Parte II - Algebre

13. Algebre con due operazioni.

Vogliamo ora esaminare alcuni problemi connessi con lo studio di una particolare struttura con due operazioni.

Sia S un insieme su cui sono definite due operazioni: l'operazione "$\times$" definisce su S una struttura di semigruppi (S_2) e l'operazione "$\bullet$" definisce su S una struttura di gruppo (S_1) (nel seguito invece di $a \bullet b$ scriveremo ab). Queste due operazioni sono collegate dalla seguente legge distributiva:

$$\begin{aligned} (a \times b)c &= (ac) \times (bc) \\ c(a \times b) &= (ca) \times (cb) \end{aligned} \tag{13.1}$$

Supponiamo inoltre che S sia finito.

In queste ipotesi esiste in S_2 un elemento idempotente (le potenze di un fissato elemento non sono tutte distinte e tra esse si può quindi individuare un gruppo ciclico la cui unità è, evidentemente, idempotente); quindi esiste $a \in S_2$ $a \times a = a$ da cui, moltiplicando per a^{-1}, si ricava $1 \times 1 = 1$ e, ancora:

$$b \times b = b \,, \qquad \text{per ogni } b \in S_2.$$

Pertanto S_2 è un semigruppo idempotente.

Osserviamo che se S è infinito non possiamo dire nulla ~~nulla~~ esi-

Definiamo ora, in $F^+ \times F^+$, le operazioni unarie $\Uparrow$ e $\widehat{\Uparrow}$ nel modo seguente:

$$\Uparrow(a,b) = (a,b) \odot (\varepsilon,\varepsilon) \quad , \quad \widehat{\Uparrow}(a,b) = (a,b) \odot (\varphi_0,\varphi_0)$$

Si può allora provare che:

$\widehat{\widehat{\Uparrow}}(a,b) = \Uparrow(a,b)$ e $\widehat{\Uparrow}(F^+, F^+)$ è un gruppo commutativo in cui l'unità è (φ_0,φ_0).

Introduciamo ancora un'altra operazione, così definita:

$$(a,b) \otimes (c,d) = (ac\,\varphi(b,c),\ bd\,\varphi(b,c))$$

con le condizioni:

i) $\varphi(b,c) \in F$

ii) $\varphi(b,c) = \varphi(c,b)$

iii) $\varphi(bb',cb') = \alpha(b')\,\varphi(b,c)$

iv) $\varphi(a,\varepsilon) = \varepsilon$

Il semigruppo non è più commutativo rispetto a quest'ultima operazione, ma accade ancora che :

$$\alpha(b\alpha(b)) = \varepsilon .$$

16. Problemi vari.

Parleremo ora di alcuni problemi connessi con la teoria dei semigruppi.

1) Sia S un semigruppo, M un suo sottoinsieme ed m,n interi distinti.

Con M^n ed M^m indichiamo gli insiemi costituiti da "parole" di lunghezza n ed m rispettivamente, costituite da elementi di M.

Ci chiediamo come determinare M affinché sia un <u>(n,m)-mutante</u>, cioè:

$$M^n \cap M^m = \emptyset \quad \text{o anche} \quad M^n \subseteq S \setminus M^m.$$

E' chiaro intanto che M non può essere un semigruppo, ma non è facile ricavare altre informazioni.

Per accostarsi all'argomento è utile la seguente bibliografia:

J.B.Kim. - Mutants in the symetric semigroups - Chechosl. Math. J. <u>21</u> (1971), 355 - 363.

J.B.Kim. - No semigroup is a finite union of mutants - Semigroup forum <u>6</u> (1973), 360 - 361

K. Iseki - On (m,n)-mutants in semigroup - Proc. Japan Ac. <u>38</u> (1962), 269 - 270.

2) Un altro problema è legato allo studio dei grafi su un gruppo.

Sia G un gruppo e K un suo sottoinsieme. Diciamo allora che $\mathcal{G}_K = (G, E_K)$ è un <u>grafo diretto</u>, dove :

$$(g_i, g_j) \in E_K \Leftrightarrow g_i^{-1} g_j \in K, \qquad \text{con } g_i, g_j \in G.$$

Lo studio dei grafi diretti ha dato buoni risultati quando K è un sottogruppo· si conosce molto poco se manca questa condizione. Un lavoro interessante, sull'argomento è:

M.Harao - S. Naguki - Toult Idirent Cellular Automata - Journal of Computer and systems Science II (1975), 171 - 185.