

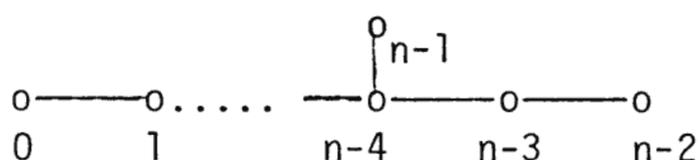
CAPITOLO 5

GEOMETRIE DI TITS-BUEKENHOUT (DEFINIZIONI)

Si è dunque visto che, volendo fondare tutta la teoria sul concetto di appartamento, si è portati ad imporre, nel caso dei diagrammi di Coxeter, che gli appartamenti siano appunto complessi di Coxeter; e ciò sembra non poter condurre molto lontano dagli edifici. Le difficoltà sono altre, naturalmente, se si considerano strutture in diagrammi non di Coxeter. Dò due esempi.

Esempio 1) - Possiamo imitare su edifici generalizzati nei diagrammi $(E_6), (E_7)$ ed (E_8) la costruzione dello spazio polare $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ da un edificio generalizzato σ di diagramma (D_n) e la costruzione dello spazio metasimplettico $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ da un edificio generalizzato \mathcal{O} nel diagramma (D_4) . Avverto preventivamente che vi sono buone ragioni per vedere nella costruzione seguente un'buon' adattamento al caso di (E_n) delle due costruzioni ora rammentate (rimando per ciò a [22]; si veda anche, qui, il cap. 7).

Consideriamo un edificio generalizzato Γ di diagramma (E_n) ($n=6,7,8$; ma n potrebbe anche avere qualunque valore; non cambierebbe nulla). Numeriamo i vertici dei diagrammi come in figura:



Diamo alle varietà di tipo $n-1$ o $n-2$ un nuovo tipo: $n-1$. Assegnamo come nuovo tipo $n-2$ alle varietà di tipo $n-3$ in Γ , e aggiungiamo nuove varietà cui assegnamo ancora il tipo $n-2$, scegliendo a tale scopo le bandiere di tipo $\{n-1, n-2\}$ in Γ . Manteniamo il vecchio tipo a tutte le altre varietà, ma aggiungiamo un nuovo tipo di varietà, che contrassegnamo con $n-3$, scegliendo a tale scopo le bandiere di tipo $\{n-1, n-3\}$ in Γ . Otteniamo così un nuovo insieme di varietà, ripartito in tipi. Definiamo su esse un'incidenza, stabilendo che varietà distinte di tipo distinto abbiano a dirsi incidenti se sono incidenti in Γ , come bandiere e/o varietà, eccettuato il caso in cui le varietà corrispondono l'una a una bandiera di Γ di tipo $\{n-1, n-2\}$ o a una vecchia varietà di Γ di tipo $n-1$, e l'altra a una vec-

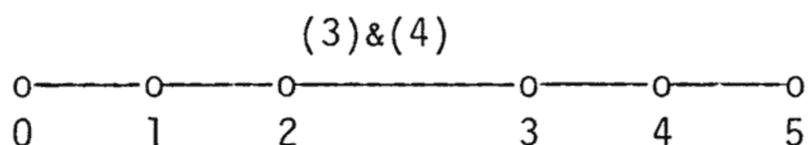
- i) Le varietà di $\mathcal{L}(\Gamma)$ di tipo $n-1$ si distribuiscono in due insiemi disgiunti, V_{pr} e V_{pl} , a seconda che il loro residuo in $\mathcal{L}(\Gamma)$ sia uno spazio proiettivo o uno spazio polare.
- ii) Le varietà di $\mathcal{L}(\Gamma)$ di tipo $n-2$ si distribuiscono in due insiemi, U e U' , a seconda che siano incidenti ad esattamente due varietà di tipo $n-1$, una in V_{pr} e una in V_{pl} , o che tutte le varietà di tipo $n-1$ ad esse incidenti stiano in V_{pl} .
- iii) Ogni varietà di $\mathcal{L}(\Gamma)$ di tipo $n-3$ è incidente ad esattamente una varietà in V_{pr} ed esattamente una varietà in U' .

Le varietà in V_{pr} provengono dalle varietà di Γ di tipo $n-1$, quelle in V_{pl} provengono da quelle di tipo $n-2$, quelle in U' provengono dalle varietà di Γ di tipo $n-3$, quelle in U dalle bandiere di Γ di tipo $\{n-1, n-2\} \dots$. Sicché le i)-iii) dicono che la costruzione può invertirsi. Per quanto vedremo più oltre, possiamo identificare ogni varietà di $\mathcal{L}(\Gamma)$ con l'insieme delle varietà di tipo 0 ad essa incidenti. La costruzione di $\mathcal{L}(\Gamma)$ mostra allora l'aspetto che assume Γ quando lo si voglia vedere come uno spazio di punti, rette, sottospazi ... , assegnando alle varietà di tipo 0 il ruolo di punti. Ignoro se le i)-iii), unitamente ad opportune proprietà generali su spazi di punti, rette, sottospazi ... , bastino a caratterizzare gli edifici deboli del genere di $\mathcal{L}(\Gamma)$ con Γ in (E_n) (bisognerebbe comunque utilizzare i risultati della parte finale [28]). Se si, avremo ottenuto una caratterizzazione elementare degli edifici generalizzati di diagramma (E_n) .

Naturalmente possiamo decidere di collocare in ruolo di punti le varietà di un qualunque altro tipo. Il risultato della costruzione cambia, ma i problemi restano gli stessi. E' facile spiegare in breve la regola generale cui obbedisce la costruzione. Dato un grafo \mathcal{G} , un suo vertice x_0 e due insiemi di vertici X, Y , diciamo che Y separa X da x_0 se $\{x_0\} - Y$ e $X - Y$, qualora siano entrambi non vuoti, stanno in due distinte componenti connesse di $\mathcal{G} - Y$. Un insieme X di vertici di \mathcal{G} si dice x_0 -ridotto se, per ogni $x \in X$, si ha che $X - \{x\}$ non separa x da x_0 . La costruzione prima descritta obbedisce alla seguente regola: si

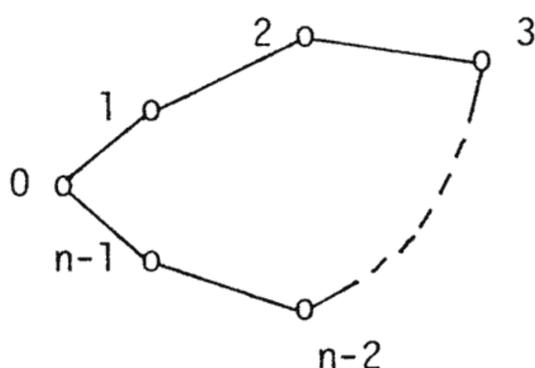
sceglie un tipo i in $D(\Gamma)$ con l'intenzione di collocare in ruolo di punti le varietà di tipo i . Si prendono poi come nuove varietà le faccie F di tipo i -ri_{dotto} $\tau(F)$, assegnando ad esse come nuovo tipo il numero di vertici nella componente connessa di i in $D(\Gamma) - \tau(F)$ se $i \notin \tau(F)$, e 0 se $i \in \tau(F)$ (nel qual caso F è addirittura una varietà di tipo i). Due tali nuove varietà F ed F' si dicono poi incidenti se sono incidenti come bandiere e/o varietà in Γ , e se $\tau(F)$ separa $\tau(F')$ da i in $D(\Gamma)$, o viceversa.

Per esempio: quando si applichi questa costruzione ad un edificio generalizzato di diagramma (E_6) , numerato come detto all'inizio e assegnando il ruolo di punti alla varietà di tipo 5, si ottiene un edificio debole $\mathcal{L}'(\Gamma)$ di diagramma:

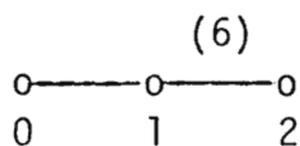


se il diagramma è calcolato negli appartamenti. Calcolando invece il diagramma in tutto $\mathcal{L}'(\Pi)$, vediamo che ai quadrangoli corrispondono particolari spazi polari, del genere già descritto in precedenza, e sugli ultimi due lati troviamo piani proiettivi degeneri.

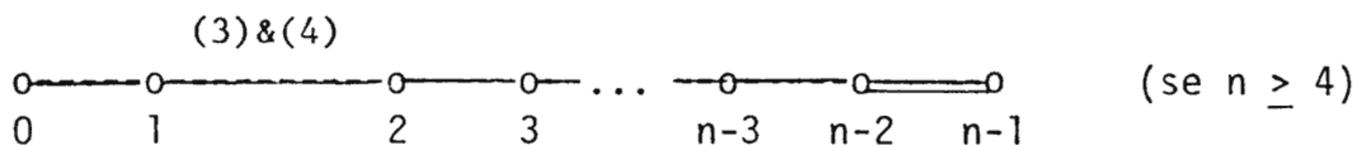
La stessa costruzione su edifici generalizzati Γ di diagramma:



produce edifici deboli $\mathcal{L}(\Gamma)$ di diagramma:



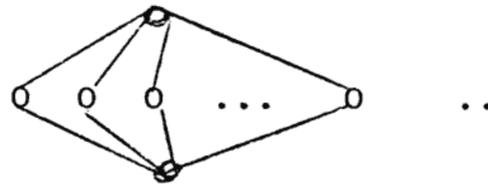
(Se $n=3$)



(se $n \geq 4$)

se calcoliamo i diagrammi negli appartamenti. Se li calcolassimo in $\mathcal{L}(\Gamma)$ trove-

remmo nel caso di $n=3$ che agli esagoni corrispondono particolari esagoni generalizzati: quelli ottenuti dal grafo di incidenza di un piano proiettivo (i vertici del grafo corrispondono alle varietà di tipo 2, e i lati a quelle di tipo 1). Nel caso di $n \geq 4$, ai quadrangoli sul lato da 1 a 2 e sull'ultimo lato del diagramma corrispondono spazi polari particolari, del solito genere descritto in precedenza. Gli spazi polari sull'ultimo lato possono anzi ottenersi da grafi del tipo:

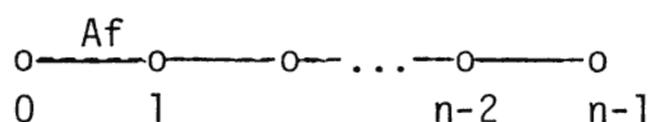


Sempre se $n \geq 4$, usando la (b.11) (che ancora vale su $\mathcal{L}(r)$) e la (b.10) si vede che i residui di bandiere di $\mathcal{L}(r)$ di tipo $\{0,1\}$ sono spazi polari. Per di più, di un genere affatto speciale (rimando per questo all'articolo [22] già citato).

Traggo qualche conclusione. Quando si abbia a che fare con edifici deboli che, pur senza essere edifici generalizzati, siano ugualmente muniti di una funzione di tipo, sembra più chiarificante collocarne il diagramma nella struttura presa nel suo complesso piuttosto che negli appartamenti. In tal caso la struttura interna degli appartamenti può non bastare a ricostruire il diagramma. E, viceversa, non è detto che il diagramma, calcolato ora negli appartamenti, individui la struttura degli appartamenti. Per di più, in tutti gli esempi ora trattati, quanto risulta utile in pratica è, non tanto la struttura degli appartamenti, quanto piuttosto proprietà come le i)-iii). Sicché, se possiamo ricavare siffatte proprietà prescindendo dal sistema di appartamenti (e nei fatti ciò è possibile, spesso), gli appartamenti finiscono per apparire qui poco più che un accessorio. Naturalmente, queste conclusioni vanno prese con la dovuta cautela.

Esempio 2) - Dò ora un esempio 'esterno' per così dire. Consideriamo uno spazio affine \mathcal{A} . Se \mathcal{A} ha dimensione finita n , è immediato considerarlo come complesso di camere, scegliendo come varietà i sottospazi propri non vuoti, e prendendo come camere le bandiere massimali (se \mathcal{A} avesse dimensione infinita, potremmo considerare la geometria all'infinito \mathcal{A}_∞ di \mathcal{A} , vederla come edificio, generalizzato se \mathcal{A} è degenere, e assumere come faccie di \mathcal{A} le traslazioni di faccia di \mathcal{A}_∞ eventualmente completate con l'aggiunta di un punto). Possiamo allora ripartire i sottospazi propri e non vuoti di \mathcal{A} in tipi, assegnando a ciascun sotto-

spazio, come tipo, la sua dimensione. E possiamo ora disegnare il diagramma di \mathcal{A} , esaminando i residui in \mathcal{A} di bandiere di cotipo $\{i,j\}$ (con $i \neq j$). Se conveniamo di indicare col simbolo $o \xrightarrow{Af} o$ il fatto che residui di bandiere di cotipo $\{i,j\}$ risultano piani affini (con le varietà di tipo i in ruolo di punti), il diagramma di \mathcal{A} è:



Da ciò si ha subito che \mathcal{A} non è strutturabile in appartamenti (almeno finché si tiene fermo che un appartamento abbia da essere un complesso di camere magro). Infatti non esiste alcun complesso di camere magro che dia luogo ad un diagramma come sopra. Infatti tale diagramma dice che il residuo di una bandiera di cotipo $\{0,1\}$ deve essere un piano affine. E, per quanto un piano affine sia povero di punti e rette, almeno tre rette per ogni punto le deve avere. Non è dunque magro.

Quanto sin qui visto, suggerisce di ridimensionare l'importanza degli appartamenti. E v'è qualche ragione per sperare che ciò sia possibile senza gravi perdite. Vedremo, in primo luogo, che è possibile caratterizzare gli edifici generalizzati di tipo sferico (ad eccezione di quelli di diagramma (H_3) e (H_4)) con proprietà che non fanno menzione di appartamenti. Ma vi sono anche altre ragioni, che ora illustrerò.

Indicata con $d(C,C')$ la distanza tra due camere C e C' , il *diametro* $d(\Gamma)$ di un edificio debole Γ (in generale: di un complesso di camere) è l'estremo superiore di $\{d(C,C') \mid C,C' \text{ camere di } \Gamma\}$. È ovvio, per la (B.3) e le (b.1) e (b.3) del Cap. I, che il diametro di Γ è uguale al diametro dei suoi appartamenti. Posto ora che Γ abbia diametro finito, due sue camere si diranno *opposte* se la loro distanza è uguale al diametro di Γ (è ovvio che due camere opposte sono opposte in ogni appartamento che le contenga). Un insieme \mathcal{C} di camere di Γ si dirà poi *convesso* se contiene tutte le gallerie minimali tra due sue camere (dalla (b.3) del Cap. I si ha subito che gli appartamenti sono convessi). È poi ovvio che intersezioni di insiemi convessi restituiscono insiemi convessi. Sicché possiamo parlare della *chiusura convessa* di un insieme di camere. Si ha, poi (cfr. [26] Cap.II):

(b.12) Sia \mathcal{K} un complesso di Coxeter di diametro finito, e C, C' siano due camere opposte in \mathcal{K} . Allora per ogni altra camera C'' di \mathcal{K} risulta $d(C, C') = d(C, C'') + d(C'', C')$.

Allora:

(b.13) Sia Γ un edificio generalizzato di diametro finito. Gli appartamenti di Γ sono le chiusure convesse in Γ di coppie di camere opposte.

Intanto, ogni coppia di camere opposte sta in qualche appartamento, per (B.3), e dunque ogni appartamento contiene una coppia di camere opposte in Γ , per (b.3). Per di più, gli appartamenti sono convessi in Γ , per (b.1). Sia ora Σ un appartamento e C, C' una coppia di camere di Σ , opposte. Sia C'' una terza camera di Σ . Per la (b.1), $d(C, C'')$ e $d(C'', C')$ non variano, quando siano calcolate in Σ anzichè in Γ . Per la (b.12), allora, è $d(C, C'') + d(C'', C') = d(C, C')$. Sicché, date due gallerie minimali γ da C a C'' e γ' da C'' a C' , la giustapposizione di γ e γ' dà una galleria minimale $\bar{\gamma}$ da C a C' . Ma $\bar{\gamma}$ appartiene alla chiusura convessa della coppia $\{C, C'\}$. Sicché C'' sta nella chiusura convessa di $\{C, C'\}$. E la (b.13) segue.

Ancora:

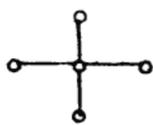
(b.14) Sia Γ un edificio generalizzato di diametro finito. La corrispondenza che alla coppia ordinata (C, C') di camere opposte di Γ associa la coppia (C, Σ) , ove Σ è la chiusura convessa di $\{C, C'\}$, realizza una biezione dall'insieme delle coppie ordinate di camere opposte di Γ all'insieme delle coordinatizzazioni di Γ .

Per la (b.13), c'è da provare solo biiettività della corrispondenza. E questa segue dal fatto che ogni camera ha esattamente un'opposta in ogni appartamento che la contenga. Siano infatti C, C' e C'' camere di un appartamento Σ , con C' e C'' opposte a C . Dalla (b.12) si ha subito che $d(C', C'') = 0$. Sicché $C' = C''$. Sia poi Σ un appartamento e C una sua camera. Per la (b.13), c'è una coppia C', C'' di camere opposte in Σ . Ma Σ è un complesso di Coxeter, e pertanto il gruppo degli automorfismi di Σ è transitivo sull'insieme delle camere. V'è dunque un automorfismo α di Σ che porta C' su C . Sicché $\alpha(C'')$ è op-

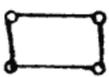
Otteniamo uno spazio polare fine non degenerare di rango 2.

Con un po' di pazienza si mostra che il gruppo degli automorfismi speciali di tale spazio è transitivo sull'insieme delle camere, ma non sull'insieme delle coordinatizzazioni.

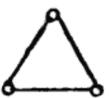
Nondimeno, vi sono risultati che sembrano indicare che la transitività sull'insieme delle camere sia ancora una condizione piuttosto forte. E' noto, per esempio, che un gruppo di automorfismi di un edificio finito irriducibile Γ di rango ≥ 3 è un gruppo di Chevalley, o ottenuto per 'twisting' da un gruppo di Chevalley, se è transitivo sull'insieme delle camere di Γ (cfr. [18], per il caso (A_n) ; e [24], per il caso generale). Ancora: un recente risultato di Timmesfeld, non ancora pubblicato, asserisce quanto segue: sia Γ una geometria di Tits-Buekenhout (cfr. più avanti), irriducibile e finita. Assumiamo che, per ogni scelta dei tipi distinti i e j , i residui delle bandiere di cotipo $\{i,j\}$ o sono tutti piani proiettivi desarguesiani di ordine $\neq 3$ o tutti digoni generalizzati (brevemente: *sui lati del diagramma troviamo solo piani desarguesiani*). Supponiamo infine che il gruppo degli automorfismi speciali di Γ sia transitivo sulle camere. Allora Γ è un edificio in uno dei diagrammi (A_n) , (D_n) , (E_6) , (E_7) , (E_8) , oppure ha uno dei tre seguenti diagrammi:



(e i piani proiettivi sui lati del diagramma hanno ordine 2)



(e i piani proiettivi sui lati del diagramma hanno ordine 2)



(e sui lati del diagramma troviamo solo piani di ordine 2 oppure solo piani di ordine 8)

Pur con cautela, potremmo dunque concludere che, almeno su certi diagrammi o sotto opportune ipotesi (grassezza, finitezza,...), la transitività sulle camere risulta una condizione forte. Abbandoniamo dunque gli appartamenti.

Per semplicità, riassumiamo come punto di partenza il concetto di complesso di bandiere.

Gli esempi con cui ho aperto questo capitolo mostrano già quale dovrà essere il surrogato degli appartamenti: *il* (meglio: un) *diagramma*, calcolato su tutta la struttura. Ma il diagramma si deve appoggiare ora su una ripartizione delle varietà in tipi (si veda l'esempio 2) di questo capitolo). Sennonché, nel caso degli edifici generalizzati, questa viene prodotta, come il diagramma, dagli appartamenti.

Avendo rinunciato agli appartamenti, possiamo assumere la partizione in tipi come un 'datum'; questa è la via seguita da Buekenhout nei due articoli [7], [8] e da Tits nell'articolo [28], già citato.

Ma qui preferisco produrre la partizione in tipi come risultato univoco di una costruzione elementare. Sia dato un complesso di bandiere K definito su un insieme di vertici V da un'incidenza I . Quanto si è visto negli edifici generalizzati (Cap. III) mostra che, in quel caso, la partizione in tipi può prodursi dalla seguente relazione T , che diremo *trasversale* di I ; due varietà x, y si corrispondono in T e scriveremo xTy se esistono due camere C, C' tali che $\{x, y\} = (C-C') \cup (C'-C)$. Sia ora θ_I la relazione di equivalenza generata su V da T . Nel caso degli edifici generalizzati, θ_I è appunto la partizione in tipi; per di più, la (b.11) mostra che in tal caso, presa una faccia F , la relazione θ_I^F indotta da θ_I sul residuo K_F di F coincide con la relazione $\theta_{I,F}$ definita su K_F dalla trasversale T_F dell'incidenza I_F indotta da I su K_F . Diremo allora in generale che θ_I è *residuale* se $\theta_I^F = \theta_{I,F}$ per ogni bandiera F . Sempre nel caso degli edifici generalizzati, si ha che una camera prende una varietà da ogni tipo. In generale, diremo che θ_I è *ben posta* se I induce la relazione identica su ogni classe di equivalenza di θ_I , e che θ_I è *regolare* se ogni camera interseca tutte le classi di equivalenza di θ_I . Infine θ_I si dirà *trasversale* se è regolare e ben posta.

E' presto visto che se θ_I è ben posta allora, per ogni bandiera F , $\theta_{I,F}$ è ben posta. Si ha:

(t.1) Sia θ_I trasversale. Allora θ_I è residuale se e solo se per ogni bandiera F l'equivalenza $\theta_{I,F}$ è regolare (perciò trasversale, poiché tale è θ_I).

Sia infatti θ_I residuale. Sia F una bandiera di K e G ed x siano una camera e una varietà di K_F . La bandiera $F \cup G$ è una camera in K . Sicché, siccome θ_I è regolare, esiste $y \in F \cup G$ con $x \equiv y(\theta_I)$; e siccome θ_I è ben posta, è $y \in G$. Infine $y \equiv x(\theta_{I,F})$ perché θ_I è residuale. Il "solo se" è così provato.

Proviamo il "se". Sia F una bandiera e siano x, y varietà in K_F con $x \not\equiv y(\theta_{I,F})$. Sia G una camera di K_F contenente x . Siccome $\theta_{I,F}$ è regolare, esiste $z \in G$ tale che $z \equiv y(\theta_{I,F})$. Sicché $z \equiv y(\theta_I)$; pertanto $x \not\equiv y(\theta_I)$, perché è $z \in x$ e θ_I è ben posta. Infine: $\theta_I^F = \theta_{I,F}$. E l'asserto è provato.

Il quoziente $\Delta_I = V/\theta_I$ verrà detto *insieme naturale dei tipi* di K , o anche *partizione naturale di K in tipi*. Nel seguito, con un innocuo abuso di linguaggio, ci riferiremo spesso a θ_I come alla partizione naturale in tipi di K . La proiezione canonica di V su Δ_I sarà detta *funzione naturale di tipo*, e sarà indicata con t_I . Con un innocuo abuso di linguaggio, quando θ_I sia residuale identificheremo la restrizione di t_I al residuo di una bandiera F con la funzione naturale di tipo $t_{I,F}$ di K_F e considereremo l'insieme naturale $\Delta_{I,F}$ dei tipi di K_F come sottoinsieme di Δ_I . Intendiamo per *rango di incidenza* di K la cardinalità di Δ_I . Il rango di incidenza non va confuso col rango di K in quanto complesso di camere, per la banale ragione che non è detto che K sia un complesso di camere. Però:

- (t.2) Sia θ_I ben posta. Allora le due seguenti condizioni si equivalgono:
- (i) il rango di incidenza di K è finito e θ_I è regolare e residuale.
 - (ii) Per ogni bandiera F di K , il residuo di F è un complesso di camere. E il rango di K in quanto complesso di camere (rammento che è $K=K_\emptyset$) è finito.

Per di più, valendo la (i) (equiv: la (ii)) il rango di incidenza di \mathcal{K} è uguale al rango di \mathcal{K} in quanto complesso di camere. In tal caso parleremo semplicemente del *rango* di \mathcal{K} .

Valga la (i). Sia n il rango di incidenza di \mathcal{K} . Allora ogni camera di \mathcal{K} contiene esattamente n varietà, perché θ_I è trasversale. La (ii) segue per induzione su n . Se $n = 1$ non v'è nulla da provare. Sia $n > 1$. Siano C e C' due camere distinte; per la trasversalità di θ_I vi sono due varietà, x, x' di C e C' rispettivamente, con $x \equiv x'(\theta_I)$ e $x = x'$. Sicché per definizione di θ_I esiste una sequenza di varietà $x = x_0, x_1, \dots, x_m = x'$ tale che $x_{i-1}Tx_i$ per $i=1, \dots, m$. Per provare che esiste una galleria da C a C' possiamo sempre ricondurci al caso che sia $m=1$. In tal caso esistono due camere adiacenti C_1 e C_2 con $x \in C_1$ e $x' \in C_2$, per definizione di T . Per ipotesi induttiva, esiste nel residuo \mathcal{K}_x di x una galleria da $C - \{x\}$ a $C_1 - \{x\}$, e una galleria in $\mathcal{K}_{x'}$ da $C_2 - \{x'\}$ a $C' - \{x'\}$. Sicché v'è una galleria in \mathcal{K} da C a C' . La (ii) è provata.

Valga ora la (ii). Data una camera C e una classe di equivalenza X di θ_I , sia $n(C, X)$ la cardinalità di $C \cap X$. Siccome θ_I è ben posta, è $n(C, X) = 0$ oppure 1 . Inoltre, se C e C' sono camere adiacenti, è $n(C, X) = n(C', X)$ per ogni classe di equivalenza X di θ_I . Sicché, per ogni classe di equivalenza X di θ_I , il numero $n(C, X)$ non dipende dalla camera C , poiché \mathcal{K} è un complesso di camere. Del resto: ogni varietà appartiene ad almeno una camera. Sicché $n(C, X) = 1$ sempre. Pertanto θ_I è trasversale.

Similmente, $\theta_{I,F}$ è trasversale per ogni bandiera F ; perché $\theta_{I,F}$ è ben posta, essendo $\theta_{I,F} \leq \theta_I^F$. In definitiva: θ_I è residuale, per la (t.1).

Definiamo dunque *provvisoriamente* geometria di rango n un complesso di bandiere \mathcal{K} definito da una relazione di incidenza I tale che θ_I sia trasversale e residuale e il rango di incidenza di \mathcal{K} sia finito (e uguale ad n).

E' immediato obiettare che ora, diversamente che negli edifici generalizzati, otteniamo un'unica funzione di tipo. Ma la differenza è solo apparente. La partizione in tipi era comunque anche negli edifici generalizzati. Ed era proprio quella che si è qui costruita. La molteplicità delle funzioni di tipo vi derivava dal venire

queste costruite sul diagramma, determinato questo, a sua volta, dagli appartamenti, mediante un sistema di convenzioni date una volta per tutte, e mutuamente esclusive (nel senso che il sistema delle marche per i lati era tale che l'una escludeva l'altra). Qui invece dobbiamo prima dare la partizione in tipi, e su questa poi costruiamo il diagramma. E siccome è ora avventato fissare un sistema definitivo di marche mutuamente esclusive per disegnare i diagrammi, perde di interesse diversificare a posteriori le funzioni di tipo componendole con automorfismi di diagrammi: il diagramma non dipenderà solo dalla geometria, ma anche da ciò che ci premerà di dire su di essa, sicché.....

V'è invece un altro dettaglio da sistemare. Nella pratica capita spesso di voler considerare in blocco più geometrie su un dato sistema di tipi. Ciò trova qui un ostacolo nell'essere i tipi prodotti all'interno delle singole geometrie. Ma vi si pone riparo con qualche marginale correzione:

DEFINIZIONE DI GEOMETRIA - Intenderemo (definitivamente) per *geometria su un insieme (finito) di tipi* Δ un complesso di bandiere \mathcal{K} munito di una applicazione t , detta *funzione di tipo*, dall'insieme V delle varietà di \mathcal{K} sull'insieme Δ dei tipi, tale che la partizione Θ_t individuata da t su V restituisce la partizione naturale in tipi di \mathcal{K} , e Θ_t è trasversale e residuale.

Useremo identificare una geometria con la terna $\Gamma = (V, I, t)$ ove V è l'insieme delle varietà, I è l'incidenza che definisce il complesso di bandiere che sostiene la geometria, e t la funzione di tipo. Ovvio il senso che resta fissato su termini quali *rango* (di Γ), *tipo* (di una varietà o una bandiera), *cotipo* (di una bandiera), *rango* di una bandiera... . Abbreviamo la locuzione "varietà di tipo i " in *i -varietà*. Manteniamo la convenzione di scrivere $FIG(FIx, xIy, \dots)$ per intendere che le bandiere F e G sono incidenti (che la bandiera F è incidente alla varietà x , che la varietà x e y sono incidenti ...). E' ovvio che il *residuo* di una bandiera F è identificabile con la geometria $\Gamma_F = (V_F, I_F, t_F)$, ove V_F è l'insieme delle varietà incidenti ad F ma non appartenenti ad F , e t_F ed I_F sono le restrizioni di t ed I a V_F . (Che Γ_F sia una geometria segue dalla (t, I)).

Si ha che:

(t.3) La funzione di tipo induce su ogni camera una biezione sull'insieme Δ dei tipi.

(Per la (t.2), la (t.3) è conseguenza immediata della definizione di geometria qui data). Dalla definizione di Θ_I , dal fatto che Θ_I è assunta residuale e trasversale (e che $\Theta_t = \Theta_I$), e dalle (t.1) e (t.2), si ha subito:

(t.4) Per ogni bandiera F di corango almeno 2, il grafo definito da I_F su V_F è connesso.

Dalle (t.3) e (t.4) e dal fatto che operiamo su strutture di rango finito, si ottiene:

(t.5) Per ogni bandiera F , per ogni scelta dei tipi distinti i, j nel cotipo di F , il grafo indotto da I_F su $t_F^{-1}(\{i, j\})$ è connesso.

(Cfr. la (p.5) del Cap. 1). La cosa si prova per induzione sul rango n . Se $n=1$ non v'è nulla da provare. Sia $n > 1$. La (t.5) vale su Γ_F per ogni bandiera $F \neq \emptyset$ per ipotesi induttiva. Siano ora i, j due tipi distinti e siano x, y varietà di tipo i o j (senza escludere che $t(x) = t(y)$). Ragioniamo per induzione sulla distanza $\ell(x, y)$ di x da y nel grafo \mathcal{G}_I definito da I su V (la cosa è possibile per la (t.4)). Se $\ell(x, y) \leq 1$ non v'è nulla da provare. Sia $\ell(x, y) = M > 1$. Sia $X = x_0, x_1, \dots, x_m = y$ un cammino in \mathcal{G}_I da x ad y . Se $t(x_{m-1}) = i$ o j allora l'asserto della (t.5) segue per ipotesi induttiva su x e x_{m-1} , poiché $\ell(x, x_{m-1}) = m-1$. Sia $t(x_{m-1}) \neq i, j$. Sia y' una varietà di tipo j in $\Gamma_{x_{m-1}}$, incidente a x_{m-2} (una tale y' esiste per la (t.3)). L'asserto della (t.5) segue allora per ipotesi induttiva su x e y' (perché $\ell(x, y') \leq m-1$) e per ipotesi induttiva su $\Gamma_{x_{m-1}}$, applicata ad y' e y (perché $\Gamma_{x_{m-1}}$ ha rango minore di Γ).

In [8] la (t.3) entra nella definizione di geometria, col nome di *Proprietà di Trasversalità*. La (t.5) vi è detta *Connessione Forte*. In [28] la (t.4) compare col nome di *Connessione Residuale*. Mentre le geometrie vi sono definite mediante una proprietà leggermente più debole della Proprietà di Trasversalità, che però, assunta la Connessione Residuale e supposto che il rango della geometria sia finito, riesce equivalente alla Proprietà di Trasversalità. Sicché, per quanto ora visto,

e siccome banalmente la (t.5) implica la (t.4), nei casi di rango finito le geometrie residualmente connesse nel senso di Tits sono le geometrie fortemente connesse nel senso di Buekenhout. Diciamole, per fissare le idee, *geometrie di Tits-Buekenhout*: la loro definizione si ottiene semplicemente dalla definizione di geometrie data qui in precedenza, abolendo in essa le ipotesi che $\theta_t = \theta_I$ e che θ_I sia residuale e trasversale, e sostituendole con le (t.3) e (t.5). (Cfr. [8]).

Nota - Avverto che sulla denominazione "geometrie di Tits-Buekenhout" non è stabilito un senso fisso nella letteratura. Il senso qui fissato, se è più restrittivo delle definizioni di "geometria" stabilite nei due articoli di Tits e di Buekenhout sopra citati, è però assai più ampio della definizione stabilita da Buekenhout [7], ed è comunque accettabilmente ampio nei fatti: la connessione forte è il minimo che si possa chiedere per sviluppare un po' di teoria, e limitarsi al caso di rango finito è giustificato dal fatto che in questo campo il più delle dimostrazioni vengono costruite per induzione sul rango.

Le (t.3)-(t.5) mostrano che la definizione di geometria data in precedenza individua geometrie di Tits-Buekenhout. Viceversa:

(t.6) In una geometria di Tits-Buekenhout è $\theta_t = \theta_I$, e θ_I è trasversale e residuale.

E' intanto ovvio che la (t.3) implica che $\theta_I \leq \theta_t$. La disuguaglianza $\theta_t \leq \theta_I$ segue per induzione sul rango n della geometria. Se $n = 1$ non c'è nulla da provare. Se $n=2$ la $\theta_t \leq \theta_I$ non dice nulla di più della (t.5). Sia $n > 2$. Siano x, y varietà distinte di ugual tipo i e sia j un tipo diverso da i . Per la (t.5), esiste un cammino da x a y nel grafo definito da I su $t^{-1}(\{i, j\})$. Siccome per la (t.3) varietà distinte di ugual tipo non sono mai incidenti, possiamo sempre ricondurci al caso che esista una j -varietà z con $xIzIy$. Per ipotesi induttiva sul residuo di z , abbiamo $x \equiv y (\theta_{I, \{z\}})$. Sicché $x \equiv y (\theta_I)$. E la $\theta_t \leq \theta_I$ è provata. Che poi θ_I sia trasversale e residuale segue immediatamente dalla (t.3).

Sicché: le geometrie individuate dalla definizione data in precedenza sono esat-

tamente le geometrie di Tits-Buekenhout. Nel seguito dunque userò semplicemente il termine "geometrie", lasciando cadere la specificazione "di Tits-Buekenhout"; sappiamo ormai, infatti, che ciò non ci porta ad equivoci.

Nota - Osservo che non è possibile ritrovare contropartite separate per le (t.3) e (t.5) in proprietà elementari di Θ_I .

Passiamo ora ai diagrammi. Questi si disegneranno assumendo come vertici i tipi, e contrassegnando il lato da un vertice i ad un vertice j con una marca che indichi quali spazi compaiono tra i residui di bandiere di cotipo $\{i,j\}$. L'aspetto che il diagramma assume (e la possibilità di disegnarlo) dipende dal repertorio di marche che si decide di adottare. E' buona consuetudine mantenere alle notazioni $\underset{i}{o} \text{---} \underset{j}{o}, \overset{i}{o} \text{---} \overset{j}{o}, \dots \overset{(m)}{o} \text{---} \underset{j}{o}, \dots$ il senso già fissato su edifici generalizzati (cfr. Cap. IV, ultime righe), e continuare ad indicare il fatto che i residui di bandiere di cotipo $\{i,j\}$ sono digoni generalizzati col non tracciare alcun lato tra i e j . E' poi frequente l'impiego della marca $\underset{i}{o} \text{---}^{\pi} \text{---} \underset{j}{o}$ quando si voglia solo dire che i residui di bandiere di cotipo $\{i,j\}$ sono spazi parziali lineari. L'esempio 2) dell'inizio di questo capitolo mostra che può darsi il caso che ^{si} necessiti di marche orientate. Rammento qui le più frequenti.

1) Diciamo *spazio lineare* uno spazio parziale lineare tale che per due punti passa sempre una retta. Col simbolo:

$\underset{i}{o} \text{---}^L \text{---} \underset{j}{o}$ (equivalentemente $\overset{j}{o} \text{---}^I \text{---} \overset{i}{o}$) si indica che i residui di bandiere di cotipo $\{i,j\}$ sono spazi lineari, con le i -varietà in ruolo di punti.

2) Diciamo *circolo* uno spazio lineare in cui tutte le rette hanno esattamente due punti (cioè: spazi lineari definiti da grafi completi).

Col simbolo:

$\underset{i}{o} \text{---}^C \text{---} \underset{j}{o}$ (equivalentemente: $\overset{j}{o} \text{---}^D \text{---} \overset{i}{o}$)

intendiamo che i residui di bandiere di cotipo $\{i,j\}$ sono circoli, con le i -varie

tà in ruolo di punti.

2) Con $o \xrightarrow{Af} o$ intendiamo che i residui di bandiere di cotipo i, j sono spazi affini, con le i -varietà in ruolo di punti.

Rimando per altre marche notevoli (ovvero: classi notevoli di geometrie di rango 2) all'articolo di Buekenout [9].

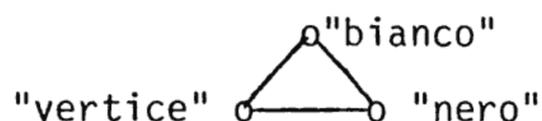
Accanto ai diagrammi ora considerati (*diagrammi speciali*) è utile definire il *diagramma di base* $\Delta(\Gamma)$ di una geometria Γ su un insieme di tipi Δ (cfr. [8]); $\Delta(\Gamma)$ è il grafo (semplice, non marcato) tracciato su Δ congiungendo due tipi i, j con un lato se, per qualche bandiera F di cotipo $\{i, j\}$, Γ_F non è un digono generalizzato (concedendo ora, con una leggera modifica terminologica, che un digono generalizzato possa anche avere un solo punto e/o una sola retta).

Nota - Il diagramma di base non è un caso limite di diagramma speciale.

Data una bandiera F , il diagramma di base $\Delta(\Gamma_F)$ del residuo di F , è un sottografo del grafo indotto da $\Delta(\Gamma)$ sul cotipo $\Delta-t(F)$ di F .

Nota - A differenza di quanto accade per i diagrammi speciali, il diagramma di base $\Delta(\Gamma_F)$ può essere un sottografo proprio del grafo indotto su $\Delta-t(F)$ da $\Delta(\Gamma)$. Si consideri infatti su una sfera una triangolazione T tale che i triangoli di T siano colorati in bianco e in nero in modo che triangoli adiacenti abbiano colori opposti. Un calcolo sulla caratteristica di Eulero mostra che c'è almeno un vertice di T da cui escono quattro triangoli. Se per ogni vertice di T escono quattro triangoli, allora T dà lo spazio polare magro di rango 3. In tal caso la costruzione del complesso orifiamma si riduce a scegliere i triangoli e i vertici come nuove varietà, ripartire i triangoli in due tipi diversi a seconda del loro colore, e definire l'incidenza tra triangoli di colore opposto mediante l'adiacenza (si è già vista questa costruzione all'inizio del cap. 4).

Supponiamo ora che T abbia più di 8 triangoli. In tal caso v'è almeno un vertice da cui escono più di quattro triangoli (anche ciò si ottiene da un facile computo sulla caratteristica di Eulero). Sicché, se ripetiamo su T la costruzione ora descritta, otteniamo una geometria Γ di diagramma di base:



(ove si assuma come insieme di tipi Δ la terna di parole "vertice", "bianco", "nero" secondo ovvie convenzioni). Tuttavia vi sono sempre vertici di T da cui escono quattro triangoli. Se x è un tal vertice, il residuo Γ_x di x in Γ è un digono: sicché $\Delta(\Gamma_x)$ non è il grafo indotto da $\Delta(\Gamma)$ sulla coppia di parole "bianco" e "nero" (cotipo di x). Si noti che le modalità di definizione dei diagrammi speciali escludono il verificarsi su essi di patologie analoghe a questa.

Ovvio in che seno si parlerà di *somma diretta* di geometrie, di *geometrie riducibili* o *irriducibili* (rimando a quanto stabilito nel Cap. III su complessi di vertici e faccie). Dato poi un sottoinsieme D di Δ , indichiamo con $\Gamma^D = (t^{-1}(D), I^D, t^D)$ la geometria indotta da Γ su $t^{-1}(D)$ (I^D e t^D sono l'incidenza e la funzione di tipo indotto su $t^{-1}(D)$ dall'incidenza e dalla funzione di tipo t di Γ ; che Γ^D sia una geometria è presto visto). Il diagramma di base $\Delta(\Gamma^D)$ di Γ^D è un sovragrafo del grafo indotto da $\Delta(\Gamma)$ su D .

Nota - Non è detto che $\Delta(\Gamma^D)$ coincida col grafo indotto da $\Delta(\Gamma)$ su D . Sia infatti Γ uno spazio proiettivo tridimensionale e assumiamo, come di consueto, le dimensioni come tipi. Piniamo $D = \{0, 2\}$. Allora $\Delta(\Gamma)$ induce su D il grafo discreto. Ma Γ^D non è un digono generalizzato. Sicché $\Delta(\Gamma^D)$ ha (anzi: è) un lato.

Similmente a quanto accadeva per gli edifici generalizzati (cfr. la (b.6) del Cap. 3):

(gd.1) Sia Γ una geometria su Δ . Allora $\Delta(\Gamma)$ è connesso se e solo se Γ è irriducibile. Sia $\Delta(\Gamma)$ non connesso, e $\{D_i | i \in J\}$ sia l'insieme delle sue componenti connesse. Allora è $\Gamma = \bigoplus_{i \in J} \Gamma^D_i$.

Rimando a [8] per una dimostrazione. Qui mi limito a notare che la dimostrazione, per induzione sul rango, fa uso essenziale dell'assunzione che le geometrie siano date su insiemi finiti di tipi. Sicché si discosta da quella data nel cap.3 per la (b.6). Rammento anzi che la (b.6) vale anche nel caso di rango infinito. Se invece si ammettono geometrie su insiemi infiniti di tipi, la (gd.1) cade, anche se sulle geometrie si assumono ipotesi apparentemente non deboli: sono noti controesempi. Ignoro se la ragione di ciò stia nel continuare a considerare le geometrie di rango infinito come complessi di bandiere. Su ciò comunque non insisto. Avverto invece che la (gd.1) fa uso essenziale anche dalla (t.5).

Nota - Avverto che la reciproca della (gd.1) è falsa. Ovvero: non è detto che, dati due tipi i e j , se tutte le i -varietà sono incidenti a tutte le j -varietà, allora i e j stiano in due distinte componenti connesse del diagramma di base. Si consideri infatti un grafo completo su quattro punti. Si assumano come tipi i numeri 0,1 e 2, si assumano come 0-varietà i vertici del grafo, come 1-varietà le rette e come 2-varietà i quadrangoli estraibili dal grafo. Le incidenze siano definite nel modo ovvio. Si ottiene una geometria nel diagramma speciale

$$(C_3) \quad \begin{array}{ccc} \circ & \text{---} & \circ \text{---} & \circ \\ 2 & & 1 & 0 \end{array}$$

(non è però uno spazio polare). Il diagramma di base di tale geometria è dunque:

$$\begin{array}{ccc} \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ 0 & & 1 & & 2 \end{array} . \text{ Nondimeno, tutte le 0-varietà sono incidenti a tutte le 2-varietà.}$$

Chiudo questo capitolo con alcuni risultati, ormai classici.

Rimando a H.H.Crapo e G.C.Rota "Combinatorial Geometries" (1971) per la definizione di geometria combinatoriale. Qui, per evitare equivoci, userò la dizione *geometria di chiusura* anziché "geometria combinatoriale". Diciamo *dimensione* di un sottospazio X in una geometria di chiusura la cardinalità, diminuita di 1, di un insieme di generatori indipendenti di X . La dimensione del sottospazio improprio è detta *dimensione* della geometria. Si ha:

(gd.2) Le geometrie di chiusura n -dimensionali sono le geometrie (di Tits-Buekenhout) di diagramma:

$$(L_n) \quad \begin{array}{ccccccc} & & L & & L & & \dots & & L & & \\ & & \text{---} & & \text{---} & & & & \text{---} & & \\ 0 & & 1 & & 2 & & & & n-2 & & n-1 \end{array}$$

(La (gd.1) è essenzialmente il Teorema 7 di [7]). Dò questa dimostrazione per esteso, come esempio.

Che le geometrie di chiusura siano geometrie in (L_n) è ovvio: si scartino i sottospazi vuoto e improprio, e si assumano le dimensioni come tipi e si definiscono le incidenze nel modo ovvio, mediante le inclusioni. Le (t.3) e (t.5) sono di immediata verifica. Viceversa, sia $\Gamma = (V, I, t)$ una geometria nel diagramma (L_n) . Possiamo sempre identificare l'insieme dei tipi Δ con l'insieme degli indici dei vertici del diagramma. La dimostrazione è per induzione su n . Se $n \leq 2$ non c'è nulla da provare (se $n=2$ basterà definire uguale a V la chiusura di una terna di punti non allineati; il resto viene dalla definizione di spazio lineare: se $n=1$ le cose sono ancor più banali). Sia $n \gg 2$. Diciamo punti le varietà di tipo 0 e rette quelle di tipo 1.

Cominciamo col provare che:

i) Per due punti passa sempre almeno una retta.

Per la (t.5) possiamo ricondurci a dimostrare che, dati tre punti x, y, z tali che vi sia una retta u per x, y e una retta v per y e z , esiste una retta w per x e z . Ciò si prova passando al residuo di y . Qui u e v assumono il ruolo di punti, sicché, per ipotesi induttiva, c'è una varietà a di tipo 2 (una retta nel residuo di y) incidente sia ad u che a v . Sicché, passando ai residui delle rette (1-varietà) u e v e usando la (gd.1), si ha xIa, yIa, zIa . Si passi ora al residuo di a . In esso si ha subito che c'è una 1-varietà w incidente sia ad x che ad y . E siamo a posto.

Proviamo ora che:

ii) Per due punti passa al più una retta.

Per assurdo, siano u e v rette distinte incidenti a due distinti punti x e y . Passiamo al residuo di x . In esso, per ipotesi induttiva, esiste una 2-varietà z incidente sia ad u che a v . Passando poi al residuo di u e applicando

la (gd.1), si ha che yIz . Passando ora al residuo di z , si ha la contraddizione.

Indichiamo ora con $\sigma_0(x)$ l'insieme delle 0-varietà incidenti ad una data varietà x , ovvero la 0-ombra di x . Allora:

iii) Per ogni scelta delle varietà x, y si ha $\sigma_0(x) \subseteq \sigma_0(y)$ se e solo se $t(x) \leq t(y)$, e xIy .

Il "se" è ovvio (si passi al residuo di x e si applichi la (gd.1), se $t(x) \neq t(y)$; se $t(x) = t(y)$, si ha $y = x$ dalla (t.3)). Proviamo il "solo se". Per la (t.3), è $\sigma_0(x) \neq \emptyset$. Sia $u \in \sigma_0(x)$. E' intanto $xIuIy$. Se $t(x) = 0$, è $x = u$, per la (t.3). E non v'è nulla da provare. Sia $t(x) > 0$. Allora, per (t.3), esiste una 2-varietà u' incidente ad x . Per definizione di spazio lineare, esistono almeno due varietà nel residuo di u' incidenti ad x . Sicché $\sigma_0(x)$ contiene almeno due elementi. Altrettanto dunque vale per $\sigma_0(y)$. Sicché $t(y) > 0$, per la (t.3). Pertanto sia x che y appartengono al residuo di u . Se $\sigma_1^u(x)$ e $\sigma_1^u(y)$ sono gli insiemi di 1-varietà nel residuo di u incidenti ad x e y , rispettivamente (1-ombre di x e y in Γ_u), allora risulta $\sigma_1^u(x) \subseteq \sigma_1^u(y)$.

Infatti, sia z un elemento di tipo 1 incidente ad u ed x . Per la (t.3) esiste una 2-varietà z' incidente a z , e, per definizione di spazio lineare, esistono nel residuo di z' almeno due 0-varietà incidenti a z . Ne segue che $\sigma_0(z)$ contiene almeno due elementi. In particolare, contiene un elemento v diverso da u . E' certo vIx . Infatti, vIx è ovvio se $t(x) = 1$, poiché in tal caso è $x = z$, per la (t.3). Se $t(x) < 1$, si passi al residuo di z ; che vIx segue allora dalla (gd.1). Ma è anche vIy , perché $\sigma_0(x) \subseteq \sigma_0(y)$ per ipotesi. Passando al residuo di y , vi troviamo, per ipotesi induttiva, una 1-varietà w tale che $u, v \in \sigma_0^y(w)$ (ove $\sigma_0^y(w)$ è la 0-ombra di w nel residuo di y ; a rigore, il ragionamento deve sfruttare anche la (gd.1)). Ma è, allora, $w = z$ per la ii). Sicché zIy . Si ha quindi $\sigma_1^u(x) \subseteq \sigma_1^u(y)$. Ora, le $t(x) \leq t(y)$ e xIy seguono per ipotesi induttiva sul residuo di u .

Per di più:

iv) E' $\sigma_0(x) = \sigma_0(y)$ se e solo se $x=y$.

(banale, per la ii) e la (t.3)).

Si ha poi:

v) Siano x e y due varietà, x di tipo 0 ed y di tipo $< n-1$. E sia $x \notin \sigma_0(y)$. Allora c'è una varietà z di tipo $t(y)+1$ e incidente sia ad x che ad y .

Possiamo assumere $t(y) > 0$ (altrimenti l'asserto segue subito dalla i)). Si prenda una 0-varietà $u \in \sigma_0(y)$ (c'è per (t.3)); sia v la retta per x e u (cfr. i) e ii)). E' $v \notin \sigma_1(y)$ (ove $\sigma_1(y)$, 1-ombra di y , è l'insieme delle 1-varietà incidenti ad y). Infatti, se altrimenti, avremmo $v = y$ se $t(y) = 1$ (e ciò darebbe una contraddizione) e, se $t(y) > 1$, passando al residuo di v avremmo, per la (gd.1), $x \in y$ (di nuovo una contraddizione). Passando ora al residuo di u , vi proviamo una $(t(y)+1)$ -varietà z con $v \in z$, per ipotesi induttiva. Passando ora al residuo di v , si ha $x \in z$, per la (gd.1). E la v) segue. Ancora:

vi) se $x, y \in \sigma_0(z)$ e $x \neq y$, allora la retta v per x e y (cfr. i) e ii)) è incidente a z .

(Ciò è stato implicitamente già provato nel corso della dimostrazione della iii)).

Da quanto sin qui visto si ha immediatamente che:

Le varietà sono identificabili con le loro 0-ombre e l'incidenza è interpretabile come inclusione. Chiamate dunque le (0-ombre di) varietà sottospazi, la vi) può leggersi così: se una retta interseca un sottospazio in due punti allora vi appartiene. Conveniamo di chiamare sottospazi anche V e \emptyset .

Proviamo infine che:

vii) Intersezioni di famiglie di sottospazi sono sottospazi.

Sia $\{x_j | j \in J\}$ un insieme di varietà. Se $\bigcap_{j \in J} \sigma_0(x_j) = \emptyset$ o V non v'è nulla da provare. Sia dunque $V \neq \bigcap_{j \in J} \sigma_0(x_j) \neq \emptyset$. Sia $x \in \bigcap_{j \in J} \sigma_0(x_j)$. Se $\{x\} = \bigcap_{j \in J} \sigma_0(x_j)$, non v'è nulla da provare. In caso contrario, per ipotesi induttiva esiste un elemento u nel residuo di x tale che $\sigma_1^x(u) = \bigcap_{j \in J} \sigma_1^x(x_j)$. Ovvero :

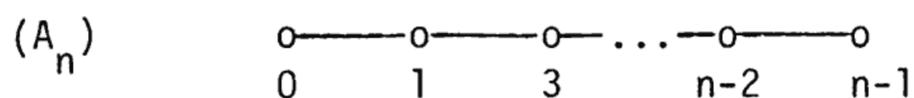
$\sigma_1(\{u,x\}) = \bigcap_{j \in J} \sigma_1(\{x,x_j\})$ (ove, se F è una bandiera ed i un tipo, con $\sigma_i(F)$ intendiamo l'insieme delle i -varietà incidenti ad F , i -ombra di F). Per la (gd.1), si ha $\sigma_0(u) \supseteq \sigma_0 \sigma_1(\{u,x\})$ (con ovvio senso delle notazioni).
 Se $t(u) = 1$ la dimostrazione è conclusa. Se invece $t(u) > 1$, sia $y \in \sigma_0(u)$. Per la i), o per ipotesi induttiva, nel residuo di u c'è una 1-varietà v incidente ad x e y . E' allora $y \in \sigma_0(v) \subseteq \sigma_0 \sigma_1(\{x,u\})$. Sicché $\sigma_0(u) = \sigma_0 \sigma_1(\{x,u\})$.
 Sia ora $z \in \bigcap_{j \in J} \sigma_0(x_j)$ e $z \neq x$. Passiamo al residuo di x_j . Vi troviamo una 1-varietà v_j incidente a x e z (per la i), o per ipotesi induttiva). Ma, per la ii), risulta $v_i = v_j$ per $i, j \in J$. Poniamo $v' = v_i$ ($i \in J$). E' certo $v' \cap x$ e $v' \in \bigcap_{j \in J} \sigma_1(\{x,x_j\})$. Sicché $v' \in \sigma_1(\{u,x\})$. Ma, allora, $z \in \sigma_0(u)$, perché $z \in \sigma_0(v') \subseteq \sigma_0 \sigma_1(\{u,x\}) = \sigma_0(u)$. Infine: $\sigma_0(u) = \bigcap_{j \in J} \sigma_0(x_j)$.

La vii) è provata.

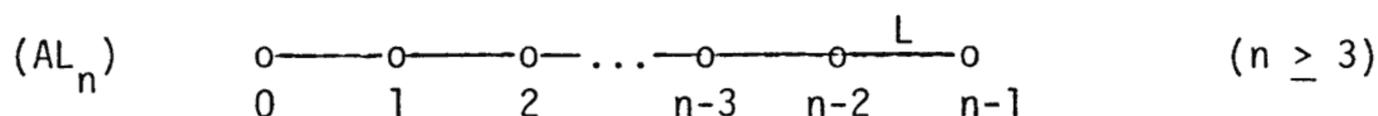
Che il sistema dei sottospazi $\{\sigma_0(x) \mid x \in V\} \cup \{\emptyset, V\}$ dia una geometria di chiusura di dimensione n segue ora con metodi di routine, dalle i)-vii).

Dalla (gd.2) si hanno i seguenti corollari (Cfr. [7]):

(gd.3) Le geometrie proiettive n -dimensionali sono le geometrie di diagramma:

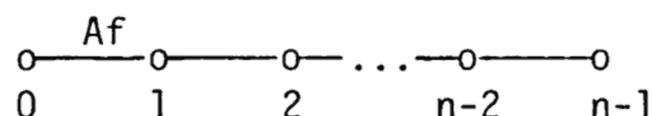


Le geometrie di diagramma:



sono quelle ottenute da geometrie proiettive m -dimensionali con $m \geq n$ dimenticando i sottospazi k -dimensionali per ogni $k \geq n$.

Le geometrie di diagramma:



sono gli spazi affini n -dimensionali.

Le dimostrazioni si riducono a lunghe, ma elementari, verifiche. Mi limito alla verifica della prima asserzione. Occorre solo provare che le geometrie in (A_n) sono proiettive. Allo scopo basta mostrare che, data una varietà z e due punti x, y , se y appartiene al sottospazio generato da $\sigma_0(z)$ e x , allora la retta u per x e y interseca $\sigma_0(z)$ (la terminologia qui usata è autorizzata dalla (gd.2)). La cosa segue per induzione su n . Se $n \leq 2$ non v'è nulla da provare. Sia $n > 2$. Se $\sigma_0(z)$ ed x generano un sottospazio proprio, per la (gd.2) esiste una varietà v tale che $\sigma_0(v)$ sia il sottospazio generato da $\sigma_0(z)$ ed x . E l'asserto segue per ipotesi induttiva sul residuo di v . In caso contrario, sia $w \in \sigma_0(z)$. Passando al residuo di w , si ha per ipotesi induttiva che il piano individuato da w, y ed x contiene una retta in $\sigma_1(\{w, z\})$. La conclusione è ora immediata.

Per una dimostrazione diretta (ma non molto diversa da quella data per la (gd.2)) della parte della (gd.3) concernente (A_n) rimando alla parte finale di [28]. Osservo invece che dalla (gd.3) segue subito che:

(gd.4) (Cfr. Cap. 4 (b.10)) Le geometrie proiettive n -dimensionali sono gli edifici generalizzati di diagramma (A_n) .

Infatti, gli edifici generalizzati sono geometrie. La (gd.4) segue dunque dalla (gd.3) e dal fatto che le geometrie proiettive sono edifici generalizzati. Per una dimostrazione diretta della (gd.4) (non molto diversa però da quella qui prodotta per la (g.2)) rimando al Cap. 6 di [26].