CAPITOLO 3

(BN-COPPIE ED EDIFICI)

EDIFICI DI TIPO FINITO ED EDIFICI FINITI

Diciamo *diagramma* $D(\Gamma)$ di un edificio $\Gamma = (K,\mathfrak{U})$ il diagramma del suo gruppo di Weyl. Di qui in poi, sia che si rappresenti $D(\Gamma)$ come grafo multiplo sia che lo si pensi come grafo pesato, atteniamoci alla convenzione di non tracciare alcun lato tra due vèrtici i,j di $D(\Gamma)$ se il peso m_{ij} è 2. Ciò premesso, $D(\Gamma)$ si dirà *irriducibile* se consta di un'unica componente connessa, *riducibile* in caso contrario. L'edificio Γ si dirà *irriducibile* se $D(\Gamma)$ è irriducibile, *riducibile* in caso contrario. Vedremo che gli edifici riducibili si spezzano in 'somme dirette' di edifici irriducibili. Ma occorrono alcune definizioni preliminari.

Intanto, i vertici di $D(\Gamma)$ possono essere assegnati come tipi alle varietà di Γ. Allo scopo si fissi una coordinatizzazione (C,Σ) di Γ. Le varietà in Σ, essendo associate alle riflessioni del gruppo di Weyl di Γ, restano distribuite in tipi corrispondenti ai vertici di $D(\Gamma)$, in modo naturale. Inoltre, per quanto già sappiamo sui complessi di Coxeter, una camera di un complesso di Coxeter prende una varietà in ogni tipo. Resta così definita una biezione τ_C da C sull'insieme dei vertici di $D(\Gamma)$. Presa ora una qualunque altra camera C', sia Σ' un appartamento per C e C'. Applicando la (B.4) e Σ, Σ', C e C', posso ricopiare su Σ' la partizione in tipi delle varietà di Σ da cui è stata prodotta τ_C. E' così presto visto che esiste un'unica ripartizione naturale delle varietà di Σ' in tipi che concordi con τ_C. Resta così univocamente determinata una funzione $\tau_{C'}$ da C' all'insieme dei vertici di $D(\Gamma)$. E $\tau_{C'}$ non dipende dalla scelta di Σ'. Sia infatti Σ'' un'altro appartamento per C e C', e sia $\tau'_{C'}$ l'applicazione da C' a $D(\Gamma)$ indotta da τ_C su C' per il tramite di Σ''. Se fosse $\tau'_{C'} \neq \tau_{C'}$, applicando la (B.4) prima a Σ,Σ', C,C, poi a Σ',Σ'', C e C', poi a Σ'',Σ,C e C, otterremo un automorfismo non speciale di Σ che fissa tutte le varietà di una camera (cioè di C). Il che non può accadere, poiché Σ è un complesso di Coxeter. Resta così definita un'applicazione dall'insieme delle varietà di Γ sui vertici di $D(\Gamma)$, che diremo *funzione di tipo basata su* C, e indicheremo con τ^C. Proviamo ora che, date due camere C e C', se τ^C e $\tau^{C'}$ coincidono su C', allora coinci-

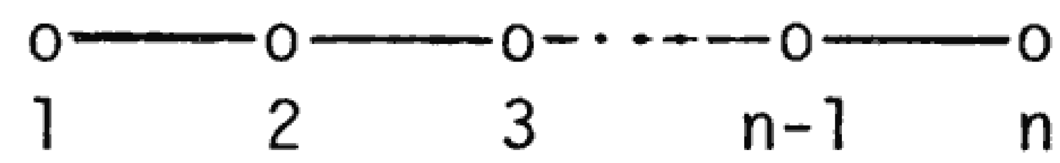
in Γ una funzione di tipo τ, $\tau(V_1)$ e $\tau(V_2)$ ripartiscono in due classi disgiunte l'insieme dei vertici di $D(\Gamma)$. Siano ora $i \in \tau(V_1)$ e $j \in \tau(V_2)$, e sia F una faccia di Γ di cotipo $\{i,j\}$ e Σ un appartamento contenente F. Siccome (tanto negli edifici che) nei complessi di Coxeter vale il fatto che tre faccie sono incluse in una stessa faccia se sono a due a due incidenti, possiamo identificare il residuo di F in Σ, così come questo è stato definito nel cap. 1, con la stella $St_\Sigma(F)$ di faccie di Σ contenenti F. In $St_\Sigma(F)$, ogni faccia di tipo $\tau(F) \cup \{i\}$ è incidente ad ogni faccia di tipo $\tau(F) \cup \{j\}$. Ed è presto visto che, affinché ciò accada, deve essere $m_{ij} = 2$.

Possiamo dunque ricondurre lo studio degli edifici riducibili a quello degli edifici irriducibili, concentrando l'attenzione su questi. A rigore, tale conclusione non è del tutto corretta, in quanto la definizione di somma diretta (debole) di edifici non permette di ricostruire univocamente le somme dirette sugli edifici 'addendi'. Per inciso, a fatti come questo (e ad altri simili) pensavo quando, alla fine del precedente capitolo, affermavo che il concetto di morfismo tra edifici abbisogna di chiarificazione. Infatti, qui, la definizione utile è quella di somma diretta debole. Mentre un minimo di familiarità con categorie suggerisce che quella 'categorialmente giusta abbia da essere semmai quella di somma diretta forte. Ad ogni modo, se ci limitiamo alla considerazione di edifici di tipo finito (cfr. sotto), queste difficoltà cadono. Su essi infatti somme dirette forti o deboli sono la stessa cosa. Ciò segue dal fatto che (come vedremo più avanti) un complesso che sostenga un edificio di tipo finito ammette un'unica strutturazione in appartamenti. Che poi la somma diretta forte di due edifici (di tipo finito) sia un edificio (di tipo finito) è pressoché ovvio.

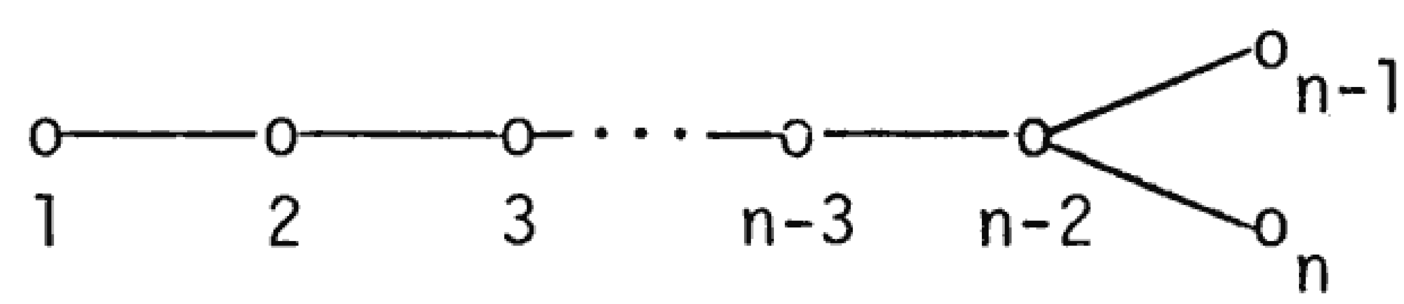
Nota - Tutto quanto fin qui detto non usa l'assunzione che gli edifici siano complessi grassi.

Un edificio si dice di *tipo finito* se il suo gruppo di Weyl è finito. Un edificio di tipo finito e irriducibile si dice di *tipo sferico*. Analoga terminologia si stabilisce su complessi di Coxeter e gruppi di Coxeter. Il termine "sferico" è motivato dal fatto che i complessi di Coxeter irriducibili finiti sono tutti producibili come tassellazioni di ipersfere. Rimando per ciò al Cap. VI di [4]. Per esempio tetraedro ed ottaedro sono gli unici complessi di Coxeter di tipo sferico di rango 3. A questi potremmo aggiungere il cubo; ma è identico all'ottaedro: basta rappresentarne le faccie come vertici ed i vertici come faccie ("faccia" è inteso qui nel senso solito, ovviamente).

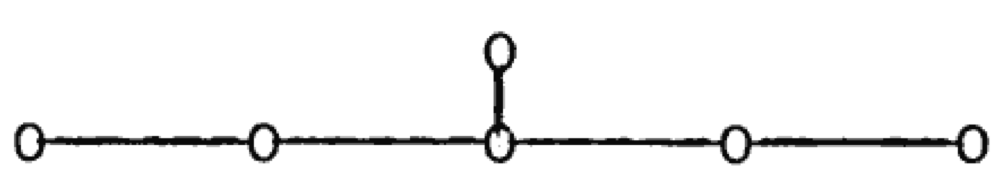
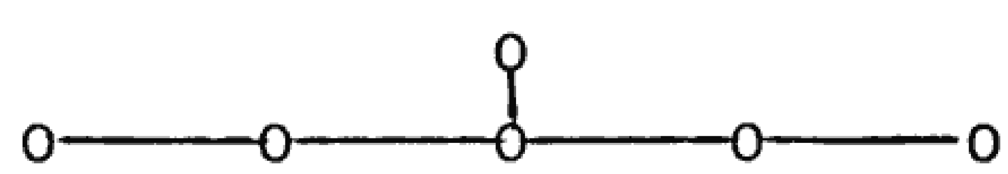
E' ben noto che i gruppi (i complessi) di Coxeter di tipo sferico sono tutti e soli quelli nei diagrammi:

(A_n) $(n \geq 1)$ 

(C_n) $(n \geq 2)$ 

(D_n) $(n \geq 3)$ 

(F_4) 

(E_6)  (E_7) 

(E_8)  (H_3)  (H_4) 

(G^m) 

$(m \geq 3)$

Ovvio che $(G^3) = (A_2)$, $(G^4) = (C_2)$ e $(D_3) = (A_3)$. Non si usa dar senso a (G_1). Talvolta si usa (B_n) anziché (C_n), come già ho avuto occasione di ricordare in precedenza.

Di qui in poi l'assunzione che gli edifici siano complessi grassi diventa essenziale. Elenco, senza dimostrazioni, alcuni importanti risultati, dovuti per lo più a Tits.

(b.7) Non esistono edifici di diagramma (H_3) od (H_4).
(cfr. [26] , Addenda).
(b.8) Gli unici edifici finiti di diagramma (G^m) si ottengono per $m = 3,4,6,8$.

(Ciò risulta, per la parte negativa, da un noto teorema di Feit e Higman. (Cfr. [17]). Per la parte positiva: per m=3,4 è ovvia (basta considerare un piano proiettivo non degenere per m=3, e uno spazio polare grasso per m=4). Per m=6 si può considerare una BN-coppia in un gruppo di Chevalley di tipo G_2 su un campo finito. Per m=8, si consideri una BN-coppia nel gruppo di Ree $^2F_4$).

(b.9) *Gli edifici finiti irriducibili di rango* ≥ 3 *sono tutti ottenibili da BN-coppie sui gruppi semplici finiti.*

(Cfr. [26], Cap. 11).

Si dirà *rango* di una BN-coppia il rango del suo gruppo di Weyl. La BN-coppia si dirà *irriducibile* se il suo gruppo di Weyl è irriducibile.

Si ha:

(bn.5) *I gruppi finiti semplici dotati di BN-coppie irriducibili di rango* ≥ 3 *sono gruppi di Chevalley su sistemi indecomponibili di radici o gruppi ottenuti per 'twisting' da questi.*

(Cfr. [26]). Viceversa: è ben noto che i gruppi di Chevalley su sistemi indecomponibili di radici e quelli ottenuti da questi per 'twisting' ammettono BN-coppie (si veda, per esempio, [16]).