamo una variazione α di ω associata al campo di vettori $f(t) \frac{D}{dt} \dot{\omega}(t)$; risulta, poiché ω è critico:

$$0 = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{ds} E(\bar{\alpha}(s)) \right]_{s=0} = - \int_0^1 f(t) \left\| \frac{D}{dt} \dot{\omega}(t) \right\|^2 dt$$

e quindi $\frac{D}{dt} \dot{\omega}(t) = 0$ negli intervalli $[t_i, t_{i+1}]$ e ω è una geodetica su tali intervalli. Scegliamo ora una variazione $\bar{\alpha}$ tale che $\left[\frac{\partial \alpha}{\partial s} \right]_{s=0}(t_i) = \Delta_{t_i} \dot{\omega}(t_i)$. Avremo

$$0 = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{ds} E(\bar{\alpha}(s)) \right]_{s=0} = \sum_{t_i} \left\| \Delta_{t_i} \dot{\omega}(t_i) \right\|^2$$

da cui $\Delta_{t_i} \dot{\omega}(t_i) = 0$ per ogni i e quindi la tesi segue dall'unicità della geodetica per ogni $\omega(t_i)$ con velocità $\dot{\omega}(t_i)$. ■

OSSERVAZIONE: 2) Notiamo come il valore di $\left[\frac{d}{ds} E(\bar{\alpha}(s)) \right]_{s=0}$ esiste

e non dipende dalla variazione α ma soltanto dal campo variazionale $W(t) = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \right)_{(0,t)}$ e quindi $(dE)_\omega : T_\omega \Omega \rightarrow T_{E(\omega)} \mathbb{R}$ resta ben definito indipendentemente dalle riserve formulate per la definizione 2.1.3..

2.1.11. TEOREMA (2^formula variazionale). Sia $\omega \in \Omega$, $\alpha : B_\epsilon^2 \times [0,1] \rightarrow M$

una variazione a due parametri e $W_1 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right)_{(0,t)}$, $W_2 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right)_{(0,t)}$

i campi variazionali associati. Se ω è una geodetica risulta

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} E(\alpha(x_1, x_2)) \right) (0,0) =$$

$$= - \int_0^1 (W_2(t), \Delta \frac{D}{dt} W_1(t)) - \int_0^1 (W_2(t), \frac{D^2}{dt^2} W_1(t) + R(\dot{w}, W_1) \dot{w}) dt.$$

Dimostrazione. E' un calcolo analogo a quello fatto per la 1^a formula variazionale. Notiamo soltanto che interviene il tensore di curvatura R poichè dobbiamo usare, durante il calcolo, non solo la 1.1.9. ma anche la 1.3.2. ■

OSSERVAZIONE. 3) Notiamo che $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} E(\alpha(x_1, x_2)) \right)$ dipende non da α ma solo dai campi $W_1 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right) (0, t)$ e $W_2 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right) (0, t)$.

Considerata ora la geodetica $\gamma \in \Omega$, definiamo un operatore:

$$E_{**}^\gamma : T_\gamma \Omega \times T_\gamma \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (*)$$

ponendo

$$E_{**}^\gamma (W_1, W_2) = - \int_0^1 (W_2, \Delta \frac{D}{dt} W_1) - \int_0^1 (W_2, \frac{D^2}{dt^2} W_1 + R(\dot{w}, W_1) \dot{w}) dt.$$

2.1.12. COROLLARIO. E_{**} è simmetrico e bilineare.

Dimostrazione. E_{**} è chiaramente bilineare; inoltre è simmetrico in quanto per la 2.1.10. si può interpretare come derivata seconda mista. ■

(*) Spesso scriveremo solo E_{**}

La 2^a formula variazionale permette inoltre di provare il seguente

2.1.13. COROLLARIO. Se γ è una geodetica minimale da $\gamma(0) = p$ a $\gamma(1) = q$ allora E_{**}^{γ} è semidefinito positivo.

2.2. PUNTI DI TAGLIO E PUNTI CONIUGATI.

Abbiamo visto come una geodetica minimizzi localmente la funzione lunghezza e quindi l'energia. D'altra parte (globalmente) una geodetica non è in generale una curva di lunghezza minimale tra tutte le curve che congiungono due dati punti; abbiamo in particolare visto che condizione necessaria affinché ciò avvenga è che E_{**}^γ risulti semidefinito positivo.

Lo scopo che speriamo di raggiungere in questo paragrafo è, fissata una geodetica $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ uscente da un punto, percorrere γ e vedere quando e perché γ cessa di essere minimale.

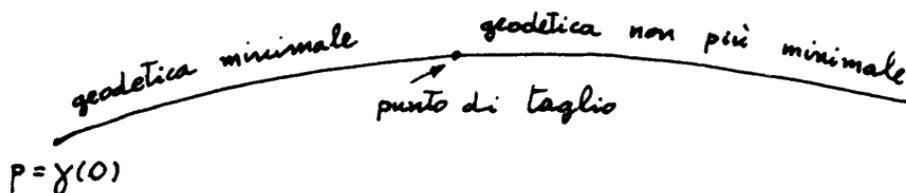
Sia $X_p \in T_p M$, $\|X_p\| = 1$. Poniamo

$$m(X_p) = \sup \{t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \mid t \mapsto \exp_p(tX_p) \text{ è minimale tra } p \text{ ed } \exp_p(tX_p)\}.$$

2.2.1. DEFINIZIONE. Diremo punto di taglio lungo la geodetica

$t \mapsto \gamma(t) = \exp_p(tX_p)$, $t \geq 0$, rispetto a p il punto $\exp_p(m(X_p)X_p)$ se

$m(X_p) \in \mathbb{R}$.



Diremo anche che $m(X_p)X_p \in T_p M$ è il punto di taglio rispetto a p lungo il raggio $\{\exp_p(tX_p) \mid t \geq 0\}$.

In generale è utile avere un procedimento analitico per la determinazione di $m(X_p)$. Abbiamo visto come una geodetica minimale è tale che E_{**} ri

sulta semidefinito positivo. D'altra parte la 2^a formula variazionale mostra che, a meno del termine di discontinuità, E_{**} ha per nucleo vettori che soddisfano la condizione $J'' + R(\dot{\omega}, J)\dot{\omega} = 0$. Questo ci suggerisce la idea di cercare una stima di $m(X_p)$ mediante campi di vettori lungo ω verificanti una tale equazione.

2.2.2. DEFINIZIONE. Diremo che un campo di vettori J lungo una geodetica γ è un campo di vettori di Jacobi se

$$J'' + R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} = 0$$

Prima di discutere anche le più elementari proprietà dei campi di Jacobi diamo una proposizione che chiarisce un po' quanto sopra affermato.

2.2.3. PROPOSIZIONE. Sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una geodetica; $J \in \Gamma(\gamma)$ un campo di Jacobi non identicamente nullo e tale che $J(0)=0, J(t_0) = 0$ per qualche $t_0 \in (0, 1)$. Allora γ non è minimale.

Dimostrazione. L'idea è di costruire, partendo da J , un campo di vettori $\tilde{J} \in \Gamma(\gamma)$ tale che $E_{**}(\tilde{J}, \tilde{J}) < 0$.

Indichiamo con J_1 il campo così definito

$$J_1(t) = \begin{cases} J(t) & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & t_0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

J_1 è allora un campo differenziabile a tratti e J_1' è discontinuo solo in t_0 .

Essendo $J(t)$ la soluzione di un'equazione differenziale del 2° ordine, nulla in t_0 e non identicamente nulla, risulta $J_1'(t_0^-) = J'(t_0) \neq 0$. (*)

(*) Riprendiamo l'argomento in seguito.

Sia ora $X \in \Gamma(\gamma)$ di classe C^∞ in $[0,1]$ e tale che $X(0) = X(1) = 0$

e $X(t_0) = \frac{J'_1(t_0^-)}{\|J'_1(t_0^-)\|}$. Sia ancora $\tilde{J}(t) = c^{-1}J_1 - cX$ con $c \in \mathbb{R}^+$. Risult-

ta allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E_{**}(\tilde{J}, \tilde{J}) &= -(-cX(t_0), -c^{-1}J'_1(t_0^-)) - \int_0^1 (c^{-1}J_1 - cX, -cR(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma}) dt = \\ &= -1 - \int_0^1 (J_1, -R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma}) dt - c^2 \int_0^1 (X, R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma}) dt. \end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned} \int_0^1 (J_1, -R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma}) dt &= \frac{1}{2} E_{**}(J_1, -X) + (J_1, -\Delta_t X') = \\ &= \frac{1}{2} E_{**}(X, J_1)^{(*)} = -(-X(t_0), \Delta_{t_0} J'_1)^{(**)} = -1 \end{aligned}$$

Scelto c tanto piccolo che $\left| c^2 \int_0^1 (X, R(\dot{\gamma}, X)\dot{\gamma}) dt \right| < 2$

risulta $E_{**}(\tilde{J}, \tilde{J}) < 0$ da cui segue che γ non è un minimo per E , quindi per L .

Visto allora come i campi di Jacobi (ed in particolare i loro zeri) ci possono essere utili in quanto vogliamo fare, diamo alcune definizioni e proprietà elementari.

Sia $\gamma : [0,1] \rightarrow M$ una geodetica.

2.2.4. DEFINIZIONE. Diremo che $\gamma(t_0)$ è coniugato a $\gamma(0)$ lungo γ se esiste un campo di Jacobi J , non identicamente nullo, tale che $J(0) = 0$

(*) E_{**} è simmetrica. Inoltre $X \in C^\infty \Rightarrow X'$ continua.

(**) J_1 è di Jacobi a tratti e quindi la parte integrale va a zero.

$$\underline{e} \quad J(t_0) = 0.$$

OSSERVAZIONI: 1) Dalla 2.2.3. segue che il punto di taglio lungo γ precede sempre il primo punto coniugato a $\gamma(0)$ lungo γ . In questo senso la posizione del primo punto coniugato ci dà una stima per eccesso di $m(\dot{\gamma}(0))$.

2) Per i soliti teoremi sulle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie un campo di Jacobi $J \in \Gamma(\gamma)$ è univocamente determinato dalle condizioni iniziali $J(0)$ e $J'(0)$. Pertanto lo spazio vettoriale dei campi di Jacobi lungo γ ha dimensione $2m$.

3) Se $(a,b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $(at + b) \dot{\gamma}(t)$ è un campo di Jacobi lungo γ .

4) Se p è coniugato a q lungo γ , allora q è coniugato a p lungo γ percorsa nel verso opposto. Analogo discorso si può fare per i punti di taglio.

Diamo ora una caratterizzazione più geometrica dei campi di Jacobi.

2.2.5. DEFINIZIONE. Se $\gamma: [0,1] \rightarrow M$ è una geodetica, per variazione di γ attraverso geodetiche intenderemo un'applicazione differenziabile

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [0,1] \rightarrow M \quad \underline{\text{tale che}}$$

$$1) \alpha(0,t) = \gamma(t) \quad \forall t \in [0,1]$$

$$2) \alpha(s_0, t) \quad \text{è una geodetica} \quad \forall s_0 \in (-\epsilon, \epsilon).$$

2.2.6. PROPOSIZIONE. Un campo di vettori $J \in \Gamma(\gamma)$ è di Jacobi se e solo se esiste una variazione α di γ attraverso geodetiche, tale che

$$J(t) = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \right)_{(0,t)} = (d\alpha)_{(0,t)}$$

Dimostrazione. Se α è una variazione come in 2.2.5. risulta

$$\begin{aligned} & \frac{D^2}{dt^2} \frac{\partial \alpha}{\partial s} + R\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial s}\right) \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + R\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial s}\right) \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \\ & = \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0 \quad (t \mapsto \alpha(s_0, t) \text{ è una geodetica}). \end{aligned}$$

Viceversa, sia J un campo di Jacobi lungo γ ed U un intorno di $\gamma(0)$ tale che due suoi punti qualsiasi siano congiungibili da un'unica geodetica di lunghezza $< \varepsilon$. Consideriamo $\delta > 0$ tale che $\gamma(t) \in U$ e, se $t \in [0, \delta]$, sia $c_0: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ una curva tale che $c_0(0) = \gamma(0)$ e $\dot{c}_0(0) = J(0)$

e $c_1(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ tale che $c_1(0) = \gamma(\delta)$ e $\dot{c}_1(0) = J(\delta)$.

Se $\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ si ha che $\alpha(s): [0, \delta] \rightarrow M$ è l'unica geodetica di lunghezza minore di ε congiungente $c_0(s)$ e $c_1(s)$, otteniamo una variazione di $\gamma|_{[0, \delta]}$ attraverso geodetiche (*) $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, \delta] \rightarrow M$ ponendo $\alpha(s, t) = \bar{\alpha}(s)(t)$.

Proviamo ora che un campo di Jacobi lungo $\gamma|_{[0, \delta]}$ è univocamente determinato dai suoi valori in 0 , e δ .

Infatti se $\mathcal{J}(\gamma) = \{J \in \Gamma(\gamma) \mid J \text{ è di Jacobi}\}$ consideriamo l'applicazione

$$r: \mathcal{J}(\gamma) \rightarrow T_{\gamma(0)}^M \times T_{\gamma(\delta)}^M$$

data da $r(J) = (J(0), J(\delta))$. Chiaramente r è lineare; inoltre l'argomento precedente permette, fissato $J(0)$ e $J(\delta)$, di costruire la variazione α

tale che $\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}\right)_{(0,0)} = J(0)$ e $\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}\right)_{(0,\delta)} = J(\delta)$.

(*) α è differenziabile poiché le geodetiche suddette dipendono differenziabilmente dai dati iniziali.

$(\frac{\partial \alpha}{\partial s})_{(0,t)}$ è un campo di Jacobi (per la 1^a parte della proposizione) e

$r((\frac{\partial \alpha}{\partial s})_{(0,t)}) = (J(0), J(\delta))$ e quindi r è suriettiva.

Essendo gli spazi $J(\gamma)$ e $T_{\gamma(0)} \times T_{\gamma(\delta)}$ entrambi $2m$ -dimensionali ne segue che r è un isomorfismo e ciò prova l'asserzione.

Estendiamo allora α ad una variazione definita in $(-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1]$ (ricordiamo che M è completa). Il campo variazionale così ottenuto, \tilde{J} , è allora un campo di Jacobi lungo γ e per quanto sopra visto coincide con J in $[0, \delta]$. In particolare $\tilde{J}(0) = J(0)$ e $\tilde{J}'(0) = J'(0)$. Ne segue dunque $\tilde{J}(t) = J(t)$. ■

Risulterà estremamente utile in seguito la seguente caratterizzazione dei punti coniugati.

2.2.7. PROPOSIZIONE. Sia $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ una geodetica. $\gamma(t_0)$ è coniugato a $\gamma(0)$ lungo γ se e solo se $\exp_{\gamma(0)}$ è singolare in $t_0 \dot{\gamma}(0)$.

La dimostrazione è a questo punto un facile esercizio ricordando le considerazioni fatte per ottenere la 1.3.4.

2.2.8. DEFINIZIONE. Sia $\gamma(t_0)$ coniugato a $\gamma(0)$ lungo γ . Diremo che $\omega(t_0)$ è coniugato di ordine k se lo spazio vettoriale dei campi di Jacobi lungo γ che si annullano in 0 e t_0 ha dimensione k . Questo equivale in termini della 2.2.7 al fatto che $\text{Ker}(\text{dexp}_{\gamma(0)})_{t_0 \dot{\gamma}(0)}$ ha dimensione k .

A priori l'ordine di un punto coniugato soddisfa la relazione $1 \leq k \leq m$ poiché m è la dimensione dello spazio vettoriale dei campi di Jacobi nulli in un punto.

Ma abbiamo osservato che $t \dot{\gamma}(t)$ è un campo di Jacobi, lungo γ e si annulla soltanto in $t=0$. Quindi esistono al più $m-1$ campi di Jacobi indipendenti che si annullano in 2 punti distinti.

Esempi. 1) Consideriamo \mathbb{R}^m con la metrica usuale. I campi di Jacobi lungo le geodetiche $\{tX\}_{t \geq 0}$ sono allora le soluzioni dell'equazione $x''(t)=0$ e quindi non si annullano che in $t=0$. Non esistono dunque coppie di punti coniugati.

2) Sia M una varietà di dimensione m e tale che la curvatura sezionale K sia costante per ogni 2-piano del fibrato tangente ad M .

Facendo uso delle proprietà di simmetria del tensore R è facile vedere che risulta

$$2.2.9. \quad (R(X,Y)Z,W) = ((X,Z)(Y,W) - (Y,Z)(X,W)) K.$$

Siano allora $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ una geodetica, $\{P_i\}_{i=1, \dots, m}$ una base ortonormale in $T_{\gamma(0)} M$ e $\{P_i(t)\}_{i=1, \dots, m}$ la base in $T_{\gamma(t)} M$ ottenuta trasportando P_i parallelamente lungo γ .

Supponiamo γ parametrizzata con la lunghezza d'arco ($|\dot{\gamma}| = 1$) e $P_1(t) = \dot{\gamma}(t)$.

Poniamo $J_i(t) = a(t) P_i(t)$.

Risulta allora

$$J''_i(t) = a''(t)P_i.$$

J_i è allora di Jacobi se e solo se risulta

$$J''_i(t) = a''(t)P_i = -R(P_1, J_i)P_1 = -a(t)R(P_1, P_i)P_1$$

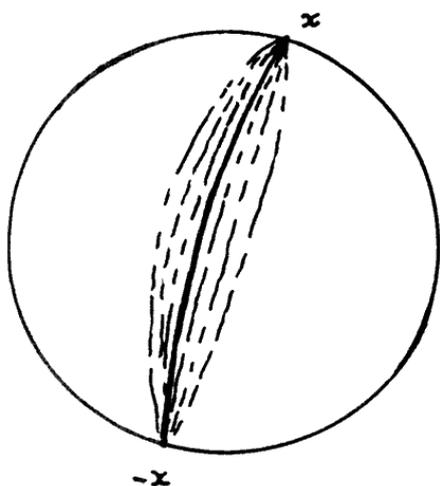
cioè se $a(t)$ soddisfa l'equazione $a''(t) + Ka(t) = 0$; infatti da (2.2.9) segue $R(P_1, P_i)P_1 = KP_i$ ($i \neq 1$).

Ne segue allora che se $K \leq 0$ non vi sono punti coniugati in quanto le soluzioni non nulle dell'equazione $a''(t) + Ka(t) = 0$ sono funzioni che si annullano al più in un punto.

Se $k > 0$, si ha la soluzione $a(t) = \text{sen}(t\sqrt{K})$ e quindi i campi di Jacobi $J_i = \text{sen}(t\sqrt{K})P_i(t)$.

In tal caso i punti coniugati sono i punti $\{\gamma(\frac{n\pi}{\sqrt{K}})_{n \in \mathbf{Z}}\}$ e tutti hanno ordine $m-1$.

3) Nel caso $M = S^m$ (sostanzialmente lo stesso di $K = \text{cost} > 0$ si può ragionare anche più geometricamente osservando che le $m-1$ rotazioni indipendenti attorno ad un asse $\{x, -x\}$ ci danno $m-1$ variazioni "indipendenti" di una geodetica congiungente x e $-x$ e quindi $m-1$ campi di Jacobi indipendenti.



Ovviamente detti campi si annullano in x e $-x$ e quindi due qualsiasi punti antipodali sono tra loro coniugati, lungo ogni geodetica che li congiunge, con molteplicità $m-1$.

Osserviamo esplicitamente come

$\exp_x : T_x S^m \rightarrow S^m$ proietti $\{||x|| < \pi\}$ in modo diffeomorfo su $S^m - \{-x\}$ e porti $\{||x|| = \pi\}$ su $\{-x\}$.

Terminiamo questo paragrafo dando una ulteriore proprietà dei campi di Jacobi.

2.2.10. PROPOSIZIONE. Se J_1, J_2 sono campi di Jacobi lungo γ allora

$$(J_1, J_2') - (J_1', J_2) = \text{cost. .}$$

Inoltre se $J_1(t_0) = J_2(t_0) = 0$ per qualche t_0

$$(J_1, J_2') - (J_1', J_2) = 0.$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}((J_1, J_2') - (J_1', J_2)) &= (J_1', J_2') + (J_1, J_2'') - (J_1'', J_2) - \\ &- (J_1', J_2') = (J_1, R(\dot{\gamma}, J_2) \dot{\gamma}) - (J_2, R(\dot{\gamma}, J_1) \dot{\gamma}) = 0 . \blacksquare \end{aligned}$$

2.2.11. COROLLARIO. $(J_1', \dot{\gamma}(t)) = C_1, \quad (J_2, \dot{\gamma}(t)) = C_2 + tC_1$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

2.3. LUOGO DI TAGLIO E LUOGO CONIUGATO.

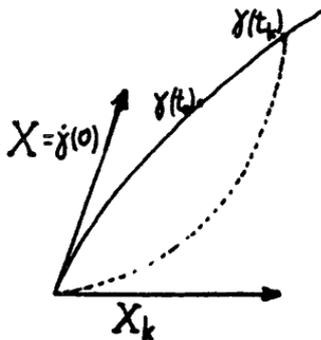
In questo paragrafo ci proponiamo di approfondire maggiormente le relazioni tra punti di taglio e punti coniugati. Esamineremo anche la struttura dell'insieme dei punti di taglio e dei punti coniugati (considerati nello spazio tangente) senza però entrare nei dettagli di tutte le dimostrazioni in quanto, per le applicazioni che daremo, la situazione sarà molto particolare e dette dimostrazioni immediate.

1.3.1. PROPOSIZIONE. Sia $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ una geodetica e $\gamma(t_0)$ il punto di taglio (rispetto a $\gamma(0)$). Allora è verificata almeno una delle seguenti condizioni:

- a) $\gamma(t_0)$ è il primo punto coniugato lungo γ (rispetto a $\gamma(0)$);
- b) esistono almeno due geodetiche minimali tra $\gamma(0)$ e $\gamma(t_0)$.

Dimostrazione. Sia $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione strettamente decrescente che converge a t_0 e $t \mapsto \exp_{\gamma(0)}(tX_k)$ per $\|X_k\| = 1$ e $0 \leq t \leq b_k$ una geodetica minimale tra $\gamma(0)$ e $\gamma(t_k)$. Dalle ipotesi fatte risulta $X_k \neq X = \dot{\gamma}(0)$,

$$b_k < t_k \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = t_0.$$

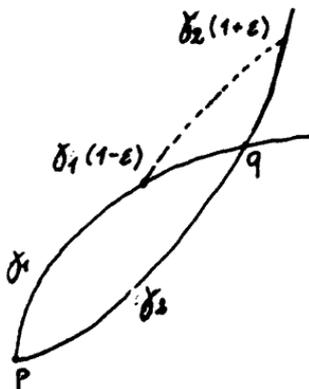


Poiché $\{X \in T_{\gamma(0)}M \mid \|X\| = 1\}$ è compatta possiamo supporre $X_k \rightarrow Y$ per $k \rightarrow \infty$. Se $Y \neq X$, $t \mapsto \exp_{\gamma(0)}(tY)$ e $t \mapsto \gamma(t)$ sono due geodetiche minimali distinte come nella b).

Supponiamo $X = Y$. Allora $\gamma(t_0)$ è coniugato a $\gamma(0)$ lungo γ . Infatti se così non fosse esisterebbe (PROP. 2.2.7.) un intorno U di $t_0 Y$ in $T_{\gamma(0)} M$ tale che $\exp_{\gamma(0)}|_U$ sia un diffeomorfismo. Ma questo è assurdo poiché per k abbastanza grande $b_k X_k$ e $t_k X$ appartenerebbero ad U e l'uguaglianza $\exp_{\gamma(0)}(b_k X_k) = \exp_{\gamma(0)}(t_k X)$ implicherebbe $b_k X_k = t_k X$ per $k > k_0$ che contraddice $X_k \neq X$ essendo $\|X_k\| = 1 = \|X\|$ e $b_k < t_k$. ■

OSSERVAZIONE: 1) La condizione b) caratterizza i punti di taglio nel senso che se p e q sono congiunti da due geodetiche minimali γ_1 e γ_2 distinte allora q è di taglio rispetto a p lungo γ_1 e γ_2 .

Infatti supponendo γ_1 e γ_2 parametrizzate con la lunghezza d'arco e $\gamma_i(0) = p$ $\gamma_i(1) = q$ ($i = 1, 2$), se $\dot{\gamma}_1(1) = -\dot{\gamma}_2(1)$ è ovvio che γ_1 e γ_2 non minimizzano per $t > 1$; se invece $\dot{\gamma}_1(1) \neq -\dot{\gamma}_2(1)$ allora per $\epsilon < 1$,



$$d(\gamma_1(1 - \epsilon), \gamma_2(1 + \epsilon)) < 2\epsilon^{(*)} \text{ e quindi}$$

$$d(p, \gamma_2(1 + \epsilon)) < 1 + \epsilon \text{ da cui risulta che}$$

$$\gamma_2|_{[0, 1 + \epsilon]} \text{ non è minimale; analogamente}$$

$$\text{per } \gamma_1|_{[0, 1 + \epsilon]} .$$

(*) Da $\dot{\gamma}_1(1) \neq -\dot{\gamma}_2(1)$ segue che la curva $\sigma: [1 - \epsilon, 1 + \epsilon] \rightarrow M$ che per $t \in [1 - \epsilon, 1]$ vale $\gamma_1(t)$ e per $t \in [1, 1 + \epsilon]$ vale $\gamma_2(t)$ non è una geodetica e quindi $L(\sigma) = 2\epsilon > d(\gamma_1(1 - \epsilon), \gamma_2(1 + \epsilon))$.

Ricordando le definizioni del paragrafo 2.1 , poniamo

$K(p) = \{m(X)X \mid X \in T_p M, \|X\| = 1 \text{ e } m(X) \in \mathbb{R}\} =$ luogo di taglio (rispetto a p) in $T_p M$

$\tilde{K}(p) = \exp_p(K(p)) =$ luogo di taglio (rispetto a p) in M

$C(p) = \{X \in T_p M \mid \exp_p \text{ è singolare in } X\} =$ luogo coniugato (rispetto a p) in $T_p M$

$\tilde{C}(p) = \exp_p(C(p)) =$ luogo coniugato (rispetto a p) in M

$C^1(p) = \{X \in C(p) \mid \exp_p \text{ è regolare in } tX \text{ per } t < 1\}$

$C_k(p) = \{X \in C(p) \mid \text{Ker}(d \exp_p)_X \text{ ha dimensione } k\}$

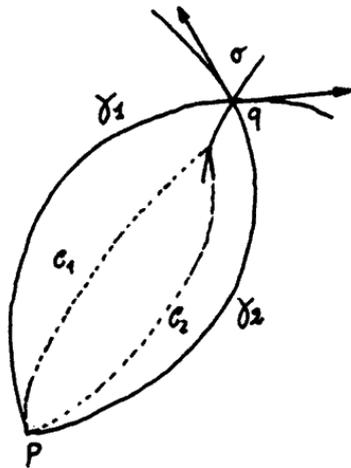
$C_k^1(p) = C^1(p) \cap C_k(p)$.

2.3.2. PROPOSIZIONE. Se $q \in \tilde{K}(p)$ è un punto di taglio a distanza minima da p e se $q \notin \tilde{C}(p)$ esistono esattamente due geodetiche minimali

γ_1, γ_2 congiungenti p e q e tali che, posto $r = d(p, q)$, risulta

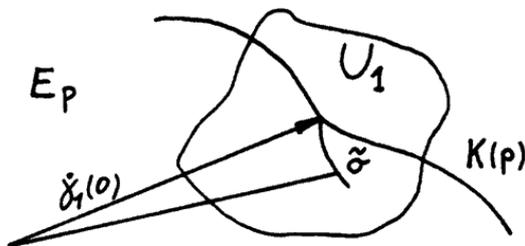
$$\dot{\gamma}_1(r) = -\dot{\gamma}_2(r).$$

Dimostrazione. Per 2.3.1. esistono almeno due geodetiche γ_1 e γ_2 minimali congiungenti p e q . Se $\dot{\gamma}_1(r) \neq -\dot{\gamma}_2(r)$ sia $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ una geodetica tale che $\sigma(t_0)$ è contenuto nell'immagine di intorni U_i di $r \cdot \dot{\gamma}_i(0)$ tali che $\exp_p|_{U_i}$ sia un diffeomorfismo. Esistono allora X_1 e X_2 in U_1 e U_2 rispettivamente tali che $t \mapsto (\exp_p tX_i) = c_i(t)$. Sia una geodetica minimale congiungente p e $\sigma(t_0)$.



(in M)

poiché $\dot{\sigma}(0)$ forma un angolo acuto con $\dot{\gamma}_i(r)$ possiamo sollevare $\sigma|_{(-\epsilon,0)}$ in $E_p = \{tY \mid \|Y\| = 1 \text{ e } t < m(Y)\}$ ottenendo una curva $\tilde{\sigma}$



(in $T_p M$)

e quindi c_i ha lunghezza minore di r . Ma allora $\sigma(t_0)$ è un punto di taglio rispetto a p , a distanza minore di r da p . ■

Cominciamo ora a studiare un po' in dettaglio la struttura di $K(p)$ e $C(p)$.

Posto $S_p = \{X \in T_p M \mid \|X\| = 1\}$ sia $m : S_p \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ l'applicazione che ad X associa $m(X)$ definito all'inizio del paragrafo 2.3. (*) e sia

$$Q(M) = \{X \in T(M) \mid \|X\| = 1 \text{ e } m(X) < \infty\} (**)$$

(*) Indichiamo tale applicazione sempre con m , qualunque sia il punto p di M .

(**) Quando la determinazione di p non ci interessa, indichiamo con X gli elementi $(p,X) \in T(M)$; indicheremo inoltre con \exp l'applicazione $\text{Exp} : T(M) \rightarrow M \times M$ composta con la proiezione $P_2 : M \times M \rightarrow M$.

definiamo una applicazione

$$f : Q(M) \rightarrow M$$

ponendo per ogni $X \in Q(M) \cap T_p M$

$$f(X) = \exp_p(m(X)X).$$

Ovviamente $f(X)$ è il punto di taglio di p lungo la geodetica $t \mapsto \exp_p(tX)$.

2.3.3. PROPOSIZIONE. $f : Q(M) \rightarrow M$ è continua.

Dimostrazione. Proveremo che per ogni successione $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ convergente a X in $Q(M)$ (siano $X_i \in T_{p_i} M$ e $X \in T_p M$) esiste il limite della successione $f(X_i)$ ed è uguale a $f(X)$.

Poniamo $m_i = m(X_i)$, $m = m(X)$, $q_i = f(X_i)$, $q = f(X)$

$$\gamma_i(t) = \exp_{p_i}(tX_i), \quad \gamma(t) = \exp_p(tX) \quad \text{per ogni } t \geq 0, i \in \mathbb{N}$$

ed osserviamo che per ogni $t > 0$ $\gamma(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_i(t)$

Poiché l'applicazione esponenziale è continua, se esiste $\lim_{i \rightarrow \infty} m_i = m$ ri-

sulta che

$$\exists \lim_{i \rightarrow \infty} f(X_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \exp(m_i X_i) = \exp(\lim_{i \rightarrow \infty} m_i X_i) = \exp(\lim_{i \rightarrow \infty} m_i \lim_{i \rightarrow \infty} X_i) = \exp(mX) = f(X).$$

Basta provare dunque che $\lim_{i \rightarrow \infty} m_i = m$

Se per assurdo fosse $\limsup_{i \rightarrow \infty} m_i = m' > m$, considerato un numero reale positivo ^(*) $\epsilon < m' - m$ esisterebbe una sottosuccessione convergente

$\{m_{i_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ di $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tale che $m_{i_j} > m + \epsilon$ per ogni $j \in \mathbb{N}$.

Essendo $\gamma_{i_j}(m_{i_j})$ il punto di taglio di p_{i_j} ed essendo le γ_{i_j} parametrizzate per lunghezza d'arco risulterebbe allora per ogni j

$$m + \epsilon = d(p_{i_j}, \gamma_{i_j}(m + \epsilon))$$

quindi

$$m + \epsilon = \lim_{j \rightarrow \infty} d(p_{i_j}, \gamma_{i_j}(m + \epsilon)) = d(\lim_{j \rightarrow \infty} p_{i_j}, \lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_{i_j}(m + \epsilon)) = d(p, \gamma(m + \epsilon)).$$

Ciò è assurdo perché γ non può essere minimale tra p ed un punto che si ottiene per $t > m$.

Dunque $\limsup_{i \rightarrow \infty} m_i \leq m$.

Si può allora supporre, a meno di considerare una sottosuccessione di X_i ,

che $\lim_{i \rightarrow \infty} m_i = \bar{m} \in \mathbb{R}$; ci resta da provare che $\bar{m} \geq m$

Supponiamo per assurdo che sia $\bar{m} < m$; allora $\bar{q} = \gamma(\bar{m})$ non è coniugato

(*) Se $m' = \infty$, ϵ sarà un numero reale positivo qualunque.

a p lungo γ , cioè per la proposizione 2.2.7. $(\text{dexp})_{\bar{m}X}$ è non singolare; quindi \exp è un diffeomorfismo di un intorno U di $\bar{m}X$ in TM su un intorno di (\bar{q}, \bar{p}) in $M \times M$.

Supponiamo che i termini della successione $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ siano tali che ogni $m_i X_i$ stia in $U^{(*)}$.

Poiché $\exp|_U$ è un diffeomorfismo, il punto di taglio $q_i = \gamma_i(m_i)$ di ogni p_i non può essere coniugato a p_i lungo γ_i e dunque, per la proposizione 2.3.2. vi è un'altra geodetica minimale da p_i a q_i . Per ogni i tale geodetica individua un unico vettore Y_i in S_{p_i} , $Y_i \neq X_i$, tale che

$$\exp_{p_i}(m_i X_i) = \exp_{p_i}(m_i Y_i)$$

e risulta $m_i Y_i \notin U$.

Posto **(**)** $Y = \lim_{i \rightarrow \infty} Y_i$, $Y \in S_p$, risulta ancora $\bar{m} Y \notin U$.

Ne segue che

$$\begin{aligned} \exp_p(\bar{m} Y) &= \exp_p(\lim_{i \rightarrow \infty} m_i Y_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} (\exp_{p_i}(m_i Y_i)) = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} (\exp_{p_i}(m_i X_i)) = \exp_p(\lim_{i \rightarrow \infty} m_i X_i) = \exp_p(\bar{m} X). \end{aligned}$$

Se indichiamo quindi con τ la geodetica $t \rightarrow \exp_p(tY)$, γ e τ sono geodetiche minimali distinte tra p ed $\exp_p(\bar{m} X) = \exp_p(\bar{m} Y)$ e dunque

(*) Ci si può mettere comunque in tale situazione escludendo un numero finito di termini della successione m_i .

(**) L'esistenza di tale limite si prova come per il limite di $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

nessuna delle due, in particolare γ , è minimale tra p ed $\exp_p(mX)$,
 $m > \bar{m}$; ciò è assurdo poiché per ipotesi $\gamma(m) = \exp_p(mX)$ è il punto
 di taglio di p lungo γ . ■

2.3.4. COROLLARIO. La funzione $m : S_p \rightarrow R^+ \cup \{\infty\}$ già definita è con-
tinua.

Dimostrazione: Si è già provato, nella dimostrazione della proposizio-
 ne 2.3.3. che $m|_{S_p \cap Q(M)}$ è continua e si può osservare che considerata

la funzione g definita da $g(\exp_p m(X)X) = m(X)$ risulta

$$m|_{S_p \cap Q(M)} = g \cdot f|_{S_p \cap Q(M)}.$$

Se si considera allora un vettore unitario X in $T_p M$ tale che
 $m(X) = \infty$ e se in ogni intorno di X in S_p esiste un vettore Y per
 cui $m(Y) < \infty$, considerata una successione di tali vettori $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ta-

le che $\lim_{i \rightarrow \infty} X_i = X$ risulta $\lim_{i \rightarrow \infty} m(X_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} g \cdot f(X_i) = \infty = m(\lim_{i \rightarrow \infty} X_i)$.

Infatti se fosse $\lim_{i \rightarrow \infty} g \cdot f(X_i) = c < \infty$ sarebbe $g \cdot f(\lim_{i \rightarrow \infty} X_i) = g \cdot f(X) = c$

e ciò è assurdo poiché $X \notin Q(M)$. ■

2.3.5 COROLLARIO. Sia $E_p = \{tY \mid Y \in S_p, t < m(Y)\}$

- Allora
- 1) E_p è un aperto in $T_p X$
 - 2) \exp_p è un diffeomorfismo di E_p su un aperto di M
 - 3) M è unione disgiunta di $\exp_p(E_p)$ e $\exp_p K(p) = \tilde{K}(p)$.

Dimostrazione. La 1) segue da 2.3.3. immediatamente. La 2) segue dal fatto che \exp_p è non singolare in E_p (in quanto il 1° punto coniugato segue sempre il punto di taglio) ed è globalmente biunivoca per l'osservazione 1). La 3) viene dalla completezza della varietà ($M = \exp_p E_p \cup \tilde{K}(p)$) e dalla 2.3.1 ($\exp_p E_p \cap \tilde{K}_p = \emptyset$). ■

2.3.6. COROLLARIO. M è compatta se e solo se $m(Y) < \infty$ per ogni $Y \in S_p$.

Dimostrazione. Se M è compatta il diametro di M è finito quindi $m(X) < \infty$ per ogni $X \in S_p$. Viceversa se $m(X) \leq b$ per ogni $X \in S_p$ (m è continua ed S_p è compatto) allora $M = \exp_p(B)$

($B = \{X \in T_p M \mid \|X\| \leq b\}$) è compatta. ■

ESEMPI. 1) Sia $M = S^m$. Allora $K(p) = C^1(p) = C_{m-1}^1(p) = \{X \in T_p M \mid \|X\| = \pi\}$.

$C(p) = C_{m-1}(p) = \{X \in T_p M \mid \|X\| = k\pi \text{ per qualche } k \text{ intero positivo}\}$.

2) Sia $M = \mathbb{R}P^m = \frac{S^m}{\mathbb{Z}_2}$ lo spazio proiettivo reale con la metrica naturale. Allora $K(p) = \{X \in T_p M \mid \|X\| = \frac{\pi}{2}\}$

$C(p) = C_{m-1}(p) = \{X \in T_p M \mid \|X\| = k\pi\}$.

3) Sia $M = \mathbb{C}P^m$ lo spazio proiettivo complesso.

Allora $K(p) = C^1(p) = C_1^1(p) = \{X \in T_p M \mid \|X\| = \pi\}$. $C(p) = C_1(p) \cup C_{m-1}(p)$

con $C_1(p) = \{X \mid \|X\| = (2k+1)\pi\}$ e $C_{m-1}(p) = \{X \in T_p M \mid \|X\| = 2k\pi\}$.

4) Sia $M = T^2 = \frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}$ il toro "piatto". La suriezione canoni-

ca $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ è un rivestimento. Ovviamente $C(\bar{q}) = \emptyset$ per ogni $\bar{q} \in T^2$ (la curvatura sezionale è identicamente nulla) e se $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ in \mathbb{R}^2 e $\bar{p} = \varphi(p)$ allora $K(\bar{p}) = \partial Q$ dove Q è il quadrato in \mathbb{R}^2 di vertici $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$ avendo identificato $T_p T^2$ con \mathbb{R}^2 .

Per quanto riguarda la struttura di $C(p)$ si intravede la possibilità che $C(p)$ sia una sottovarietà differenziabile di $T_p M$ in quanto definito mediante gli zeri di soluzioni di equazioni differenziali. Ma se da una parte sembra abbastanza prevedibile un risultato sulla dipendenza differenziabile dei punti coniugati dalla direzione, dall'altra ci si convince facilmente che, se l'ordine k non è costante sulle componenti connesse di $C(p)$ si avranno dei "rami" per cui non si potrà concludere che $C(p)$ è una varietà topologica.

Seguendo Warner definiamo allora $C^R(p) = \{X \in C(p) \mid \exists \text{ un intorno } U \text{ di } X \text{ in } C(p) \text{ tale che per ogni } Y \in U, \text{ ordine } Y = \text{ordine } X\}$. Poniamo inoltre $C^S(p) = C(p) - C^R(p)$. Diremo che $C^R(p)$ è il luogo coniugato regolare e $C^S(p)$ quello singolare. Diremo che il luogo coniugato è regolare se $C^S(p) = \emptyset$.

2.3.7. TEOREMA. 1. $C^R(p)$ è aperto e denso in $C(p)$

2. $C^R(p)$ è una sottovarietà di classe C^∞ di $T_p M$.

Per la dimostrazione rimandiamo a Warner.

In questo articolo si dà una descrizione molto particolareggiata di $C(p)$ ed inoltre si dimostra un fatto molto interessante a proposito dello spazio tangente a $C^R(p)$ e precisamente

2.3.8. TEOREMA. Se $X \in C^R(p)$ e ordine $X \geq 2$ allora $T_X C^R(p) \supseteq \text{Ker}(\text{dexp}_X)$

Ci si può domandare quanto sia restrittivo richiedere che $C^S(p)$ sia vuoto.

Purtroppo la risposta è che una simile richiesta è estremamente restrittiva.

A. Weinstein [31] ha dato un teorema che illustra significativamente questa affermazione.

Per concludere questo paragrafo enunciamo un'ultimo teorema che lega $K(p)$ e $C(p)$. In una forma molto più blanda dimostreremo un teorema dello stesso tipo in seguito.

2.3.9. TEOREMA. Sia M una varietà semplicemente connessa compatta,
e $p \in M$. Supponiamo che una delle seguenti condizioni sia verificata:

- a) Per ogni $X \in C^1(p)$ $\text{ord}(X) \geq 2$
- b) $C^1(p) \subseteq C^R(p)$ e ogni $X \in C^1(p)$ ha modulo $X = \text{costante}$.
- c) $K(p) = \{X \in T_p M \mid \|X\| = \text{costante}\}$.

Allora $K(p) \subseteq C(p)$.

CAPITOLO III

VARIETA' A CURVATURA DI SEGNO COSTANTE

3.1. SOTTOVARIETA' E SOTTOIMMERSIONI.

3.1.1. DEFINIZIONE. Se M, N sono varietà differenziabili e $f: M \rightarrow N$ è differenziabile, si dice che f è un'immersione se per ogni punto x di M è iniettivo il differenziale $(df)_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$.

3.1.2. DEFINIZIONE. Per sottovarietà M di una varietà N intendiamo la coppia (f, M) essendo M una varietà differenziabile, $f: M \rightarrow N$ una immersione tale che f sia un omeomorfismo sull'immagine ^(*).

Se M è una sottovarietà di N identificheremo (f, M) con $f(M) \subseteq N$ e scriveremo di conseguenza $M \subseteq N$ a meno che non possano sorgere dubbi.

Se M è una sottovarietà di N ed N ha una struttura riemanniana, chiaramente questa induce una struttura riemanniana su M . Si può definire allora un'applicazione (fibrata) $P : T(N) \rightarrow T(M)$ ponendo $P(X_p) = P_p(X_p)$ avendo indicato con $P_p : T_p N \rightarrow T_p M \subseteq T_p N$ la proiezione ortogonale rispetto alla struttura riemanniana.

In modo analogo la connessione ∇ definita su N induce una connessione che indichiamo con $\bar{\nabla}$. Siano infatti $X, Y \in \Gamma(M)$ e \tilde{X}, \tilde{Y} estensioni di X, Y a campi di vettori su N ; poniamo $(\bar{\nabla}_X Y)_p = P_p(\nabla_X \tilde{Y})_p$. Se φ è una funzione reale su N e nulla in un intorno di p in M e se $Z, T \in \Gamma(N)$

(*) In altri contesti può essere utile definire in modo meno restrittivo le sottovarietà, ad esempio richiedendo soltanto che l'immersione sia bigettiva o addirittura limitandosi a supporre che f sia un'immersione.

con $Z_p \in T_p N$ allora risulta $(\nabla_Z(\varphi T))_p = Z_p(\varphi)T_p + \varphi(p)\nabla_Z T_p = 0$

e quindi $\bar{\nabla}_X Y$ non dipende dalle estensioni scelte.

Ora, essendo $P|_{T(M)} = I_{T(M)}$, è facile verificare che $\bar{\nabla}$ definisce una connessione compatibile con la struttura riemanniana indotta su M da N e quindi, a norma del teorema 1.1.4., l'unica connessione riemanniana su M .

Ora P è un'applicazione fibrata differenziabile di rango costante e quindi $(\text{Ker } P) = \nu(M)$ è un fibrato vettoriale di dimensione la codimensione di M in N .

Ovviamente $(\text{Ker } P) = \nu(M) = \{X \in T(N) / \pi(X) \in M\}$ e X è ortogonale a $T_{\pi(X)} M$ avendo indicato con $\pi : T(N) \rightarrow N$ la proiezione naturale.

Definiamo allora, per p in M , $S^P : T_p M \times T_p M \rightarrow \nu(M)_p$ ponendo

$S^P(X, Y) = \nabla_X \tilde{Y} - \bar{\nabla}_X \tilde{Y}$ essendo \tilde{Y} un'estensione di Y ad un campo di vettori su N .

3.1.3. LEMMA. S^P è ben definita, $\mathcal{H}(M)$ -bilineare e simmetrica.

Dimostrazione. Sia $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile e $\varphi(p) = 0$; allora

$$S^P(X, \varphi Y) = (\nabla_X \varphi \tilde{Y})_p - (\bar{\nabla}_X \varphi \tilde{Y})_p = X(\varphi)Y + \varphi(p)(\nabla_X \tilde{Y})_p - P(X(\varphi)Y + \varphi(p)(\nabla_X \tilde{Y})_p) = 0$$

e quindi S^P è ben definita.

Inoltre se estendiamo X, Y a campi di vettori tali che $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p \in T_p M$

risulta

$$S^P(X, Y) = (\nabla_X \tilde{Y})_p - (\bar{\nabla}_X \tilde{Y})_p = (\nabla_Y X)_p - [\tilde{X}, \tilde{Y}]_p - (\bar{\nabla}_Y \tilde{X})_p + [\tilde{X}, \tilde{Y}]_p = S^P(Y, X).$$

Essendo S^P chiaramente lineare la tesi è completamente dimostrata. ■

S^P prende il nome di 2[^]forma fondamentale di (f, M) ed è proprio la ben nota 2[^]forma quadratica fondamentale nel caso in cui M è una superficie bidimensionale immersa in $N = \mathbb{R}^{3(*)}$. Ricordiamo che la prima forma fondamentale non è altro che la metrica riemanniana.

3.1.4. DEFINIZIONE. Diremo che M è geodetica in p se per ogni $X \in T_p M$ esiste $\epsilon > 0$ tale che $\exp_p(tX) \in M$ se $|t| < \epsilon$.

M si dice totalmente geodetica se è geodetica in ogni punto.

ESEMPIO. Sia P un sottospazio di $T_p N$ e $B_\epsilon = \{X \in P / \|X\| < \epsilon\}$. Per ϵ abbastanza piccolo $M = \{\exp_p Y / Y \in B_\epsilon\}$ è una sottovarietà geodetica in p .

3.1.5. PROPOSIZIONE. Se M è geodetica in p allora $S^P = 0$

Dimostrazione. Sia $Z \in T_p M$ e γ la geodetica in M uscente da p con vettore velocità Z . Poiché γ è una geodetica, $(\bar{\nabla}_Z Z)_p = 0$. Ma per l'ipotesi fatta su M e per il fatto che $\gamma(t) = \exp_p(tZ)$ la curva γ è geodetica anche in N perché $\nabla_Z Z = 0$; ne segue che $S^P(Z, Z) = 0$ per ogni $Z \in T_p M$. Ora se $X, Y \in T_p M$, essendo S^P simmetrica, $S^P(X, Y) = \frac{1}{2}(X+Y, X+Y) = 0$ e quindi si ha l'asserto. ■

(*) Più precisamente se Z è un campo di vettori normali a M risulta $S^P(X, Y) = h^P(X, Y)Z$ e l'applicazione bilineare e simmetrica $h: \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$ definita da $h(X, Y)(p) = h^P(X, Y)$ è, nel linguaggio classico, la 2[^]forma fondamentale di M relativa a Z .

Ovviamente M è totalmente geodetica se e solo se $S^p = 0$ per ogni p in M (si può vederlo col ragionamento seguito sopra).

Diamo ora delle relazioni tra la curvatura in M e in N . Decomponendo il tensore di curvatura R di N nelle parti tangenziale e normale (rispetto a M) si ottengono le classiche equazioni di Gauss e Codazzi-Mainardi :

$$(G) \quad P(R(X,Y)Z) = R(X,Y)Z - P(\nabla_X S(Y,Z) - \nabla_Y S(X,Z))$$

$$(C-M) \quad (1_{T(N)} - P)(R(X,Y)Z) = S(X, \bar{\nabla}_Y Z) - S(Y, \bar{\nabla}_X Z) - S([X,Y], Z) - (1_{T(N)} - P)(\nabla_X S(Y,Z) - \nabla_Y S(X,Z))$$

dove $X, Y, Z \in \Gamma(M)$ e $S(X, Y)_p = S^p(X_p, Y_p)$.

3.1.6. PROPOSIZIONE. Sia $\{S_j\}_{j=1,2,\dots,(\dim N - \dim M)}$ una base ortonormale per $\nu(M)$ in un aperto coordinato U ; siano inoltre $p \in U$ e $X, Y \in T_p M$; allora

$$\bar{K}(X, Y) = K(X, Y) + \sum_j ((\nabla_X S_j, X)(\nabla_Y S_j, Y) - (\nabla_X S_j, Y)^2).$$

Dimostrazione. E' un semplice calcolo a partire dall'equazione di Gauss (G). ■

Sia γ una geodetica in N contenuta in M ($\dim M \geq 2$) e parametrizzata con la lunghezza d'arco. Sia X un campo di vettori tangenti a M lungo γ , parallelo in M , unitario e ortogonale a γ .

3.1.7. COROLLARIO. $K(X(t), \dot{\gamma}(t)) \geq \bar{K}(X(t), \dot{\gamma}(t))$ e l'uguaglianza vale se e solo se X è parallelo in N lungo γ .

Dimostrazione. Segue banalmente dalle considerazioni fatte in 3.1.6

tenendo presente che $\bar{\nabla}_{\dot{Y}} \dot{Y} = \nabla_{\dot{Y}} \dot{Y} = 0$ e, se X è parallelo in N ,

$$\bar{\nabla}_{\dot{Y}} X = \nabla_{\dot{Y}} X = 0. \blacksquare$$

Esaminiamo ora il concetto duale di sottovarietà. Siano M, N varietà differenziabili di dimensione $n+k$, n rispettivamente.

3.1.8. DEFINIZIONI. a) Diremo che un'applicazione differenziabile $\pi : M \rightarrow N$ è una sottoimmersione (o coimmersione) se $(d\pi)_p$ è suriettivo per ogni p in M . E' ben noto allora che, se π è una sottoimmersione, per ogni p di N $\pi^{-1}(p)$ è una sottovarietà di M di dimensione k .

b) Per $q \in M$, $V_q = T_q \pi^{-1}(\pi(q))$ sarà per definizione il sottospazio verticale di $T_q M$. V_q sarà lo spazio dei campi di vettori verticali.

c) Se M ed N sono munite di una struttura riemanniana, $H_q = V_q^\perp$ si dirà sottospazio orizzontale di $T_q M$. H sarà il sottofibrato dei vettori orizzontali.

d) Diremo che π è una sottoimmersione riemanniana se: $(d\pi)_q|_{H_q} : H_q \rightarrow T_{\pi(q)} N$ è un'isometria nel senso che $(X, Y) = ((d\pi)_q(X), (d\pi)_q(Y))$ per $X, Y \in H_q$.

Dimostreremo ora un teorema che dà una relazione tra la curvatura sezionale in M e la "corrispondente" curvatura sezionale in N .

Siano $X, Y, Z \in \Gamma(N)$ ed indichiamo con $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in \Gamma(M)$ i "sollevamenti orizzontali", cioè gli unici campi di vettori tali che $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in H$ e $d\pi(\bar{X}) = X, d\pi(\bar{Y}) = Y, d\pi(\bar{Z}) = Z$.

Indichiamo inoltre, se $W \in \Gamma(M)$, con W^V e W^H le componenti, rispettivamente verticale e orizzontale, di W . Infine sia $\bar{\nabla}$ (\bar{V}) la connessione riemanniana in $M(N)$, \bar{K} (\bar{K}) la corrispondente curvatura sezionale, \bar{R} (\bar{R}) il tensore di curvatura.

3.1.9. PROPOSIZIONE. $[\bar{X}, \bar{Y}]_p$ dipende solo da \bar{X}_p e \bar{Y}_p .

Dimostrazione. Se T è un campo di vettori verticali si ha

$$([\bar{X}, \bar{Y}], T) = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, T) - (\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}, T) =$$

$$\bar{X}(\bar{Y}, T) - (\bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} T) - \bar{Y}(\bar{X}, T) + (\bar{X}, \bar{\nabla}_{\bar{Y}} T) = (\bar{X}, \bar{\nabla}_{\bar{Y}} T) - (\bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} T). \blacksquare$$

3.1.10. TEOREMA (formula di O'Neill). Con le notazioni già fissate, se $\pi : M \rightarrow N$ è una sottoimmersione risulta

$$\bar{K}(\bar{X}, \bar{Y}) + \frac{3}{4} ||[\bar{X}, \bar{Y}]^V|| = K(X, Y) .$$

Dimostrazione. Cominciamo con l'osservare che

i) $([\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z}) = ([X, Y], Z);$

ii) se $T \in V$ allora $([\bar{X}, T], \bar{Y}) = 0$; in effetti basta tenere conto che $d\pi|_H$ è un'isometria e $[d\pi(X), d\pi(Y)] = d\pi([X, Y]);$

iii) $(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}, \bar{Z}) = \frac{1}{2} \{ ([\bar{Y}, \bar{X}], \bar{Z}) - ([\bar{Y}, \bar{Z}], \bar{X}) - ([\bar{X}, \bar{Z}], \bar{Y}) \} = (\nabla_Y X, Z)$, come si verifica subito ricordando la 1.1.6. e la 1.1.7. .

Sia X_1, \dots, X_m una base locale ortonormale in $T(N)$, $Y_1, \dots, Y_k, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m$, una base ortonormale in $T(M)$ tale che $\forall Y \in V \quad d\pi(\bar{X}_i) = X_i$.

$$(\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{X}, \bar{Y}) = -(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X}, \bar{Y}) + (\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{X}, \bar{Y}) + (\bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X}, \bar{Y}) = -\bar{X}(\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X}, \bar{Y}) + (\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X}, \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}) +$$

$$+ \bar{Y}(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{X}, \bar{Y}) - (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{X}, \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{Y}) + (\bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{X}, \bar{Y}) = \text{usando i, ii, iii) e le espressioni}$$

$$\text{di } \bar{X}, \bar{Y} \text{ nelle basi suddette} = (R(X, Y)X, Y) + \sum_{j=1}^k (\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X}, \bar{Y}_j)(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}, \bar{Y}_j) +$$

$$- \sum_{j=1}^k (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{X}, Y_j)(\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{Y}, Y_j) + \sum_{j=1}^k ([\bar{X}, \bar{Y}]Y_j)(\nabla_{Y_j}\bar{X}, \bar{Y}) = K(X, Y) - \frac{3}{4} ||[\bar{X}, \bar{Y}]^V||^2. \blacksquare$$

3.1.11. COROLLARIO. Se $\bar{K}(\bar{X}, \bar{Y}) \geq 0$ allora $K(X, Y) \geq 0$.

3.2. VARIETA' A CURVATURA COSTANTE.

Ci proponiamo ora di classificare le varietà semplicemente connesse a curvatura costante. Cominceremo col descrivere i "modelli" e dimostreremo poi che ogni varietà semplicemente connessa (e come al solito completa) è isometrica ad una di queste varietà modello.

3.2.1. SPAZIO REALE STANDARD. Consideriamo \mathbb{R}^m con la struttura standard di varietà differenziabile e la metrica "ellittica"

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_{ij}$$

$(\mathbb{R}^m, \delta_{ij})$ è allora una varietà completa semplicemente connessa. Inoltre, per le proprietà di simmetria della derivazione seconda in $\mathbb{R}^m, [X, Y] = 0$ e $\nabla_X \nabla_Y Z = \nabla_Y \nabla_X Z$ per cui $R = 0$ e quindi $K = 0$.

3.2.2. SFERA STANDARD. Sia $K > 0$ una costante e $S_K^m = \{X \in \mathbb{R}^{m+1} / \|X\|^2 = \frac{1}{K}\}$

S_K^m ha una struttura canonica di sottovarietà differenziabile di \mathbb{R}^{m+1} , quindi una metrica indotta dalla struttura riemanniana usuale in \mathbb{R}^{m+1} .

Se N è il campo di versori unitari normali "esterni" a S_K^m in un intorno coordinato U risulta $N = \sum_i \sqrt{K} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Se Y, Z sono versori tangenti a S_K^m in (x^1, \dots, x^{m+1}) e ortogonali, risulta $\nabla_Y N = \sum_i \sqrt{K} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

essendo $Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e quindi dalla proposizione 2.1.6 e da 3.2.1

si ottiene $\bar{K}(Y, Z) = K$ (abbiamo indicato con \bar{K} la curvatura sezionale rispetto alla metrica indotta in S_K^m da $(\mathbb{R}^{m+1}, \delta_{ij})$).

3.2.3. SPAZIO DI POINCARÉ. Sia $K < 0$ una costante e consideriamo l'insieme $M_K = \{X \in \mathbb{R}^m / ||X||^2 < -\frac{4}{K}\}$. M_K ha ovviamente una struttura canonica di varietà differenziabile e in essa introduciamo la metrica

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\delta_{ij}}{(1+(K/4)||x||^2)^2}$$

dove $||x||$ è ancora la norma in $(\mathbb{R}^m, \delta_{ij})$ di $(x^1, \dots, x^m) \in M_K \subseteq \mathbb{R}^m$.

Ricordando la 1.1.6. e derivando l'uguaglianza $g_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$ si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) + \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ik}^j$$

ed ancora permutando gli indici e sommando

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \right)$$

da cui nel nostro caso, posto $D = (1 + (K/4)||x||^2)^2$, si ottiene

$$\Gamma_{jk}^i = 0 \text{ se } i \neq j \neq k \neq i \text{ e } \Gamma_{ij}^i = \Gamma_{ji}^j = \Gamma_{ii}^i = \frac{Kx^i}{2D}, \quad \Gamma_{ii}^j = \frac{Kx^j}{2D}.$$

Ricordando allora la definizione di curvatura si ottiene $K(X,Y) = K$ per ogni coppia (X,Y) di vettori indipendenti in $T_p M_K$.

3.2.4. LEMMA. Siano M, M' due varietà riemanniane connesse e M completa.

Se $f : M \rightarrow M'$ è un'isometria (cioè se per ogni $p \in M$ $(df)_p : T_p M \rightarrow T_p f(p) M'$

è un'isometria) allora

- i) f è suriettiva
- ii) f è rivestimento (*)
- iii) M' è completa.

Dimostrazione. Essendo f un'isometria $(df)_p$ è non singolare per ogni $p \in M$ e quindi f è un diffeomorfismo locale per il teorema delle funzioni inverse; in particolare f è aperta. Sia $p' \in f(M)$ e V un intorno normale di p' (cioè contenuto in un aperto immagine diffeomorfa tramite \exp_p di un aperto di $T_p M'$ come nel teorema 1.2.10) e $q' \in f(M) \cap V$. Sia $\gamma' : [0,1] \rightarrow M'$ l'unica geodetica minimale congiungente p' e q' . Fissato $q \in f^{-1}(q')$ sia γ la geodetica uscente da q con vettore velocità $(df)_q^{-1}(-\dot{\gamma}'(1))$. Poiché f è un'isometria $f \circ \gamma$ è una geodetica uscente da q' con vettore velocità $-\dot{\gamma}'(1)$ e quindi $(f \circ \gamma)(t) = \gamma'(1-t)$. Poiché M è completa $\gamma(1)$ è ben definito e $f \circ \gamma(1) = p'$. Essendo M' connessa ne segue che $f(M) = M'$ e quindi la i).

Con ragionamento analogo mediante la i) si prova la iii).

Per quanto riguarda la ii) sia $p' \in M'$ ed $\epsilon > 0$ tale che \exp_p sia un diffeomorfismo di $\{X \in T_p M' / \|X\| < 2\epsilon\}$ su un aperto V' contenente p' . Siano

$$V = \exp_p(\{X \in T_p M' / \|X\| < \epsilon\}), \{p_i\} = f^{-1}(p') \text{ e}$$

$$U_i = \exp_{p_i}(\{X \in T_{p_i} M / \|X\| < \epsilon\}).$$

Vogliamo verificare che $f^{-1}(V) = \bigcup_i U_i$, $U_i \cap U_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $f|_{U_i} : U_i \rightarrow V$

(*) Ricordiamo che un'applicazione continua tra spazi topologici

$f: X \rightarrow Y$ si dice un rivestimento se $\forall p \in Y$ esiste un intorno V

è biunivoca. Se $q \in f^{-1}(V)$ e $q' = f(q)$ esiste un'unica geodetica minimale γ' da p' a q' di lunghezza minore di ϵ . Poiché f è un diffeomorfismo locale con ragionamento analogo al precedente possiamo "sollevare" γ' ad una geodetica γ uscente da q . Se $t_0 = d(p', q')$ essendo M completa $\gamma(t_0)$ è ben definito ed $f(\gamma(t_0)) = p'$ quindi $\gamma(t_0) = p_i$ per qualche i e $q \in U_i$ (γ è parametrizzata con la lunghezza d'arco). Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ per $i \neq j$ allora $d(p_i, p_j) < 2\epsilon$ e se γ è una geodetica minimale tra p_i e p_j $f \cdot \gamma$ sarà una geodetica di lunghezza minore di 2ϵ uscente da p' e confluyente in p' . Per come è stato scelto ϵ si avrebbe allora $(f \cdot \gamma)(t) = p'$ per ogni t ; ma questo è impossibile perché f è un diffeomorfismo locale e $p_i \neq p_j$. Infine se $q_1, q_2 \in U_i$, $q_1 \neq q_2$, e se γ_j è una geodetica minimale da p_i a q_j , $j = 1, 2$, $f \cdot \gamma_1$ ed $f \cdot \gamma_2$ sono due geodetiche di lunghezza minore di ϵ da p' a $f(q_j)$. Per la definizione di ϵ allora $f(q_1) \neq f(q_2)$. ■

Vedremo ora che in un certo senso i precedenti esempi esauriscono tutte le varietà semplicemente connesse a curvatura sezionale costante.

Diremo che due varietà M_1, M_2 sono isometriche se esiste un'isometria $f : M_1 \rightarrow M_2$ che sia anche un diffeomorfismo.

3.2.5. TEOREMA. Sia M una m -varietà riemanniana completa e semplicemente connessa tale che per ogni $p \in M$, $X, Y \in T_p M$ e $K(X, Y) = K =$ costante. Allora

tale che $f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ con U_{α} aperti disgiunti tali che $f|_{U_{\alpha}}$ sia un omeomorfismo su V per ogni α .

- i) se $K > 0$ M è isometrica alla sfera S_K^m
- ii) se $K = 0$ M è isometrica a $(\mathbb{R}^m, \delta_{ij})$
- iii) se $K < 0$ M è isometrica alla varietà di Poincarè.

Dimostrazione. Cominciamo col ricordare (paragrafo 2.2.) che, nelle nostre ipotesi, se $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ è una geodetica uscente da $p \in M$ e $\{p_i(t)\}$ una base ortonormale parallela in $T_{\gamma(t)}M$ con $P_1(t) = \dot{\gamma}(t)$, i campi di Jacobi nulli in $t = 0$ costituiscono il sottospazio vettoriale di $\Gamma(\gamma)$ generato dai campi di vettori

$$a) X_1 = ct\dot{\gamma}(t) = ctP_1(t) \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

$$b) X_i = \phi(t)P_i(t) \quad , \quad t \neq 1 \quad , \quad \text{ove } \phi \text{ è una soluzione dell'equazione differenziale ordinaria } \phi''(t) + K\phi(t) = 0 \text{ con la condizione iniziale } \phi(0) = 0, \phi'(0) = 1.$$

Inoltre indicato con $Q_i(t)$ il trasporto parallelo di $P_i(0)$ lungo $\{\dot{\gamma}(t)\}$ in $T_p M$, $(\text{dexp}_p)_{t\dot{\gamma}(0)}^t Q_i(t) = \phi(t)P_i(t)$.

Se $K = 0$ $\phi(t) = t$ e quindi $\|(\text{dexp}_p)_{t\dot{\gamma}(0)}^t Q_i(t)\|^2 = (1/t^2)\phi^2(t)\|P_i(t)\|^2 = 1$,

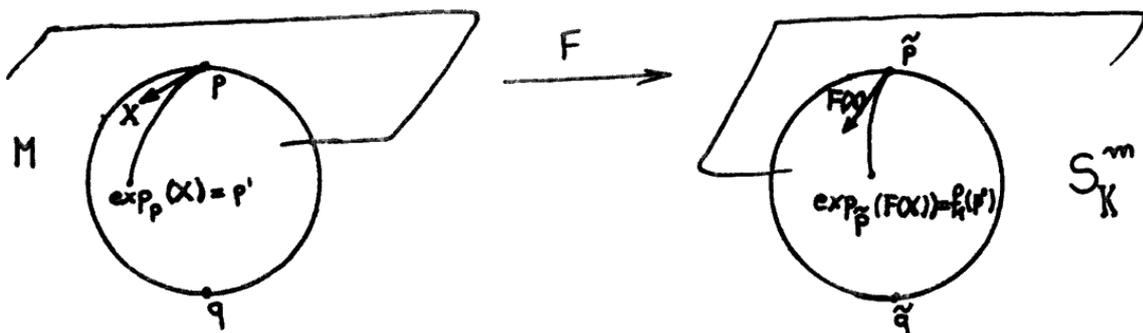
pertanto $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ è un'isometria ($T_p M = (\mathbb{R}^m, \delta_{ij})$). Inoltre per il lemma 3.2.4. \exp_p è un rivestimento e quindi, essendo M semplicemente connessa, un diffeomorfismo. (*)

(*) Infatti, valendo per un rivestimento f la proprietà di sollevamento della omotopia si ha che se $f(p) = f(q)$ e $p \neq q$, un cammino da p a q si proietta in un cammino chiuso di origine $f(q)$. Se la base è semplicemente connessa, una omotopia di questo coppia al coppia costante si solleva ad un'omotopia del cammino originario ad un cammino tutto contenuto in $f^{-1}(f(p))$ (omotopia che mantiene fissi gli estremi). Ma ciò è assurdo perché la fibra di un rivestimento è discreta.

Sia $K < 0$. \exp_p è un diffeomorfismo locale in quanto non vi sono punti coniugati. Inoltre per una delle interpretazioni geometriche della curvatura date nel capitolo I, le geodetiche uscenti da p "divergono" e quindi, salvo qualche noiosa verifica, possiamo concludere che \exp_p è globalmente bigettiva. Sia M_1 lo spazio di Poincaré costruito precedentemente; ovviamente le stesse considerazioni valgono per M_1 . Se $F : T_p M \rightarrow T_{o_1} M_1$ è un'isometria, consideriamo l'applicazione differenziabile $f : M \rightarrow M_1$ definita da $f = \exp_{o_1} \circ F \circ \exp_p^{-1}$.

Risulta allora $(df)_{\gamma(t)} X_i(t) = \tilde{X}_i(t)$ dove \tilde{X}_i sono i campi di Jacobi costruiti su M_1 analogamente agli X_i lungo la geodetica $t \rightarrow \exp_o(tF(\dot{\gamma}(0)))$ (ricordiamo che γ è la geodetica lungo la quale sono definiti gli X_i). Ne segue allora che f è un'isometria e per lo stesso argomento del caso precedente M ed M_1 sono isometriche.

Se $K > 0$, con le notazioni dell'ultimo paragrafo del capitolo II si ottiene $C^1(p) = \{X \in T_p M / \|X\| = \pi/\sqrt{K}, \phi(t) = \text{sen } \sqrt{K} t, \text{ e quindi, fissato sulla sfera standard } S_K^m \text{ un punto } p \text{ ed un'isometria } F : T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} S_K^m, \text{ resta definita un'applicazione continua } f_1 : M \rightarrow S_K^m, f_1 = \exp_{\tilde{p}} \circ F \circ \exp_p^{-1}, \text{ che è differenziabile su } \exp_p(\{X \in T_p M / \|X\| < \pi/\sqrt{K}\})\}.$



Consideriamo ora $q = \exp_p(C^1(p))$ e l'applicazione $\sigma : T_p M \rightarrow T_q M$

$$\text{data da } \sigma(X) = \left[\frac{d \exp_p(tX)}{dt} \right]_{t=\pi/\sqrt{K}}.$$

Se $\alpha : M \rightarrow M$ è l'applicazione $\alpha(p) = \exp_p(C^1(p))$ risulta

$$(d\alpha)_p = \sigma \text{ e quindi } \sigma \text{ è lineare. Analogamente sia } \tilde{\sigma} : T_{\tilde{p}} S_K^m \rightarrow T_{\tilde{q}} S_K^m$$

l'analoga applicazione per S_K^m . Possiamo allora definire

$$f_2 = \exp_q \circ \tilde{\sigma} \circ F \circ \sigma^{-1} \circ \exp_p^{-1} : M \rightarrow S_K^m.$$

La differenziabilità di f_2 in q ed il fatto che $f_1 = f_2$ ci forniscono una applicazione differenziabile su tutta la varietà M , $f: M \rightarrow S_K^m$.

Con ragionamenti simili a quelli già seguiti si prova poi che M ed S_K^m sono isometriche. ■

OSSERVAZIONI: 1) Per concludere che $(df)_p$ è un'isometria abbiamo usato implicitamente il fatto che un'applicazione lineare che manda una base ortonormale biunivocamente su una base ortonormale è un'isometria.

2) Notiamo che nel caso $K > 0$ la differenziabilità di f_1 in q non è affatto scontata a priori. In effetti per poter definire f_1 su tutta M e per provare la continuità ci siamo valsi solo del fatto

$$\text{che } C^1(p) = \{X \in T_p M / \|X\| = K_0\}, C^1(p) = C_{m-1}^1(p) \text{ (cioè } \exp_p(C^1(p)) = \{q\})$$

e del fatto che la restrizione di \exp_p a $\{X \in T_p M / \|X\| < K_0\}$ è localmente bigettiva.

Queste sole ipotesi però non implicano che f_1 sia differenziabile.

3.3. VARIETA' A CURVATURA DI SEGNO COSTANTE.

Facciamo ora cadere l'ipotesi che la curvatura sezionale rimanga costante per ogni 2-piano tangente e vediamo come alcune delle conclusioni del paragrafo precedente rimangono vere sotto l'ipotesi più debole che K abbia segno costante.

3.3.1. LEMMA. Sia M una varietà completa, $p \in M$ e $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ ovunque non singolare. Allora \exp_p è un rivestimento.

Dimostrazione. Definiamo una metrica in $T_p M$ diversa dalla metrica ellittica considerata in 3.2.1. ponendo per $X \in T_p M$, $V, W \in T_X T_p M$

$$(V, W) = ((d\exp_p)_X V, (d\exp_p)_X W).$$

Il prodotto scalare così definito $((d\exp_p)_X)$ è non singolare per ogni $X \in T_p M$ munisce $T_p M$ di una struttura riemanniana rispetto alla quale $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ è un'isometria. Inoltre le geodetiche uscenti da $0 \in T_p M$ rispetto alla nuova metrica non sono altro che i "sollevamenti" delle geodetiche in M uscenti da p e quindi sono ancora i raggi $\{tX / t \in \mathbb{R}, X \in T_p M\}$. Per il teorema di Hopf-Rinow enunciato nel capitolo I $T_p M$ risulta completa rispetto a questa nuova metrica e, per il lemma 3.2.4., \exp_p risulta essere un rivestimento. ■

3.3.2. TEOREMA. (di Cartan-Hadamard). Sia M una varietà completa e semplicemente connessa. Indicata con K la curvatura sezionale sia $K(X, Y) < 0$ per ogni X, Y . Allora $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ è un diffeomorfismo, quindi M risulta diffeomorfa ad \mathbb{R}^m .

Dimostrazione Se proviamo che \exp_p risulta ovunque non singolare, per il lemma 2.1.7. avremo che \exp_p è un rivestimento e l'ipotesi di semplice connessione assicurerà la tesi.

Ricordando dalla proposizione 2.2.7. che i punti coniugati a p sono tutte e solo le immagini di punti singolari di \exp_p basterà dimostrare che se $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ è una geodetica e $J \in \Gamma(\gamma)$ è un campo di Jacobi nullo in 0 e non identicamente nullo, allora $J(t) \neq 0$ per ogni $t \neq 0$

Ora dall'equazione di Jacobi risulta $(\frac{D^2}{dt^2} J, J) = (R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma}, J) = -K(\dot{\gamma}, J) \geq 0$ e quindi $\frac{d}{dt}(\frac{D}{dt} J, J) = (\frac{D^2}{dt^2} J, J) + |\frac{D}{dt} J|^2 \geq 0$, pertanto la funzione

$\varphi = (\frac{D}{dt} J, J)$ è monotona non decrescente e $\varphi(0) = 0$. Se per qualche $t_0 \neq 0$ risulta $\varphi(t_0) = 0$ si ha dunque $\varphi(t) = 0$ per ogni $t \in [0, t_0]$ e quindi $J(t) = 0$ come segue immediatamente. ■

Per studiare il caso $K > 0$ introduciamo una "misura di curvatura" un po' diversa.

Se $p \in M$ e $X_1, X_2 \in T_p M$ definiamo $\bar{C}(X_1, X_2) : T_p M \rightarrow T_p M$ ponendo $\bar{C}(X_1, X_2)(Y) = R(X_1, Y) X_2$ essendo R al solito il tensore di curvatura.

3.3.3. DEFINIZIONE. Definiamo curvatura di Ricci in X_1, X_2 e la indichiamo con $C(X_1, X_2)$ la traccia dell'applicazione $\bar{C}(X_1, X_2)$. In particolare poniamo $C(X) = C(X, X)$.

E' facile vedere che la curvatura di Ricci è un tensore doppio covariante.

3.3.4. LEMMA. Sia $\{X_1, \dots, X_m\}$ una base ortonormale in $T_p M$. Se indichiamo come al solito con K la curvatura sezionale risulta

$$C(X_m) = C(X_m, X_m) = \sum_{i=1}^{m-1} K(X_m, X_i).$$

Dimostrazione. $C(X_m) = \text{traccia} \left((R(X_m, X_i)X_m, X_j) \right) =$

$$= \sum_{i=1}^m (R(X_m, X_i)X_m, X_i) = \sum_{i=1}^{m-1} K(X_m, X_i). \blacksquare$$

3.3.5. TEOREMA (di Myers-Bonnet). Se per ogni $p \in M$ e $X \in T_p M$ con

$\|X\| = 1$ risulta $C(X) \geq \frac{m-1}{r^2}$, $r > 0$, allora nessuna geodetica di

lunghezza maggiore di πr è minimale.

Dimostrazione. Sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una geodetica di lunghezza $L > 0$ parametrizzata con la lunghezza d'arco. Sia $\{X_1(t), \dots, X_m(t)\}$ una base or-

tonormale in $T_{\gamma(t)} M$ tale che i campi di vettori $X_i(t)$ siano paralleli

lungo γ e $X_m = (1/L)\dot{\gamma}(t)$. Poniamo $J_i = (\sin \pi t)X_i$. Risulta allora

$$\frac{1}{2} E_{**}(J_i, J_i) = \int_0^1 (J_i(t), \frac{D}{dt} J_i(t) + R(\dot{\gamma}(t), J_i(t))\dot{\gamma}(t)) dt =$$

$$= \int_0^1 (\sin \pi t)^2 \{ \pi^2 - L^2 ((X_m(t), X_i(t))X_m(t), X_i(t)) \} dt.$$

Sommando e tenendo conto del lemma 3.3.4. si ottiene

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} E_{**}(J_i, J_i) = \int_0^1 (\sin \pi t)^2 \{ (m-1)\pi^2 - L^2 C(X_m) \} dt$$

Poiché $C(X_m) \geq \frac{m-1}{r^2}$, se $L > \pi r$ risulta $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} E_{**}(J_i, J_i) < 0$.

La forma E_{**} non è quindi semidefinita positiva su $T_\gamma \Omega$ e quindi per

il corollario 2.1.13. γ non è minimale. ■

3.3.6. COROLLARIO. Nelle stesse ipotesi del teorema precedente risulta

- 1) M è compatta
- 2) $\pi_1(M)$ è finito.

Dimostrazione. Per la 1) osserviamo che $M = \exp_p(\{X \in T_p M / \|X\| \leq \pi r\})$ e

quindi essendo immagine continua di un compatto è un compatto.

Per la 2) sia $\eta: \tilde{M} \rightarrow M$ il rivestimento universale di M (si veda Spanier [25]).

Sollemando la metrica di M su \tilde{M} mediante η cioè ponendo per definizione $(X, Y) = (d\eta(X), d\eta(Y))$, si ottiene su \tilde{M} una struttura riemanniana con le stesse caratteristiche di curvatura e dunque per 1) \tilde{M} è compatta. Ma allora per ogni $p \in M$ $\eta^{-1}(p)$ è un insieme finito di punti e quindi $\pi_1(M)$ è finito (si veda ancora Spanier). ■

3.3.7. COROLLARIO. Se $K(X, Y) \geq K_0 > 0$ per ogni X, Y allora $C(X) \geq \frac{n-1}{\sqrt{K_0-1}}$

e quindi valgono le conclusioni del teorema di Myers-Bonnet.

3.4. GRUPPI DI LIE E SPAZI SIMMETRICI.

Esaminiamo ora alcuni dei concetti e risultati fin qui esposti su un tipo particolare di varietà: gli spazi simmetrici. Dette varietà sono importanti perché la struttura di cui sono dotate permette calcoli "effettivi" ed inoltre esse costituiscono una classe abbastanza vasta da offrire una gamma di esempi interessanti e buoni tests su cui controllare congetture.

Per le definizioni e prime proprietà rimandiamo a Helgason [13].

Se G è un gruppo di Lie, e l'elemento neutro di G , $\mathfrak{g} = T_e G$ l'algebra di Lie associata indichiamo con L_g la traslazione sinistra per $g \in G$ e con R_g quella destra e sia

$(Ad_g)_e = (d(R_g \circ L_{g^{-1}}))_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ la rappresentazione aggiunta. Un

prodotto scalare sull'algebra \mathfrak{g} induce una metrica riemanniana su G invariante per traslazioni sinistre.

In generale non sarà possibile munire G di una metrica invariante sia a sinistra che a destra salvo in casi particolari. Ad esempio se G è unimodulare^(*) e \langle , \rangle un prodotto scalare in \mathfrak{g} , ponendo

(*) Ricordiamo che una misura su un gruppo di Lie G è una famiglia continua $\{\mu_g\}_{g \in G}$ di misure su $T_g G$. E' noto che se G è localmente compatto, come nel caso di gruppi di Lie lineari reali, una misura μ_e assegnata su $T_e G$ si può estendere tramite il differenziale delle traslazioni sinistre a ogni $T_g G$ in modo continuo e si ottiene così una misura invariante a sinistra su G .

Se tale misura, detta di Haar, è anche invariante a destra si dice che G è unimodulare. Ciò si verifica sicuramente se G è compatto; più in generale si prova che G è unimodulare se e solo se $\det(Ad_g) = 1$ per ogni $g \in G$.

$$(V, W) = \int_{G \times G} \langle (dL_g)_* \circ (dR_h)_* (V), (dL_h)_* \circ (dR_g)_* (W) \rangle d\mu(g) d\mu(h)$$

si ottiene una metrica riemanniana invariante a destra e a sinistra.

Ricordiamo inoltre che le geodetiche uscenti da e , rispetto ad una metrica invariante a sinistra, sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$\dot{\gamma}_X(t) = (dL_{\gamma(t)})_*(X) \quad , \quad \gamma_X(0) = e$$

e quindi se X è un campo di vettori invariante a sinistra $\nabla_X X = 0$.

3.4.1. PROPOSIZIONE. Sia G un gruppo di Lie con una metrica invariante a sinistra e a destra (biinvariante). Siano X, Y, Z, W campi di vettori su G invarianti a sinistra. Allora

- i) $([X, Y], Z) = -(X, [Y, Z])$
- ii) $R(X, Y)Z = \frac{1}{4} [[X, Y], Z]$
- iii) $(R(X, Y)Z, W) = \frac{1}{4} ([X, Y], [Z, W])$.

Dimostrazione. Se X, Y sono invarianti a sinistra, anche $X+Y$ lo è e dunque

$$0 = \nabla_{X+Y} X+Y = \nabla_X Y + \nabla_Y X \quad \text{per cui} \quad \nabla_X Y = -\frac{1}{2} [X, Y].$$

Inoltre $0 = Y(X, Z) = (\nabla_Y X, Z) + (X, \nabla_Y Z)$ e quindi $([Y, X], Z) = -(X, [Y, Z])$.

Usando ancora l'uguaglianza $\nabla_X Y = -\frac{1}{2} [X, Y]$ si ottiene la ii)

$$R(X, Y)Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z = \dots = \frac{1}{4} [[X, Y], Z].$$

Analogamente si verifica la iii). ■

3.4.2. COROLLARIO. Nelle ipotesi della proposizione precedente si verifica $K(X,Y) \geq 0$

$K(X,Y) = 0$ se e solo se $[X,Y] = 0$.

Indichiamo con $\mathcal{C} = \{X \in \mathfrak{g} / [X,Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\}$ il centro di \mathfrak{g} .

3.4.3. TEOREMA. Un gruppo di Lie con metrica biinvariante e centro nullo è compatto ed ha gruppo fondamentale $\pi_1(G)$ finito.

Dimostrazione. Sia X un vettore unitario in \mathfrak{g} e $\{X, X_1, \dots, X_{m-1}\}$ una base ortonormale. Poiché $\mathcal{C} = \{0\}$ esiste $i \in \{1, \dots, m-1\}$ tale che $[X, X_i] \neq 0$.

Ne segue allora

$$C(X) = \sum_{i=1}^{m-1} (R(X, X_i)X, X_i) > 0$$

inoltre $C(X)$ è una funzione continua sulla sfera unitaria $S = \{X \in \mathfrak{g} / \|X\| = 1\}$ e quindi esiste K_0 tale che $C(X) \geq K_0 > 0$ per ogni $X \in S$.

La conclusione segue allora dal teorema di Myvers-Bonnet 3.3.5.. ■

Ricordando il teorema di struttura dei gruppi di Lie commutativi (un gruppo di Lie commutativo G si può ottenere dal prodotto

$G \cong S^1 \times \dots \times S^1 \times \mathbb{R}^k$ dove S^1 è il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi di modulo unitario ed \mathbb{R}^k il gruppo additivo sostegno di uno spazio vettoriale di dimensione k) si ottiene la seguente carat-

terizzazione dei gruppi con metrica biinvariante.

3.4.4. COROLLARIO. Un gruppo di Lie G possiede una metrica biinvariante se e solo se $G = G' \times S^1 \times \dots \times S^1 \times \mathbb{R}^k$ con G' compatto.

Dimostrazione. Se $G = G' \times S^1 \times \dots \times S^1 \times \mathbb{R}^k$ allora possiede una metrica biinvariante poiché G' è compatto (si ricordino le considerazioni fatte all'inizio del paragrafo) e gli altri fattori sono abeliani.

Viceversa se G possiede una metrica biinvariante e \mathfrak{e} è il centro di \mathfrak{g} e $\mathfrak{e}^\perp = \{X \in \mathfrak{g} / (X, Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{e}\}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{e} \oplus \mathfrak{e}^\perp$ e quindi

G è prodotto $G = G' \times G''$ di due gruppi di Lie le cui algebre sono rispettivamente $\mathfrak{g}' = \mathfrak{e}^\perp$ e $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{e}$.

Ne segue allora che G' è compatto per il teorema 3.4.3. e G'' è abeliano. ■

Sia G un gruppo di Lie con una metrica biinvariante e H un sottogruppo chiuso. Introdotta nel gruppo G/H la topologia quoziente modulo la relazione $x \sim y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$, si può definire canonicamente su G/H una struttura di varietà differenziabile rispetto alla quale la proiezione $\pi : G \rightarrow G/H$ è differenziabile.

Siano \mathfrak{g} ed \mathfrak{h} le algebre di Lie di G ed H rispettivamente e $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}$; allora $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ e $T_{\pi(e)} G/H \cong \mathfrak{m}$.

Poiché la metrica su G è biinvariante esiste un'unica metrica su G/H tale che $d\pi|_{(dL_x)(\mathfrak{m})} : (dL_x)(\mathfrak{m}) \rightarrow T_{\pi(x)} G/H$ è un'isometria.

G/H dotato di una tale metrica si dice uno spazio omogeneo normale e $\pi : G \rightarrow G/H$ risulta una coimmersione riemanniana.

3.4.5. DEFINIZIONE. Uno spazio omogeneo G/H si dice simmetrico se G è connesso ed è dotato di un'involuzione $\sigma : G \rightarrow G$, cioè di un automorfismo analitico σ tale che $\sigma^2 = I_G$, e se il sottogruppo chiuso H è contenuto nello insieme G dei punti fissati di σ e contiene la componente di e in G .

Posto

$$\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g} \mid (d\sigma)_e X = -X\} \quad \mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid (d\sigma)_e X = X\}$$

risulta

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m} \quad , \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{h} \quad , \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$$

Tale decomposizione inoltre è invariante per traslazioni sinistre per elementi di G e destre per elementi di H . Inoltre σ induce un automorfismo analitico involutivo su G/H .

Sia $(G/H, \sigma)$ uno spazio simmetrico e (\cdot, \cdot) una metrica in G invariante per traslazioni sinistre per elementi di G , per traslazioni destre per elementi di H e per σ .

Se $X \in \mathfrak{h}$ e $Y \in \mathfrak{m}$, $(X, Y) = (\sigma(X), \sigma(Y)) = -(X, Y)$ e dunque \mathfrak{h} ed \mathfrak{m} sono ortogonali.

La metrica di G induce in modo naturale una metrica su G/H (ovviamente invariante per σ).

3.4.6. PROPOSIZIONE. Se $(G/H, \sigma)$ è dotato della struttura riemanniana suddetta si ha

$$K((d\pi)_e(X), (d\pi)_e(Y)) = \left\| \left[X, Y \right] \right\|^2$$

dove K è la curvatura sezionale in G/H e $\pi : G \rightarrow G/H$ la suriezione

ne canonica.

ESEMPIO 1). Come è noto $S^m = \frac{SO(m+1)}{SO(m)}$ è un gruppo di Lie; consi-

deriamo in $T_I SO(m+1)$ il prodotto scalare

$$(X, Y) = -\frac{1}{2} \text{traccia}(X \cdot Y)$$

e l'involuzione σ in $SO(m+1)$ definita da

$$\sigma(X) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} .$$

Estendendo $(,)$ per traslazioni sinistre si ottiene su $SO(m+1)$ una metrica invariante per σ .

Indicando con $\text{Skew}(m+1)$ l'insieme delle matrici antisimmetriche si vede facilmente che $\text{Skew}(m+1) \cong T_I SO(m+1)$ ($\exp A \in O(m+1) \Leftrightarrow A \in \text{Skew}(m+1)$).

Se $C \in \text{Skew}(m)$, $c = (c_1 e_2 \dots c_m)$ e c^t è la matrice trasposta di c è immediato vedere che $\text{Skew}(m+1)$ e \mathfrak{m} sono formati rispettivamente dalle matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & c \\ c^t & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c^t & 0 \end{pmatrix} .$$

Se $X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x^t & 0 \end{pmatrix}$ ed $Y = \begin{pmatrix} 0 & y \\ y^t & 0 \end{pmatrix}$ sono due matrici di \mathfrak{m} risulta

$$(X, Y) = \sum_i x_i y_i \quad \text{e} \quad ||X|| = (\sum_i x_i^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Se inoltre X e Y sono ortonormali, in base alla 3.4.6. si ha

$$K((d\pi)_e(X), (d\pi)_e(Y)) = ||[X, Y]||^2 = -\frac{1}{2} \text{traccia} ((\sum_k (x_i y_k - y_i x_k) \cdot (x_k y_j - y_k x_j))_{i,j}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (x_i y_k - y_i x_k)^2 = 1.$$

ESEMPIO 2). Consideriamo lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{C}P^m = \frac{U(m+1)}{U(1) \times U(m)}$

con la metrica $(X, Y) = -R \text{traccia}(X \cdot Y)$. Si vede subito che l'algebra di Lie di $U(m+1)$ è l'algebra delle matrici antihermitiane; si verifi-

ca facilmente inoltre che l'involutione $\sigma(X) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$

munisce $\mathbb{C}P^m$ di una struttura di spazio simmetrico.

Procedendo analogamente a quanto fatto nel caso precedente si vede

che \mathfrak{m} è lo spazio delle matrici del tipo $X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x^t & 0 \end{pmatrix}$ e quindi

se $X, Y \in \mathfrak{m}$ sono ortonormali e se Ψ è l'angolo formato dai vettori di \mathbb{R}^{2m} immagine di x ed y tramite l'identificazione canonica di \mathbb{C}^m con \mathbb{R}^{2m} risulta

$$K((d\pi)_e(X), (d\pi)_e(Y)) = ||[X, Y]||^2 = 1 + 3 \cos^2 \Psi.$$

In particolare $1 \leq K \leq 4$.

Dai teoremi visti nei paragrafi precedenti si ottiene allora il seguente risultato.

3.4.7. PROPOSIZIONE. Se $p \in \mathbb{C} P^m$ e γ è una geodetica uscente da p allora il primo punto coniugato rispetto a p lungo γ è a distanza $\frac{\pi}{2}$ ed ha ordine 1, il secondo si trova a distanza doppia ed ha ordine $m-1$, il terzo a distanza tripla ed ha ordine 1 e così via.

Notiamo come un gruppo di Lie connesso G possa dotarsi di una struttura canonica di spazio simmetrico.

Infatti consideriamo $G^2 = G \times G$ e l'involuzione $\sigma : G^2 \rightarrow G^2$ definita da $\sigma(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$; ovviamente l'insieme dei punti fissi è la diagonale Δ che è isomorfa a G ed è un sottogruppo chiuso ed inoltre $G^2 / \Delta \cong G$.

3.4.8. TEOREMA. Sia $(G/H, \sigma)$ uno spazio simmetrico e $p \in G/H$. Esiste allora un'isometria $I_p : G/H \rightarrow G/H$ tale che $I_p(p) = p$ e se γ è una geodetica tale che $\gamma(0) = p$ allora $I_p(\gamma(t)) = \gamma(-t)$.

Dimostrazione(cenno). σ induce un'isometria di G/H in sé che gode della proprietà suddetta per $p = \pi(e)$. Se $p \neq e$ sia $g \in G$ tale che $L_g(p) = \pi(e)$.

Allora $I_p = L_g \circ \sigma \circ L_{g^{-1}}$ fornisce l'isometria cercata. ■

OSSERVAZIONE. Si può dimostrare che una varietà M con una famiglia

di isometrie come nell'enunciato del teorema precedente è uno spazio simmetrico.

3.4.9. PROPOSIZIONE. Siano X, Y, Z campi di vettori lungo una geodetica γ di uno spazio simmetrico $M = (G/H, \sigma)$ e paralleli lungo γ . Allora $R(X, Y)Z$ è parallelo lungo γ ^(*).

Dimostrazione. Se W è un campo di vettori parallelo lungo γ e $q = \gamma(c)$, $T = I_{\gamma(c/2)} \circ I_p$ è un'isometria che porta p in q .

Risulta allora

$$\begin{aligned} (R(X_q, Y_q)Z_q, W_q) &= (R((dT)_e(X_p), (dT)_e(Y_p))(dT)_e(Z_p), (dT)_e(W_p)) = \\ &= (R(X_p, Y_p)Z_p, W_p), \end{aligned}$$

cioè $(R(X, Y)Z, W)$ è costante per ogni campo parallelo W ; le componenti, rispetto a un riferimento parallelo lungo γ , di $R(X, Y)Z$ sono quindi costanti e perciò $R(X, Y)Z$ è parallelo. ■

Cerchiamo, ora, nel caso di spazi (localmente) simmetrici, soluzioni esplicite dell'equazione di Jacobi.

Sia $\gamma : R \rightarrow M$ una geodetica e $K : T_{\gamma(0)}M \rightarrow T_{\gamma(0)}M$ la trasformazione lineare data da $K_\gamma(X) = R(\dot{\gamma}(0), X)\dot{\gamma}(0)$. Indichiamo con k_1, \dots, k_m gli autovalori di K_γ .

(*) Le varietà che godono della proprietà che $R(X, Y)Z$ è parallelo se X, Y, Z sono paralleli si dicono spazi localmente simmetrici (le simmetrie I_p in tali spazi possono definirsi solo localmente). Un noto teorema di Cartan ci assicura che se M è completa, semplicemente connessa e localmente simmetrica allora M è uno spazio simmetrico.

3.4.10. TEOREMA. I punti coniugati a $p = \gamma(0)$ lungo γ sono i punti $(\pi n / \sqrt{k_i})$ con $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ e k_i autovalore positivo di K_γ .

Dimostrazione(cenno). Innanzitutto notiamo che K_γ è autoaggiunto

$(K_\gamma(X), Y) = (X, K_\gamma(Y))$ e quindi esiste una base ortonormale $\{X_1, \dots, X_m\}$

con $K_\gamma(X_i) = k_i X_i$. Trasportando gli X_i parallelamente lungo γ si ot-

tiene un riferimento ortonormale parallelo rispetto al quale le componen-
ti W_j di un campo di Jacobi soddisfano l'equazione $W_j'' + e_j W_j = 0$ e quin-

di si ha facilmente la tesi. ■

In questo capitolo abbiamo cominciato a vedere come facendo delle ipotesi sulla curvatura si possono ottenere proprietà topologiche sulla varietà.

E' naturale a questo punto domandarsi se, inversamente, data una varietà con determinate proprietà topologiche sia possibile dedurre proprietà delle metriche che si possono definire sulla varietà stessa. Probabilmente non esiste ancora nessun metodo per ottenere risultati di questo tipo e pochissimi sono anche i risultati parziali.

Uno dei pochi risultati è che esistono varietà differenziabili omeomorfe a sfere che non ammettono metriche a curvatura positiva.

Il seguente esempio è ripreso da Cheeger-Hebin [8].

Sia $Sp(m)$ il gruppo delle matrici $m \times m$ ad elementi nel corpo dei quaternioni e tali che $A \cdot \bar{A}^t = I$. $Sp(m)$ è un gruppo di Lie compatto ed è quindi dotabile di una metrica biinvariante. Consideriamo l'azione di $Sp(1)$ su $Sp(2)$ data da $*$: $Sp(1) \times Sp(2) \rightarrow Sp(2)$ definita ponendo

$$q * A = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \bar{q} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa azione è libera e lo spazio quoziente $Sp(2)/*$ risulta essere omeomorfo a S^7 . Applicando i risultati precedenti è facile vedere che la curvatura sezionale è non negativa. Si può vedere inoltre che detta curvatura è strettamente positiva su un insieme denso ma non è noto se è ovunque strettamente positiva né se $Sp(2)/*$ è dotata di un'altra metrica con curvatura strettamente positiva.

La ricerca di esempi di questo tipo ha interesse anche per dare direttive e suggerimenti in problemi di carattere generale. Infatti, ad esempio, una delle difficoltà maggiori nell'affrontare il problema della classificazione delle varietà a curvatura strettamente positiva è la manca di esempi, se si eccettuano le varietà classiche degli spazi proiettivi complessi e quaternionali e pochissime altre.

CAPITOLO IV

I TEOREMI DI CONFRONTO

4.1. IL TEOREMA DELL'INDICE ED I TEOREMI DI RAUCH.

Abbiamo visto come la forma F_{**} ci dia indicazioni sul comportamento globale delle geodetiche e questo ci permetta, mediante il confronto con varietà "modello" di trarre conclusioni sulla struttura delle varietà. Ci proponiamo ora di approfondire questa "tecnica del confronto" dimostrando un Teorema dovuto a Rauch di estrema importanza per questo genere di questioni.

4.1.1. DEFINIZIONE. Sia $\gamma : [0,1] \rightarrow M$ una geodetica e $V, W \in \Gamma(\gamma)$. Definiamo indice di V e W la quantità

$$I(V, W) = \int_0^1 \{ (V', W') - (R(W, \dot{\gamma})V, \dot{\gamma}) \} dt$$

che scriveremo anche nella forma più familiare

$$I(V, W) = (V, W')(1) - (V, W')(0) - \int_0^1 \{ V, W'' + R(\dot{\gamma}, W)\dot{\gamma} \} dt.$$

4.1.2. TEOREMA (Lemma fondamentale dell'indice). Supponiamo che non esistano in $[0,1]$ punti coniugati a $\gamma(0)$ lungo γ . Sia $W \in \Gamma(\gamma)$ con $W(0) = 0$ e $J \in \Gamma(\gamma)$ un campo di Jacobi tale che $J(0) = 0$ e $J(1) = W(1)$. Allora $I(J, J) \leq I(W, W)$ e $I(J, J) = I(W, W)$ se e solo se $J = W$.

Dimostrazione. Sia $\{V_i\}_{i=1, \dots, m}$ una base ortonormale in $T_{\gamma(1)}M$.

Poiché non vi sono punti coniugati possiamo estendere $\{V_i\}$ a campi di Jacobi lungo γ tali che $V_i(0) = 0$ e $\{V_i(t)\}$ siano indipendenti

per $t \neq 0$. Poiché $V_i(0) = 0$, usando un'espressione locale per V_i intorno a $t = 0$ e la formula di Taylor si vede facilmente che i campi di vettori $A_i(t) = t^{-1}V_i(t)$ sono ben definiti per $0 < t < 1$ e generano inoltre $T_{\gamma(t)}^M$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Si avrà allora $W(t) = \sum_i w_i(t)A_i(t) = \sum_i y_i(t)V_i(t)$ avendo posto $y_i(t) = t^{-1}w_i(t)$ (il che è ancora lecito come risulta da un controllo con la formula di Taylor per $t = 0$). Risulta allora:

$$W'(t) = \frac{D}{dt} W(t) = \sum_i y_i'(t) V_i(t) + \sum_i y_i(t) V_i'(t)$$

Se $X_1(t) = \sum_i y_i'(t)V_i(t)$ e $X_2(t) = \sum_i y_i(t) V_i'(t)$ si ha

$$||W'(t)||^2 = ||X_1(t)||^2 + ||X_2(t)||^2 + 2(X_1(t), X_2(t)).$$

Poiché ogni V_i è un campo di Jacobi risulta

$$-(R(\dot{\gamma}, W)\dot{\gamma}, W) = - \sum_i y_i (R(\dot{\gamma}, V_i) \dot{\gamma}, W) =$$

$$= \sum_i y_i (V_i'', W) = \sum_i y_i \left(\frac{d}{dt} (V_i', W) - (V_i', W') \right) =$$

$$= \frac{d}{dt} \langle X_2, W \rangle - \sum_i y_i' (V_i', W) - (X_1, X_2) - ||X_2||^2.$$

$$\text{Ne segue } I(W, W) = \int_0^1 \{ ||W'||^2 + (R(\dot{\gamma}, W) \dot{\gamma}, W) \} dt =$$

$$= \int_0^1 \{ ||X_1||^2 + (X_1, X_2) + \frac{d}{dt} (X_2, W) - \sum_i y_i' (V_i', W) \} dt.$$

$$\text{Ma } (X_1, X_2) - \sum_i y_i' (V_i', W) = \sum_{i,j} y_i' y_j ((V_i, V_j') - (V_i', V_j))$$

$$e \quad \frac{d}{dt} ((V_i, V_j') - (V_i', V_j)) = - (R(\dot{\gamma}, V_j) \dot{\gamma}, V_i) + (R(\dot{\gamma}, V_i) \dot{\gamma}, V_j) = 0$$

$$\text{quindi per ogni } t \quad (V_i, V_j')(t) - (V_i', V_j)(t) = (V_i, V_j')(0) - (V_i', V_j)(0) = 0.$$

In definitiva

$$I(W, W) = \int_0^1 \{ ||X_1||^2 + \frac{d}{dt} (X_2, W) \} dt = (X_2, W)(1) + \int_0^1 ||X_1||^2 dt.$$

$$I(J, J) = (J', J)(1).$$

Posto $J(t) = \sum_i c_i V_i(t)$ con $c_i \in \mathbb{R}$ ed essendo $J(1) = W(1)$

$$\text{quindi } y_i(1) = c_i,$$

$$I(W, W) - I(J, J) = \int_0^1 ||X_1||^2 dt \geq 0$$

e $I(W, W) = I(J, J)$ se e solo se $X_1(t) = 0$ per ogni t ossia

$$y_i' \equiv 0 \quad \text{e quindi } y_i(t) = y_i(1) = c_i \quad \text{per ogni } t. \blacksquare$$

Vediamo ora come il teorema dell'indice ci dia informazioni sulla "posizione" dei punti coniugati.

4.1.3. TEOREMA (di Rauch) Siano M, \bar{M} varietà riemanniane, $p \in M$, $\bar{p} \in \bar{M}$. Sia $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ una geodetica con $\gamma(0) = p$ e $\bar{\gamma} : [0, a] \rightarrow \bar{M}$ una geodetica uscente da \bar{p} entrambe parametrizza-

te con la lunghezza d'arco nell'intervallo . $[0, a]$.

Siano inoltre $V \in \Gamma(\gamma)$ e $\bar{V} \in \Gamma(\bar{\gamma})$ campi di Jacobi tali che

$$||V'(0)|| = ||\bar{V}'(0)|| \text{ e } (\bar{V}', \dot{\gamma})_{\bar{P}} = (V', \dot{\gamma})_P = 0 \text{ e } V(0) = \bar{V}(0) = 0.$$

Supponiamo infine che per ogni $t \in [0, a]$ e per ogni 2-piano

$P \subseteq T_{\gamma(t)}^M$ contenente $\dot{\gamma}(t)$ e $\bar{P} \subseteq T_{\bar{\gamma}(t)}^{\bar{M}}$ contenente $\dot{\bar{\gamma}}(t)$ si

abbia $K_M(\bar{P}) = K_{\bar{M}}(\bar{P})$ ($K_M, K_{\bar{M}}$ denotano le curvatures sezionali rispettivamente in M ed \bar{M}) .

Allora se per ogni $t \in [0, a]$ $\bar{\gamma}(t)$ non è coniugato a $\bar{\gamma}(0)$ lungo $\bar{\gamma}$, risulta $||V(t)|| \geq ||\bar{V}(t)||$ per ogni t .

Dimostrazione. Posto $f(t) = ||V(t)||^2$ e $g(t) = ||\bar{V}(t)||^2$ risulta

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f''(t)}{g''(t)} = 1. \text{ Basterà dunque provare che la}$$

funzione $\frac{f(t)}{g(t)}$, ove è definita, è non decrescente, cioè $\frac{d}{dt} \frac{f}{g} \geq 0$

o equivalentemente $\frac{f'(t)}{f(t)} \geq \frac{g'(t)}{g(t)}$ per ogni t .

Osserviamo che se $g(t_0) = 0$ la tesi è banale per $t = t_0$, mentre se $f(t_0) = 0$ e se in un intorno sinistro di t_0 risulta $f(t) \geq g(t)$

la continuità di f e g assicura che $f(t_0) \geq g(t_0)$.

Fissato $t_0 \in [0, a]$ con $f(t_0) \neq 0$ e $g(t_0) \neq 0$ poniamo

$$X = \frac{V}{f(t_0)^{\frac{1}{2}}}, \quad \bar{X} = \frac{V}{g(t_0)^{\frac{1}{2}}}, \quad X \text{ e } \bar{X} \text{ sono dunque campi di}$$

Jacobi nulli in 0 e tali che $||X(t_0)|| = ||\bar{X}(t_0)|| = 1$.

Ora

$$\frac{f'(t_0)}{f(t_0)} = 2 \frac{(V, V')(t_0)}{(V, V)(t_0)} = 2(X, X')(t_0) = 2 \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} (X, X') dt =$$

$$= 2 \int_0^{t_0} \{(\dot{X}', X') + (X'', X)\} dt =$$

$$= 2 \int_0^{t_0} \{||X' ||^2 - (R(\dot{Y}, X)\dot{Y}, X)\} dt = 2 \int_0^{t_0} \{||X' ||^2 - K_M(\dot{Y}, X)\} dt.$$

Sia $\{E_i(t)\}$ una base ortonormale parallela lungo γ tale che

$E_1(t_0) = X(t_0)$ e analogamente $\{\bar{E}_i\}$ una base ortonormale parallela

lungo $\bar{\gamma}$ tale che $\bar{E}_1(t_0) = \bar{X}(t_0)$.

Esprimiamo X e \bar{X} in queste basi: $X = \sum_i X_i E_i$ $\bar{X} = \sum_i \bar{X}_i \bar{E}_i$ e po

niamo $\bar{X}_N = \sum_i \bar{X}_i \bar{E}_i$.

Allora $||\bar{X}_N|| = ||X||$ e $||\bar{X}'_N|| = ||X'||$. Sia h dunque ricordando

l'ipotesi e il teorema 4.1.2.

$$\frac{f'(t_0)}{f(t_0)} \geq 2 \int_0^{t_0} \{ ||\dot{X}'||^2 - K_M(\dot{\gamma}, \bar{X}_N) \} dt = 2 \int_0^{t_0} \{ ||\dot{\bar{X}}_N'||^2 - K_M(\dot{\gamma}, \bar{X}_N) \} dt \geq$$

$$\geq 2 \int_0^{t_0} \{ ||\dot{\bar{X}}_N'||^2 - K_M(\dot{\gamma}, \bar{X}) \} dt = \frac{g'(t_0)}{g(t_0)} \cdot \blacksquare$$

4.1.4. COROLLARIO. I) Se $K_M \leq K_0 \in \mathbb{R}$ allora per ogni geodetica γ la distanza tra un punto ed il primo punto coniugato ad esso lungo γ è maggiore o uguale a $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ (*).

II) Se $K_M \geq H_0 \in \mathbb{R}$ la suddetta distanza è minore o uguale a $\frac{\pi}{\sqrt{H_0}}$.

Dimostrazione. Basta applicare il teorema di Rauch ad M e ad

$\bar{M} = S_{K_0}^m$ ove $S_{K_0}^m$ è la sfera in \mathbb{R}^{m+1} di raggio $K_0^{-1/2}$ (e quindi curvatura costante K_0). ■

4.1.5. COROLLARIO. Sia $\phi : T_p M \rightarrow T_p \bar{M}$ un'isometria, $X \in T_p M$ e

(*) Se $K_0 \leq 0$ tale distanza è infinita nel senso che non esiste alcuna coppia di punti coniugati lungo una geodetica.

$$Y \in T_X(T_p M).$$

Supponiamo che per ogni $t_0 \in [0,1]$, $\exp_{\bar{p}}(t_0 \phi(X))$ non sia coniugato a \bar{p} lungo la geodetica $t \mapsto \exp_{\bar{p}}(t \phi(X))$ e che le curvature sezionali di M e \bar{M} si confrontino come in 4.1.3.. Allora

$$|| (d \exp_{\bar{p}})_X (Y) || \geq || (d \exp_{\bar{p}})_{\phi(X)} (d\phi_X (Y)) ||.$$

Dimostrazione. Segue dal teorema di Rauch tenendo presenti le proprietà fondamentali dei campi di Jacobi viste in precedenza. ■

4.2. IL TEOREMA DELLE SFERE.

Vogliamo dare ora un'applicazione del Teorema di Rauch che, oltre ad essere un importante risultato per sé, illustra molto efficacemente la potenza delle tecniche di confronto. Seguiremo qui la dimostrazione di Klingenberg [16] che mette particolarmente in evidenza la relazione tra la struttura del luogo coniugato e la topologia della varietà.

4.2.1. DEFINIZIONE. Diremo che M soddisfa l'ipotesi (Σ, k) in $p \in M$ se lungo ogni raggio $\{tX \mid t \geq 0\}$ con $X \in T_p M$ non vi sono punti coniugati nell'intervallo $\{tX \mid 0 < t < \pi\}$ e vi sono almeno k punti coniugati (contati con la propria molteplicità) nell'intervallo $\{tX \mid \pi \leq t < 2\pi\}$.

Almeno nel caso $k = m - 1$ la condizione (Σ, k) può essere interpretata dicendo che il primo luogo coniugato è "simile" a quello di una sfera.

4.2.2. LEMMA. Supponiamo che $\exp_p \{X \mid \|X\| < \pi\}$ non abbia punti critici.

Sia $q \in M$ e c_0, c_1 geodetiche in M congiungenti p e q , $c_0 \neq c_1$, e tali che esiste un'omotopia $H : [0, 1] \rightarrow \Omega(p, q)$ tale che $H(0) = c_0$, $H(1) = c_1$ e $L(H(t)) \leq L(c_1)$.

Allora

$$L(c_0) + L(c_1) \geq 2\pi$$

Dimostrazione. Si può assumere $L(c_0) < \pi$ altrimenti il lemma è banale. Possiamo allora sollevare c_0 in $T_p M$ ottenendo un segmento

$$\tilde{H}(0) = \{tY_p \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

Per la continuità di H possiamo sollevare $H(t)$ per piccoli valori di t . Ma questo non è possibile per tutti i t di $[0,1]$ poiché altrimenti per $t = 1$ otterremo un secondo segmento avente agli stessi estremi di $\tilde{H}(0)$ e questo è impossibile poiché $c_0 \neq c_1$.

Quindi per ogni $\epsilon > 0$ esiste $t_0 \in [0,1)$ tale che $H(t_0)$ non può essere sollevato in $\{X \mid \|X\| < \pi - \epsilon\}$.

Per il Lemma di Gauss si ha dunque

$$L(c_0) + L(H(t_0)) \geq 2\pi - 2\epsilon$$

e quindi la conclusione poiché

$$L(H(t_0)) \leq L(c_1). \blacksquare$$

4.2.3. LEMMA. Sia M una varietà semplicemente connessa e verificante (Σ, k) in p con $k \geq 2$. Allora M è compatta e

a) $\forall q \in M$ vicino a p e non coniugato a p lungo alcuna geodetica esiste un'unica geodetica minimale congiungente p e q e tutte le altre geodetiche hanno lunghezza maggiore o uguale a $2\pi - d(p, q)$.

b) Ogni geodetica non costante da p a q ha lunghezza maggiore o uguale a 2π (quindi indice^(*) non inferiore a k) e la distanza da p

(*) Per indice di una geodetica $\gamma: [0, l] \rightarrow M$ si intende il numero di punti coniugati a $\gamma(0)$ lungo γ nell'intervallo $[0, l]$ (contati con la propria molteplicità).

al suo luogo di taglio è maggiore o uguale a π .

Dimostrazione. M è chiaramente compatta per il corollario 2.3.6. ed inoltre esiste $\delta > 0$ tale che ogni geodetica di lunghezza $\geq 2\pi - \delta$ ha indice $\geq k$.

Sia $d(p,q) < \delta$, c_0 la geodetica minimale congiungente p e q (certamente unica se δ è piccolo) e c_1 un'altra geodetica qualsiasi da p a q . Poiché M è semplicemente connessa esiste un'omotopia $H : [0,1] \rightarrow \Omega(p,q)$ con $H(i) = c_i$, $i = 0,1$.

In [21] Milnor descrive la struttura di CW complesso di $\Omega(p,q)$ in termini della funzione energia^(*). Da quella discussione segue che una curva $H(t_0)$ di lunghezza massimale tra le $H(t)$ è una geodetica ed ha indice 1 se $H(t_0) \neq c_1$.

D'altra parte se $H(t_0) \neq c_1$ per il lemma 4.2.2. si ha

$L(H(t_0)) \geq 2\pi - L(c_0) \geq 2\pi - \delta$ per cui $H(t_0)$ dovrebbe avere indice

(*) Enunciamo il teorema di struttura per $\Omega(p,q)$ che servirà anche per dimostrare il teorema delle sfere.

Siano $p, q \in M$ non coniugati lungo alcuna geodetica. Allora $\Omega(p,q)$ ha una struttura di CW-complesso con una cella in dimensione K per ogni geodetica in $\Omega(p,q)$ di indice K .

Notiamo inoltre che $\Omega(p,q)$ è omeomorfo a $C^0(p,q)$ (vedi ancora Milnor [21]) $\forall p, q \in M$ e che la fibrazione dei cammini puntata in p

$$\Omega(p,q) \rightarrow PM \rightarrow M$$

è una fibrazione nel senso di Serre per cui tutte le fibre $\Omega(p,q)$ hanno lo stesso tipo di omotopia. (per questo e tutti gli altri argomenti di topologia algebrica si veda Spanier [25]).

$k \geq 2$. Quindi $H(t_0) = c_1$ ed il lemma 4.2.2. applicato ancora completa la dimostrazione di a). Osserviamo che per la proposizione 2.2.7., la condizione (Σ, k) assicura l'ipotesi del lemma 4.2.2..

La prima asserzione del punto b) segue non appena si noti che se un coppia geodetica non banale $c \in \Omega(p, q)$ ha lunghezza $2\pi - 2d < 2\pi$ esiste $q = c(t_0)$ vicino a p , quanto basta perché p e q non siano coniugati e la geodetica c tra essi abbia lunghezza pari alla loro distanza cioè sia una geodetica non minimale da p a q di lunghezza $< 2\pi - d(p, q)$ che è in contraddizione con a).

La seconda affermazione si ha non appena si noti che in caso contrario il punto del luogo di taglio a distanza minima da p non sarebbe coniugato a p per l'ipotesi (Σ, k) e quindi per il Teorema 2.3.1. esisterebbe un coppia geodetica non banale di lunghezza $< 2\pi$. ■

4.2.4. TEOREMA. Supponiamo che M sia semplicemente connessa e verifichi la (Σ, k) in p per $k \geq 2$. Allora $\pi_i(M) = 0$ per $1 \leq i \leq k$.

Dimostrazione. Dal lemma 4.2.3. e dal teorema citato sulla struttura di $\Omega(p, q)$ segue che $\Omega(p, q)$ è un CW-complesso con una 0-cella e celle di dimensione $\geq k$.

Ne segue dunque che $\pi_i(\Omega(p, q)) = 0 \quad 0 \leq i \leq k - 1$.

Ma $\pi_i(\Omega(p, q)) \cong \pi_{i+1}(M)$ come segue immediatamente dalla successione

esatta della fibrazione dei cammini (PM è contraibile !)

$\Omega(p, q) \rightarrow PM \rightarrow M$ e quindi la tesi. ■

4.2.5. COROLLARIO. Nelle stesse ipotesi del teorema 4.2.4. se

$$k \geq \frac{m-1}{2} \quad \text{e} \quad m \neq 3,4, \quad \text{M è omeomorfa a } S^m.$$

Dimostrazione. $\pi_i(M) = 0$ per $i \leq \frac{m-1}{2}$ per il teorema preceden-

te. In omologia si ha allora $H_i(M, \mathbb{Z}) = 0$ per $i \leq \frac{m-1}{2}$ e quindi

per dualità (M semplicemente connessa \Rightarrow M orientabile) $H_i(M) = 0$

per $i < m$. Definiamo l'applicazione "pizzico"

$$P : M \rightarrow S^m$$

nel modo seguente

Sia D^m un disco immerso in M e \bar{q} un punto di S^m .

Definiamo $P|_{D^m}$ come un diffeomorfismo di D^m su $S^m - \{\bar{q}\}$

$$\text{e } P(M - D^m) = \bar{q}.$$

E' facile vedere che P induce un isomorfismo in omologia e quindi per il teorema di Whitehead è un'equivalenza omotopica. La tesi segue dal teorema di Smale^(*). ■

4.2.6. COROLLARIO. (Teorema delle sfere). Sia M una varietà semplicemente connessa la cui curvatura sezionale prende valori solo nel-

l'intervallo $(\frac{1}{4}, 1]$.

Allora se $M \neq 3,4$ M è omeomorfa ad S^m (**).

(*) Congettura generalizzata di Poincaré (dimostrata per $m \neq 3,4$ da Smale): Se M^m ha il tipo di omotopia di S^m allora è omeomorfa a S^m (vedi Smale [24]).

(**) La nostra dimostrazione richiede $n \neq 3,4$ ma il teorema è valido senza questa ipotesi (vedi Berger [3]).

Dimostrazione. Segue dai corollari 4.1.4. e 4.1.5. che M soddisfa $(\Sigma, m-1)$ in ogni punto e quindi si ha la tesi per il corollario 4.2.5. ■

Vogliamo concludere questo paragrafo con una rapido cenno ad una generalizzazione della condizione (Σ, k) .

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $1 < a < b < c$ $a \leq 2, 2b+1 \leq 2a+c$.

4.2.7. DEFINIZIONE. Diremo che M soddisfa la condizione (π, k, a, b, c) in $p \in M$ se lungo ogni raggio $\{tX | t > 0\}$, con $X \in T_p M$, non vi sono punti coniugati in $\{tX | 0 \leq t < \pi\}$, ve ne sono k in $\{tX | \pi \leq t < a\pi\}$ ($k \geq 1$ dispari), nessuno in $\{tX | a\pi \leq t < b\pi\}$ e $\lambda > 2k + 1$ in $\{tX | b\pi \leq t < c\pi\}$.

Indichiamo con $P^m(k)$ lo spazio proiettivo complesso ($k = 1$), quaternionale ($k = 3$) o il piano di Caley ($k = 7$). Allora è facile vedere che $P^m(k)$ soddisfa $(\pi, k, \frac{5}{4}, 2, \frac{5}{2})$.

Così come (Σ, k) esprimeva una similarità della struttura del luogo coniugato di M con quello di $S^m, (\pi, k, a, b, c)$ esprime una similarità con il luogo coniugato di $P^m(k)$.

L'analogo del Teorema 4.2.4. per la condizione (π, k, a, b, c) si enuncia nel modo seguente:

4.2.8. TEOREMA. Sia M semplicemente connessa e soddisfi la (π, k, a, b, c) rispetto a $p \in M$ e se $k = 1$ supponiamo esista un punto $q \in M$ con $d(p, q) = \pi$. Allora $\Omega(p, q)$ ha il tipo di omotopia di un CW-complesso consistente di una sfera k -dimensionale S^k e celle di dimensione non inferiore a $k + \lambda$.

In particolare

$$\pi_i(M) = 0 \quad 1 \leq i \leq k$$

$$\pi_j(M) = \pi_{j-1}(S^k) \quad k+1 \leq j \leq k+\lambda$$

Inoltre se $k + \lambda \geq b$ l'anello di coomologia intera è un anello po-

limoniale troncato generato da un elemento in $H^{k+1}(M)$. (in particola
re $k \in \{1, 3, 7, n-1\}$; vedi Adams [1]).

4.3. VARIETA' CON LUOGO CONIUGATO SFERICO.

Vogliamo ora studiare varietà soddisfacenti un'ipotesi più forte della (Σ, k) o (π, k, a, b, c) . I risultati che otterremo sono per la maggior parte contenuti nel precedente paragrafo ma gli argomenti sono particolarmente interessanti.

Sia M una varietà riemanniana n -dimensionale e $p \in M$. Ricordiamo (paragrafo 2.3) che $C^1(p)$ è il luogo dei punti $X \in T_p M$ tale che X è coniugato rispetto a p e tX non è coniugato rispetto a $p \quad \forall t < 1$.

4.3.1. DEFINIZIONE. Diremo che M è di tipo $A(\lambda, L)$ in p se e solo se $C^1(p) = \{X \in T_p M \mid ||X|| = L\}$ e ogni X di $C^1(p)$ ha ordine λ .

<u>Esempi</u>	1) S^m	è di tipo	$A(m-1, \pi)$	$\forall p \in S^m$
	2) RP^m	" " "	$A(m-1, \pi)$	$\forall p \in RP^m$
	3) CP^m	" " "	$A(1, \pi)$	$\forall p \in CP^m$
	4) QP^m	" " "	$A(3, \pi)$	$\forall p \in QP^m$
	5) lP^2	" " "	$A(7, \pi)$	$\forall p \in lP^2$

Vogliamo dimostrare che in un certo senso queste sono tutte e sole le varietà di tipo $A(\lambda, L)$.

Sia allora M una varietà di tipo $A(\lambda, L)$ in p .

$C^1(p) = \{X \mid \|X\| = L\}$ e $\dim \text{Ker}(d \exp_p)_X = \lambda \quad \forall X \in C^1(p)$ allora

$C^1(p)$ è una sfera di raggio L e per il lemma di Gauss

$$\theta_X = \text{Ker}(d \exp_p)_X \subseteq T_X C^1(p) \quad \forall X \in C^1(p). \quad \eta = \{\theta_X \mid X \in C^1(p)\}$$

definisce allora una distribuzione λ -dimensionale su $C^1(p)$ che è ovviamente integrabile in quanto per ogni g in $F(M)$ è

$$(d \exp_p)_X([V, W])(g) = V((d \exp_p)_X(W)(g)) - W((d \exp_p)_X(V)(g)) = 0$$

se $V, W \in \theta_X$. Sia I_X la varietà integrale massimale passante per X .

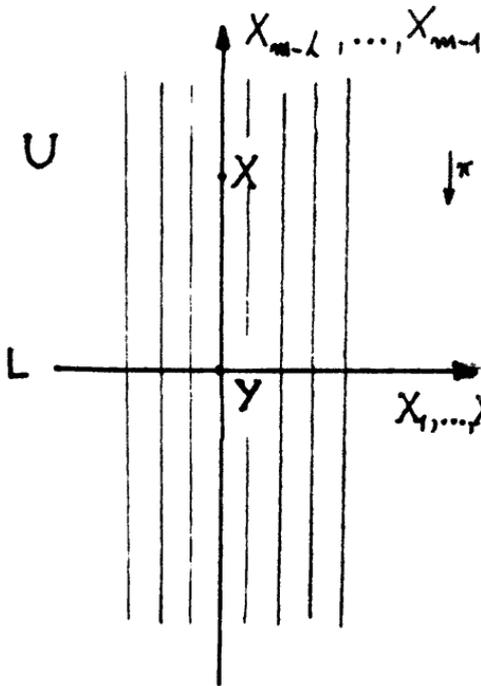
4.3.2. LEMMA. I_X è diffeomorfa ad S^λ .

Dimostrazione. Cominciamo col notare che I_X è un sottospazio topologico di $C^1(p)$.

Infatti dato $Y \in I_X$ scegliamo un sistema di coordinate $\{X_1, \dots, X_{m-1}\}$ in $C^1(p)$ intorno a Y tale che le varietà integrali di η siano le sottovarietà $X_1 = \text{costante}, \dots, X_{m-1-\lambda} = \text{costante}$. Sia T il sottoinsieme del dominio coordinato scelto, U , dato dalle condizioni

$$x_{m-\lambda} = \dots = x_{m-1} = 0.$$

Poiché $(d \exp_p)_Y$ è non singolare su T avremo che \exp_p è localmente iniettiva su T ; ne segue che I_Y ha la topologia relativa ed è dunque una sottovarietà chiusa e quindi compatta di $C^1(p)$.



Sia $X \in C^1(p)$ e $q = \exp_p X$.

Notiamo che se $Y \in I_X$ e $\|X-Y\| < \delta$

$$(d \exp_p)_{T_X} T_X C^1(p) = (d \exp_p)_{T_Y} T_Y C^1(p).$$

Infatti usando le notazioni poste sopra

X_1, \dots, X_{m-1} e indicando con $\pi : U \rightarrow L$ la proiezione

naturale risulta $\exp_p = \exp_p \circ \pi$ su

$$U \text{ e quindi } (d \exp_p)_{T_X} (T_X C^1(p)) =$$

$$= (d \exp_p)_{\pi(X)} \circ \pi(T_X C^1(p)) =$$

$$= (d \exp_p)_{T_Y} (T_Y C^1(p)).$$

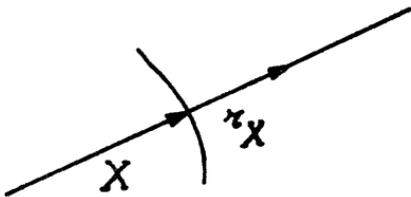
Poiché inoltre I_X è connessa la relazione vale $\forall Y \in I_X$. Poniamo

allora

$$S_q = (d \exp_p)_{T_X} (T_X C^1(p)) \subseteq T_q M$$

e

$$\Sigma_q = \{W \in T_q M \mid W \perp S_q, \|W\| = 1\}.$$



Sia, per $X \in C^1(p)$, r_X il vettore unitario in $T_X(T_p M)$ tangente in X al raggio $\{tX \mid t \geq 0\}$ e definiamo

$$\alpha : I_X \rightarrow \Sigma_q$$

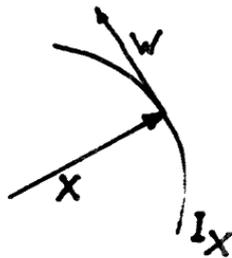
ponendo $\alpha(Y) = d \exp_p \big|_Y (r)$. Chiaramente α è una applicazione differenziabile di I_X in Σ_q .

Proviamo che α è un diffeomorfismo.

α è iniettiva. Infatti se $\alpha(Y_1) = \alpha(Y_2)$ avremo geodetiche,

$t \mapsto \exp_p((1-t)Y_1)$ e $t \mapsto \exp_p((1-t)Y_2)$ uscenti da q con lo

stesso vettore tangente e quindi devono coincidere; pertanto $Y_1 = Y_2$.



α è non singolare.

Sia $W \in T_X \bar{I}_X$ e γ una curva differenziabile in I_X tale che $\gamma(0) = X$ e $\dot{\gamma}(0) = W$

Definiamo $\beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p M$ ponendo, se (u,v) sono le coordinate correnti in \mathbb{R}^2

$$\beta(u,v) = \frac{1}{L} u(\gamma(v)).$$

Sia $\omega = \exp_p \circ \beta$

$$W_1 = \frac{\partial \omega}{\partial u} = (d\omega)_{(u,v)} \left(\frac{\partial}{\partial u} \right); \quad W_2 = \frac{\partial \omega}{\partial v} = (d\omega)_{(u,v)} \left(\frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Ora W_2 è un campo di Jacobi lungo la geodetica $\omega(u,0)$, $t \mapsto \exp_p tX$,

e si annulla in q (poiché $W_2(1,0) = W \notin \text{Ker} (d \exp_p \big|_X)$) e quindi

la sua derivata lungo il vettore velocità $\nabla_{W_1} W_2$ è non nulla in

q essendo $W_2(t) \neq 0$ per qualche t . Allora

$$\begin{aligned} (d\alpha)_x(W) &= (d\alpha)_x(\dot{\gamma}(0)) = \left(-\frac{d\alpha \cdot \gamma}{dt}\right)(0) = \frac{d}{dt} (d \exp_{\gamma(t)} r_{\gamma(t)})(0) = \\ &= (\nabla_{W_2} W_1)(0) = (\nabla_{W_1} W_2)(0) \neq 0. \end{aligned}$$

Poiché Σ_q e I_x hanno la stessa dimensione λ , α è aperta e

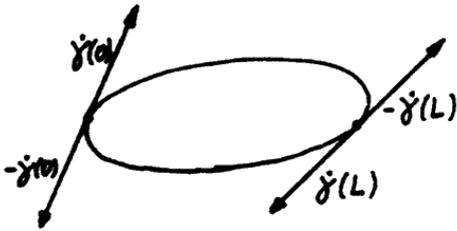
$\alpha(I_x)$ è un aperto. Ma I_x è un compatto per cui $\alpha(I_x)$ è un compatto e quindi chiuso in Σ_q . Dall'ipotesi di connessione segue allora

$$\alpha(I_x) = \Sigma_q.$$

Inoltre essendo I_x compatta e Σ_q di Hausdorff α è un diffeomorfismo ed infine poiché α è non singolare, quindi localmente invertibile in modo differenziabile, α^{-1} è ben definita e differenziabile.

4.3.3. COROLLARIO. Ciascuna geodetica γ uscente da p ritorna in p al tempo $2L$. Inoltre l'intero luogo coniugato consiste di sfere concentriche di raggio $L, 2L, 3L, \dots$ e ordine $\lambda, \lambda - 1, \lambda - 1, \dots$ rispettivamente.

Dimostrazione. Infatti, con le stesse notazioni del lemma 4.3.2., essendo α suriettiva se $\dot{\gamma}(L) \in \text{Im}(\alpha)$ anche $-\dot{\gamma}(L) \in \text{Im}(\alpha)$ e quindi esiste un vettore Y di $T_p M$ tale che $\|Y\| = L$ e $\frac{d}{dt} (\exp_p tY)_{t=1} = -\dot{\gamma}(L)$.

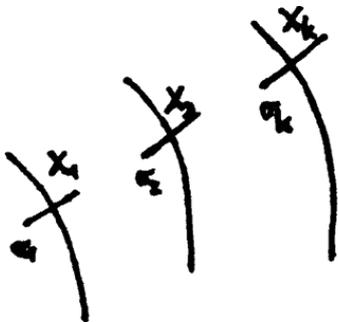


Ovviamente deve aversi $\gamma(L+t) = \exp_p(L-t)Y$
 da cui $\gamma(2L) = \exp_p(0) = p$. ■

4.3.4. LEMMA. Sia $I_X \neq I_Y$ allora $\exp_p(I_X) \neq \exp_p(I_Y)$.

Dimostrazione. Poiché \exp_p è localmente iniettiva sulle varietà trasverse alle varietà integrali di η esiste al più un numero finito di dette varietà integrali massimali nell'immagine inversa di un punto q e siano $\{I_{X_i}\}_{i=1, \dots, k}$

Esistono allora sottovarietà $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ su $C^1(p)$, trasverse rispettivamente a I_{X_1}, \dots, I_{X_k} ed abbastanza



piccole nel senso che per $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo, gli insiemi

$W_i = \{tY \mid Y \in J_i, 1 - \epsilon < t \leq 1\}$

sono disgiunti, essendo J_i l'unione di tutte le varietà integrali massimali di η

che intersecano σ_i .

che intersecano σ_i .

Proviamo intanto che $\bigcup_{i=1}^k \exp_p(W_i)$ è un intorno di q .

Se non fosse vero esisterebbe una successione p_j convergente a q con

$p_j \notin \bigcup_{i=1}^k \exp_p(W_i)$.



Per ogni j troveremo allora $Y_j \in B = \{X \in T_p M \mid \|X\| \leq L\}$ tale che

$\exp_p(Y_j) = p_j$ ed essendo B compatto ci sarebbe una sottosuccessione convergente Y_{j_i} convergente a $Y \in B$.

Per continuità $\exp_p(Y) = \lim \exp_p(Y_{j_i}) = \lim p_{j_i} = q$ e quindi

$Y \in \bigcup_{i=1}^k I_{X_i}$; ma dunque per j_i abbastanza grande $Y_{j_i} \in W_k$

per qualche k quindi $p_{j_i} = \exp_p(Y_{j_i}) \in \bigcup_{i=1}^k \exp_p(W_i)$, il che è assurdo.

Sia Ora V un intorno aperto di q , $V \subseteq \bigcup_{i=1}^k \exp_p(W_i)$.

Localmente $K = \exp_p(C^1(p))$ è una sottovarietà di dimensione $n - \lambda - 1$ e quindi, a patto di prendere V piccolo, $V - K$ è connesso.

D'altra parte $V - K$ è ricoperto dagli aperti $\exp_p(W_i - W_i \cap C^1(p))$

e quindi uno al più di detti aperti interseca $V - K$ non banalmente,

diciamo $\exp_p(W_1 - W_1 \cap C^1(p))$.

Ora se $Y \in I_{X_j}$, $j \neq 1$ risulta $\exp_p(tY) \notin V - K \quad \forall t \in (1-\epsilon, 1)$.

Ma $Y = \lim_{t \rightarrow 1} tY$ e supposto $\exp_p(Y) = q$ deve esistere una successio-

ne in $\exp_p(W_j - W_j \cap C^1(p))$ convergente a q . Questo è impossibile

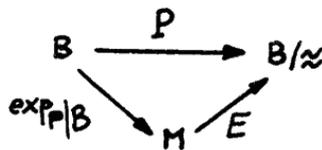
perché in ogni intorno di q abbastanza piccolo cadono solo punti di

K e di $\exp_p(W_1)$ e nessun punto di $\exp_p(W_1 - W_j \cap C'(p))$ se $j \neq 1$. ■

4.3.5. LEMMA. Sia M semplicemente connessa e di tipo $A(L, \lambda)$ in p . Allora $C^1(p)$ contiene il luogo dei punti di taglio.

Dimostrazione. Definiamo su $C^1(p)$ la seguente relazione di equivalenza $X \sim Y \Leftrightarrow X \in I_Y$. Sia $B = \{X \in T_p M / \|X\| \leq L\}$ e definiamo in

B la relazione di equivalenza $X \approx Y \quad X, Y \in \partial B \text{ e } X \sim Y$. Allora B/\approx ha un'unica struttura di varietà differenziabile tale che la proiezione $P : B \rightarrow B/\approx$ è differenziabile. L'esponenziale induce un'applicazione $E : B/\approx \rightarrow M$ tale che il seguente diagramma sia commutativo.



Senza entrare in dettagli notiamo che E è un diffeomorfismo locale e quindi, essendo B/\approx una varietà compatta, E è un rivestimento. Ma M è semplicemente connessa e quindi E è globalmente biunivoca e non ci possono essere punti di taglio in $B - \partial B$ altrimenti esisterebbero due geodetiche minimali congiungenti p con il punto del luogo di taglio più vicino a p e quindi due vettori distinti in $B - \partial B$ mandati nello stesso punto dall'applicazione esponenziale, il che è contro l'invertibilità di E . Dall'osservazione 1) del paragrafo 1.5 segue la tesi. ■

4.3.6. TEOREMA. Se M è semplicemente connessa e di tipo $A(n-1, L)$

in p allora M è omeomorfa ad S^m .

Dimostrazione. Supponiamo $L = \pi$ e sia $q = \exp_p(C^1(p))$ il punto "diametralmente opposto a p". Allora M è di tipo $A(m-1, \pi)$ in q.

$$M = \exp_p(\{X \in T_p M / \|X\| \leq \pi/2\}) \cup \exp_q(\{X \in T_q M / \|X\| \leq \pi/2\}) \text{ ed è}$$

quindi unione di due dischi attaccati mediante un diffeomorfismo delle frontiere ottenuto restringendo all'insieme $\{X \in T_q M / \|X\| = \pi/2\}$

la funzione composta $\exp_p^{-1} \circ \exp_p$, quindi si ha la tesi. ■

Notiamo che in generale M non è diffeomorfa ad S^m . Warner ha dimostrato in [30] che ogni varietà omeomorfa ad S^m può essere dotata di una metrica rispetto alla quale M è di tipo $A(m-1, \pi)$ in qualche punto.

Se M è di tipo $A(m-1, \pi)$ in ogni punto allora è diffeomorfa ad una sfera in quanto si può dimostrare che il diffeomorfismo di attacco usato nella dimostrazione del teorema precedente si estende ad un diffeomorfismo del disco (si veda Allamingeon [2]).

In quest'ultimo caso (M di tipo $A(m-1, \pi)$ in ogni punto) non è noto se M è addirittura isometrica ad S^m ; per il caso $m=2$ la risposta è affermativa (si veda Green [12]) ma in generale il problema presenta notevoli difficoltà.

Un'altra risposta parziale, dovuta a Berger, è la seguente: se la curvatura sezionale è minore o uguale a uno e se M è di tipo

$A(m-1, L)$ per qualche p allora M è isometrica ad $S^{m(*)}$.

Dimostriamo ora un teorema che classifica le varietà di tipo $A(\lambda, L)$.

4.3.7. TEOREMA. Sia M una varietà semplicemente connessa di tipo $A(\lambda, L)$ in $p \in M$. Allora $\lambda \in \{1, 3, 7, m-1\}$ ed inoltre

a) se $\lambda = 1$ $H^+(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^{k+1})$ con $x \in H^2(M, \mathbb{Z})$ ed $m=2k$

b) se $\lambda = 3$ $H^+(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^{k+1})$ con $x \in H^4(M, \mathbb{Z})$ ed $m=4k$

c) se $\lambda = 7$ $H^+(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^{k+1})$ con $x \in H^8(M, \mathbb{Z})$ $m=16=2k$

d) se $\lambda = m-1$ allora M è omeomorfa ad S^m .

Dimostrazione. Se poniamo $\varphi = \exp'_p|_{C^1(p)} : C^1(p) \rightarrow M$, φ è una fibrazione sull'immagine. Inoltre $C^1(p)$ è una sfera di dimensione $m-1$ e le fibre, per il lemma 4.3.2., sono diffeomorfe a S^λ .

Dal noto teorema di Adams sulle fibrazioni di sfere con sfere come fibre (vedi Adams [1]) segue che $\lambda = 1, 3, 7$ o $m-1$.

Nel caso $\lambda = m-1$ vale il teorema precedente. Per gli altri casi indichiamo con $\tilde{C}^1(p)$ l'immagine di φ . Mediante la successione esatta di Gysin si trova facilmente che $H^*(\tilde{C}^1(p), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^k)$ con

(*)Notiamo che quando si assume $L = \pi$ si normalizza la metrica e quindi non si può assumere allo stesso tempo, senza perdere la generalità, che la curvatura sia minore o uguale ad uno.

$x \in H(\tilde{C}^1(p), \mathbb{Z})$.

Poiché M è unione di $C^1(p)$ con una cella m -dimensionale, usando tecniche abbastanza consuete in topologia algebrica e tenendo conto dell'orientabilità di M si trova il risultato cercato^(*). ■

Le varietà di tipo $A(\lambda, L)$ si presentano come generalizzazioni naturali, almeno dal punto di vista del lavoro di Allamingeon, delle varietà armoniche.

Rimandiamo ad Allamingeon [2] per i particolari.

A conclusione di questo paragrafo vogliamo descrivere per sommi capi il lavoro di Warner [30] sulle varietà con luogo coniugato regolare.

In realtà dall'analisi del teorema 4.3.7. si vede che nella dimostrazione non si è sfruttata completamente l'ipotesi $A(\lambda, L)$ ma solo quanto segue:

I il luogo di taglio è contenuto nel luogo coniugato;

II $\text{Ker}(\text{dexp}_p)$ definisce una distribuzione λ -dimensionale su $C^1(p)$

Warner dimostra in [30] che se l'ordine λ del primo punto coniugato a p in ogni direzione è non inferiore a 2 allora I è ancora vera (M semplicemente connessa). Inoltre, se l'ordine λ è costante, $C^1(p)$ è una varietà differenziabile immersa in $T_p M$ e diffeomorfa ad una sfera. Ancora nell'ipotesi $\lambda \geq 2$ $\text{Ker}(\text{dexp}_p)_{\mathcal{Y}} = T_{\mathcal{Y}} C^1(p) \quad \forall \mathcal{Y} \in C^1(p)$

(*) Per ulteriori dettagli sulla dimostrazione si veda Warner [30] o Allamingeon [2].

e quindi anche la seconda condizione è verificata. (si veda Warner [29]).

Si può dunque provare il seguente teorema analogo a 4.3.7.

4.3.8. TEOREMA. Se M è una varietà semplicemente connessa, $p \in M$
e se $Y \in C^1(p)$ l'ordine di Y è costante, $\lambda \geq 2$, allora $\lambda \in \{3, 7, m-1\}$
ed inoltre

i) se $\lambda = m-1$ $C^1(p) = \{X/||X||=L\}$ ed M è omeomorfa ad una sfera;

ii) se $\lambda = 3$ $H^*(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^{k+1})$ con $x \in H^4(M, \mathbb{Z})$
ed $m = 4k$

iii) se $\lambda = 7$ allora $m = 16$ e $H^*(M, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^3)$ con
 $x \in H^8(M, \mathbb{Z})$.

Infine si può dimostrare facilmente che se m è dispari l'ipotesi $\lambda \geq 2$ non è necessaria nel senso indicato dal seguente teorema (vedi Mercuri [20]).

4.3.9. TEOREMA. Sia M semplicemente connessa e di dimensione di-
spari, p un suo punto e supponiamo che per ogni $Y \in C^1(p)$ l'ordine
 λ di Y sia costante.

Allora $\lambda = m - 1$ e quindi M è omeomorfa ad S^m .

Dimostrazione. Supposto $\lambda \geq 2$ per il teorema 4.3.8 risulta
 $\lambda = 3, 7, m-1$.

Se $\lambda \neq m - 1$ $H^m(M, \mathbb{Z}) = 0$ (poiché m è dispari) e quindi si ha una contraddizione essendo M compatta ed orientabile. Basterà dunque far vedere che $\lambda \neq 1$.

Se fosse $\lambda = 1$, $\text{Ker}(\text{dexp}_p)$ sarebbe, per il lemma di Gauss, ortogonale ai raggi per l'origine. Ma $C^1(p)$ è una varietà differenziabile omeomorfa ad S^{m-1} e trasversa ai raggi per l'origine. Ne seguirebbe che $\text{Ker}(\text{dexp}_p)_Y$ ha una proiezione non banale su $T_Y C^1(p)$ e quindi definisce una distribuzione 1-dimensionale su $T_Y C^1(p)$, quindi un fibrato vettoriale di dimensione 1 su $C^1(p)$.

Poiché ogni fibrato vettoriale di dimensione 1 su una sfera è banale potremmo allora definire su $C^1(p)$, che è diffeomorfa ad S^{m-1} , un campo di vettori ovunque diverso da zero il che è impossibile in quanto $m - 1$ è dispari. ■

4.4. CENNI SUL TEOREMA DI TOPOGONOV.

In quest'ultimo paragrafo vogliamo enunciare un altro teorema fondamentale che può considerarsi come una generalizzazione del teorema di Rauch.

Sia al solito M una varietà riemanniana m -dimensionale ed indichiamo con K_M la curvatura sezionale.

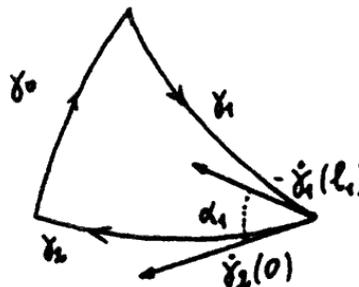
4.4.1. DEFINIZIONE. Un triangolo geodetico in M è un'insieme di tre geodetiche $\{\gamma_i\}_{i=0,1,2}$ parametrizzate con la lunghezza d'arco

$\gamma_i : [0, l_i] \rightarrow M$ e tali che (leggendo gli indici modulo tre)

a) $\gamma_i(l_i) = \gamma_{i+1}(0)$

b) $l_i + l_{i+1} \geq l_{i+2}$

Per un tale triangolo denotiamo con α_i l'angolo formato da $-\dot{\gamma}_i(l_i)$ e da $\dot{\gamma}_{i+1}(0)$.



4.4.2. TEOREMA (di Topogonov, prima versione). Sia $\{\gamma_i\}$ un trian-

golo geodetico su M e $K_M \geq H \in \mathbb{R}$. Supponiamo che γ_0 e γ_2

siano geodetiche minimali e che, se $H > 0$, $l_1 \leq \pi/\sqrt{H}$. Sia M^H

la varietà 2-dimensionale semplicemente connessa a curvatura costante H .

Esiste allora un triangolo geodetico $\{\bar{\gamma}_i\}$ in M^H con $\bar{l}_i = l_i, \bar{\alpha}_0 \leq \alpha_0$

ed $\bar{\alpha}_2 \leq \alpha_2$.

Inoltre fatta eccezione per il caso $H > 0$ e $l_1 = \pi/\sqrt{H}$, tale triangolo è unicamente determinato (a meno di isometrie).

Di questo teorema diamo anche una versione equivalente.

4.4.3. TEOREMA. (di Topogonov, seconda versione). Siano γ_1, γ_2

due geodetiche in M con $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ ed α l'angolo formato da $\dot{\gamma}_1(0)$ con $\dot{\gamma}_2(0)$.

Sia γ_1 minimale e, se $H > 0$, $l_2 \leq \pi/\sqrt{H}$. Siano $\bar{\gamma}_1$ e $\bar{\gamma}_2$ geodetiche in M^H con $\bar{\gamma}_1(0) = \bar{\gamma}_2(0)$, $\bar{l}_i = l_i$ e $\alpha = \bar{\alpha}$ (con l'ovvio significato dei simboli). Allora

$$d_M(\gamma_1(l_1), \gamma_2(l_2)) \leq d_{M^H}(\bar{\gamma}_1(\bar{l}_1), \bar{\gamma}_2(\bar{l}_2)).$$

Per una dimostrazione rimandiamo a Topogonov [26] e Cheeger-Ebin [8].

Diamo infine un brevissimo cenno di come si possa dimostrare il teorema delle sfere 4.2.6. senza condizioni sulla dimensione usando il teorema di Topogonov.

Supponiamo $\frac{1}{4} < \delta \leq K_M \leq 1$ e $p, q \in M$ tali che $d(p, q)$ è massimale. Il diametro della sfera a curvatura δ è $\pi\delta^{-1} = 2(\pi - \epsilon) < 2\pi$ per $\epsilon = \pi/2(2-\delta^{-1}) > 0$.

Allora usando il teorema di Topogonov si vede che restringendo \exp_p ed \exp_q rispettivamente agli insiemi $\{X \in T_p M / \|X\| < \pi - \epsilon\}$ e $\{X \in T_q M / \|X\| < \pi - \epsilon\}$ si ottengono immersioni biunivoche e le immagini ricoprono M .

M quindi è unione di due dischi aperti e per il teorema di M. Brown [7] è omeomorfa ad S^m .

A P P E N D I C E

Vogliamo riassumere alcuni dei teoremi che abbiamo dimostrato e altri risultati strettamente collegati.

Sia M una varietà riemanniana di dimensione m ed indichiamo con K_M la curvatura sezionale (K_M è una funzione reale definita sulla Grassmanniana $G_2(M)$ dei 2-piani tangenti ad M) e sia infine \tilde{M} il rivestimento universale riemanniano.

Abbiamo allora i seguenti risultati:

1) VARIETA' A CURVATURA COSTANTE.

$K_M > 0 \Rightarrow \tilde{M}$ è isometrica alla sfera standard S^m di raggio $K_M^{-\frac{1}{2}}$.

$K_M = 0 \Rightarrow \tilde{M}$ è isometrica ad R^m con la struttura standard.

$K_M < 0 \Rightarrow \tilde{M}$ è isometrica ad R^m con la metrica di Poincaré.

2) VARIETA' A CURVATURA DI SEGNO COSTANTE.

$K_M \leq 0 \Rightarrow \tilde{M}$ è diffeomorfa ad R^m .

$K_M \geq 0 \Rightarrow \tilde{M}$ si scinde a meno di isometrie, cioè $\tilde{M} = \bar{M} \times R^k$

con \bar{M} compatta.

$K_M \geq \delta > 0 \Rightarrow M$ è compatta, ha diametro $d \leq \pi/\sqrt{\delta}$ e gruppo fondamentale $\pi_1(M)$ finito.

Se inoltre m è pari il gruppo fondamentale $\pi_1(M)$ è nullo per M orientabile ed è isomorfo a \mathbb{Z}_2 in caso contrario (in particolare $\pi_1(\tilde{M}) = 0$).

3) VARIETA' PIZZICATE.

Si dice δ -pizzicata una varietà compatta semplicemente connessa la cui curvatura sezionale verifichi la seguente condizione

$$0 < \delta A \leq K_M \leq A \quad \text{con } A \in \mathbb{R}^+$$

Si ha allora

$$\delta > \frac{1}{4} \Rightarrow M \text{ è omeomorfa ad } S^m.$$

$$\delta \geq \frac{1}{4} \Rightarrow M \text{ è omeomorfa ad uno spazio simmetrico di rango 1} \\ \text{(cioè } S^m \text{ o uno spazio proiettivo).}$$

$$\delta \geq 0,8 \Rightarrow M \text{ è diffeomorfa ad } S^m.$$



BIBLIOGRAFIA

- [1] J.F. ADAMS: ON THE NON-EXISTENCE OF ELEMENTS OF HOPF INVARIANT ONE, Ann. of Math., 1960
- [2] A.C. ALLAMINGEON: PROPRIÉTÉS GLOBALES DES ESPACES DE RIEMANN HARMONIQUES, Ann. Inst. Fourier, 1965.
- [3] M. BERGER: LES VARIÉTÉS RIEMANNIEN 1/4 PINCÉES, C.R. Acad. Sci., 1960.
- [4] M. BERGER: SUR QUELQUES VARIÉTÉS RIEMANNIEN SUFFISAMMENT PINCÉES, Ann. Scuola Normale Superiore, Pisa, 1960.
- [5] M. BERGER: SUR LES VARIÉTÉS À COURBURE POSITIVE DE DIAMÈTRE MINIMUM, Comm. Math. Helvetici, 1961.
- [6] R. BISHOP-R.CRITTENDEN: GEOMETRY OF MANIFOLDS, Accademic Press, New York, 1964.
- [7] M. BROWN: A PROOF OF GENERALIZED SCHOENFLIES THEOREM, Bull. A.M.S., 1960.
- [8] J. CHEEGER-D.EBIN: COMPARISON THEOREMS IN RIEMANNIAN GEOMETRY, North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [9] J. CHEEGER-D. GROMOLL: ON THE STRUCTURE OF COMPLETE MANIFOLDS OF NON NEGATIVE CURVATURE, Ann. of Math., 1973.
- [10] B.-Y. CHEN: GEOMETRY OF SURMANIFOLDS, Marcel Dekker, New York, 1973.
- [11] G.DE CECCO-R.CIAMPI PROCESI: SEMINARIO SUI GRUPPI D'OMOTOPIA E RIVESTIMENTI, Istituto Matematico "G.Castelnuovo", Roma, A.A. 1969/70.

- [12] L.W.GREEN: AUF WIEDERSEHENSFLACHEN, Ann. Of Math., 1963.
- [13] S. HELGASON: DIFFERENTIAL GEOMETRY AND SYMMETRIC SPACES, Academic Press, New York, 1962.
- [14] R. HERMANN: DIFFERENTIAL GEOMETRY AND THE CALCULUS OF VARIATIONS, Academic Press, New York-London, 1968.
- [15] J.N.HICKS: NOTES ON DIFFERENTIAL GEOMETRY, Van Nostrand, 1965.
- [16] W. KLINGEMBERG: MANIFOLDS WITH RESTRICTED CONJUGATE LOCUS: Ann. of Math., 1963.
- [17] W. KLINGEMBERG-D.GROMOLL-W.MAYER: RIEMANNISCHE GEOMETRIE IN GROSSEN: Springer-Verlag, 1968.
- [18] S. KOBAYASHI-K. NOMIZU: FOUNDATION OF DIFFERENTIAL GEOMETRY, VOL. I AND II, Interscience Publishers, 1963.
- [19] N. H. KUIPER: SUR LES VARIÉTÉS RIEMANNIENS TRES PINCEES, Sem. Bourbaki, 1971/72.
- [20] F. MERCURI: ODD DIMENTIONAL MANIFOLDS WITH REGULAR CONJUGATE LOCUS, Proc. A.M.S., 1973.
- [21] J. MILNOR: MORSE THEORY, Ann. of Math. Studies, N. o 51 Princeton University Press. 1963.
- [22] B. O'NELL: THE FUNDAMENTAL EQUATION OF A SUBIMMERSION, Mich. Math. Journal, 1966.
- [23] H.E. RAUCH: A CONTRIBUTION TO DIFFERENTIAL GEOMETRY IN THE LARGE, Ann. of Math., 1951.

- [24] S. SMALE: GENERALIZED POINCARÉ CONJECTURE IN DIMENSION GREATER THAN FOUR, *Ann. of Math.*, 1956.
- [25] E. SPANIER: ALGEBRAIC TOPOLOGY, Mc-Grow Hill, 1966.
- [26] V.A. TOPOGONOV: RIEMANNIAN MANIFOLDS HAVING THEIR CURVATURE BOUNDED, *A.M.S. Transl.*, 1964.
- [27] N.R.WALLACH: COMPACT HOMOGENEUS RIEMANNIAN MANIFOLDS WITH STRICTLY POSITIVE CURVATURE, *Ann. of Math.*, 1972.
- [28] N.R. WALLACH. S. ALOFF: AN INFINITE FAMILIY OF DISTINCT 7 - MANIFOLDS ADMITTING POSITIVELY CURVED RIEMANNIAN STRUCTURES, *Bull. A.M.S.*, 1975 .
- [29] F.WARNER: THE CONJUGATE LOCUS OF A RIEMANNIAN MANIFOLD, *Amer. Journ. of Math.*, 1965.
- [30] F. WARNER: CONJUGATE LOCI OF CONSTANT ORDER, *Ann. of Math.*, 1967.
- [31] A. WEINSTAIN: THE CUT LOCUS AND CONJUGATE LOCUS OF A RIEMANNIAN MANIFOLD, *Ann. of Math.*, 1968.
- [32] A. WEINSTAIN: THE GENERIC CONJUGATE LOCUS, *Proc. of the Symposia in Pure Mathematics*, A.M.S., 1970.