CAPITOLO 3

(BN-COPPIE ED EDIFICI)

EDIFICI DI TIPO FINITO ED EDIFICI FINITI

Diciamo *diagramma* $D(\Gamma)$ di un edificio $\Gamma = (K,\mathfrak{U})$ il diagramma del suo gruppo di Weyl. Di qui in poi, sia che si rappresenti $D(\Gamma)$ come grafo multiplo sia che lo si pensi come grafo pesato, atteniamoci alla convenzione di non tracciare alcun lato tra due vèrtici i,j di $D(\Gamma)$ se il peso m_{ij} è 2. Ciò premesso, $D(\Gamma)$ si dirà *irriducibile* se consta di un'unica componente connessa, *riducibile* in caso contrario.L'edificio Γ si dirà *irriducibile* se $D(\Gamma)$ è irriducibile, *riducibile* in caso contrario. Vedremo che gli edifici riducibili si spezzano in 'somme dirette' di edifici irriducibili. Ma occorrono alcune definizioni preliminari.

Intanto, i vertici di $D(\Gamma)$ possono essere assegnati come tipi alle varietà di Γ . Allo scopo si fissi una coordinatizzazione (C,Σ) di Γ . Le varietà in Σ , essendo associate alle riflessioni del gruppo di Weyl di Γ , restano distribuite in tipi corrispondenti ai vertici di $D(\Gamma)$, in modo naturale. Inoltre, per quanto già sappiamo sui complessi di Coxeter, una camera di un complesso di Coxeter prende una varietà in ogni tipo. Resta così definita una biezione τ_C da C sull'insieme dei vertici di $D(\Gamma)$. Presa ora una qualunque altra camera C',sia Σ' un appartamento per C e C'. Applicando la (B.4) e Σ ,Σ', C e C', posso ricopiare su Σ' la partizione in tipi delle varietà di Σ da cui è stata prodotta τ_C. E' così presto visto che esiste un'unica ripartizione naturale delle varietà di Σ' in tipi che concordi con τ_C. Resta così univocamente determinata una funzione $\tau_{C'}$ da C' all'insieme dei vertici di $D(\Gamma)$. E $\tau_{C'}$ non dipende dalla scelta di Σ' Sia infatti Σ'' un'altro appartamento per C e C', e sia $\tau'_{C'}$ l'applicazione da C' a $D(\Gamma)$ indotta da τ_C su C' per il tramite di Σ''. Se fosse $\tau'_{C'} \neq \tau_{C'}$, applicando la (B.4) prima a Σ,Σ', C,C, poi a Σ',Σ'', C e C', poi a Σ'',Σ,C e C, otterremo un automorfismo non speciale di Σ che fissa tutte le varietà di una camera (cioè di C). Il che non può accadere, poiché Σ è un complesso di Coxeter. Resta così definita un'applicazione dall'insieme delle varietà di Γ sui vertici di $D(\Gamma)$, che diremo *funzione di tipo basata su* C, e indicheremo con τ^C. Proviamo ora che, date due camere C e C', se τ^C e $\tau^{C'}$ coincidono su C', allora coincidono su tutto Γ. Si ragiona per induzione sulla distanza tra C e C'. Siano C e C' adiacenti, e C" sia una qualunque altra camera. Sia Σ'' un appartamento per $C\cap C'$ e C", e Σ', Σ siano appartamenti per C' e C" e per C e C". Sia τ_Σ la funzione naturale di tipo indotta da τ^C su Σ e $\tau'_{\Sigma'}$ quella indotta da $\tau^{C'}$ su Σ'. L'esistenza ed unicità delle τ_Σ e $\tau'_{\Sigma'}$ segue dalle considerazioni precedenti, poiché C appartiene a Σ e C' appartiene a Σ'. Applicando la (B.4) a Σ, Σ'', C" e $C\cap C'$ e a Σ', Σ'', C" e $C\cap C'$, ricopiamo τ_Σ e $\tau'_{\Sigma'}$ su Σ'', ottenendo così due funzioni naturali di tipo $\tau_{\Sigma''}$ e $\tau'_{\Sigma''}$ su Σ'', che coincidono su $C\cap C'$ e inducono su C" la τ^C e la $\tau^{C'}$, rispettivamente. Ma $C\cap C'$ coinvolge tutti i tipi di Σ'', meno uno. Sicché deve essere $\tau_{\Sigma''} = \tau'_{\Sigma''}$. Pertanto τ^C e $\tau^{C'}$ coincidono su C". Infine: $\tau^C = \tau^{C'}$. Possiamo ora provare che una funzione di tipo è sempre compatibile coi tipi degli appartamenti (cioè: induce su ogni appartamento una funzione naturale di tipo). Siano infatti C una camera e Σ' un appartamento. Scegliamo una camera C' in Σ', e consideriamo la funzione di tipo $\tau^{C'}$ individuata dal coincidere con τ^C su C'. Per quanto visto ora è $\tau^C = \tau^{C'}$. Ma $\tau^{C'}$ induce una funzione naturale di tipo su Σ', per quanto visto poco più sopra (è infatti $C'\in\Sigma'$). E l'asserto è provato. E' poi facile vedere che ogni funzione dall'insieme delle varietà di Γ sull'insieme dei vertici di $D(\Gamma)$ che sia compatibile coi tipi degli appartamenti è costruibile come funzione di tipo basata su una (qualunque) camera. Definiamo dunque *funzione di tipo* un'applicazione dall'insieme delle varietà di Γ sull'insieme dei vertici di $D(\Gamma)$, compatibile coi tipi degli appartamenti. Da quanto ora visto, due funzioni di tipo coincidono se coincidono su una camera. E, in genere, due funzioni di tipo differiscono per un automorfismo di $D(\Gamma)$ e individuano la stessa partizione sull'insieme delle varietà di Γ, detta *partizione in tipi*. Tale partizione può facilmente costruirsi per via diretta. Intanto, è presto visto che, assegnata una funzione di tipo τ, una camera prende esattamente una varietà da ogni tipo; che due varietà distinte di ugual tipo non sono mai incidenti; e che, date due varietà, x,y, se esistono due camere C,C' tali che $\{x,y\} = (C-C') \cup (C'-C)$, allora $\tau(x) = \tau(y)$. Definiamo allora una relazione binaria T sull'insieme delle varietà ponendo xTy se $\{x,y\} = (C-C') \cup (C'-C)$ per due opportune camere C e C'. E sia $\Theta(T)$

la relazione di equivalenza generata da T. E' immediato verificare che $\Theta(T)$ è la partizione in tipi.

E' poi ovvio che la partizione in tipi e l'insieme delle funzioni di tipo si conservano per isomorfismi.

Ovvio che tutte le funzioni di tipo considerate o costruite nei capitoli precedenti (su spazi proiettivi, spazi polari, complessi orifiamma o su $\Gamma^{con.}_{B,N}$ e $\Gamma^{lat.}_{B,N}$) sono funzioni di tipo nel senso ora definito. Sono dunque le uniche funzioni di tipo definibili in tali casi (ciò a meno di automorfismi del diagramma). Così: uno spazio proiettivo, appartenendo al diagramma (A_n) ammette esattamente due funzioni di tipo (si passa dall'una all'altra scambiando i punti con gli iperpiani); uno spazio polare di rango ≥ 3 ha una sola funzione di tipo (ne ha due nel caso di rango 2). Un complesso orifiamma ne ha due se ha rango $\neq 4$ (si passa dall'una all'altra scambiando le marche 1,2 nella suddivisione dei sottospazi massimali dello spazio polare di cui si è costruito il complesso orifiamma). Ne ha 6 se ha rango 4.

Fissata una funzione di tipo τ, possiamo definire il *tipo* di una faccia A come l'insieme $\tau(A)$. Il *cotipo* di A sarà allora il complementare di $\tau(A)$ nell'insieme dei vertici di $D(\Gamma)$. Come nei complessi di Coxeter, un automorfismo di Γ si dirà *speciale* se conserva i tipi. E' ovvio che un gruppo di automorfismi speciali soddisfa la seconda parte della (G) . Anzi, da quanto sarà detto nell'Appendice, la (G) è equivalente alla condizione:

(G.bis) G è un gruppo di automorfismi speciali transitivo sull'insieme delle coordinatizzazioni.

Infatti, se un gruppo G agisce su un edificio Γ soddisfacendo la (G), allora soddisfa la (G.bis) nella sua azione su $\Gamma^{lat.}_{B,N}$ (o $\Gamma^{con.}_{B,N}$). Sicché soddisfa la (G.bis) su Γ , perché $\Gamma^{lat.}_{B,N} \cong \Gamma (\cong \Gamma^{con.}_{B,N})$.

Torniamo ora alla riducibilità di diagrammi ed edifici.

Intanto, è presto visto che $D(\Gamma)$ è riducibile se e solo se il gruppo di Weyl di Γ si spezza nella somma diretta di sottogruppi (di Coxeter, nei diagrammi corrispondenti alle componenti connesse di $D(\Gamma)$). Diciamo poi che un complesso di faccie $\mathcal{K}$ su un insieme di vertici V è *somma diretta* di due sottocomplessi $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$, sugli insiemi di vertici V_1 e V_2, e scriveremo $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2$, se V è unione disgiunta di V_1 e V_2 e le faccie di $\mathcal{K}$ sono le unioni (disgiunte) delle faccie di $\mathcal{K}_1$ e di quelle di $\mathcal{K}_2$. E' facile vedere che un complesso di Coxeter in un diagramma riducibile è la somma diretta dei sottocomplessi di Coxeter nei diagrammi corrispondenti alle componenti connesse del diagramma dato. Sia infatti S un gruppo di Coxeter in un diagramma $D(S)$ di componenti connesse D_k $(k \in K)$. Conveniamo di indicare con lo stesso simbolo D_k sia l'insieme di vertici che il grafo individuati dalla componente connessa D_k di $D(S)$. I sottogruppi S_{D_k} di S sono i gruppi di Coxeter nel diagramma D_k (per $k \in K$), e risulta $S = \bigoplus_{k \in K} S_{D_k}$. Per ogni $k \in K$, il complesso di Coxeter $\mathcal{K}(S_{D_k})$ di S_{D_k} è isomorfo alla stella di faccie del complesso $\mathcal{K}(S)$ di S contenenti la faccia S_{D^k}, ove si sia posto $D^k = \cup(D_h | h \neq k, h \in K)$. Dato ora $J \subseteq I = \bigcup_{k \in K} D_k$, poniamo $J_k = J \cap D_k$. Per ogni $x \in S$, risulta $xS_J = \bigcap_{k \in K} xS_{J_k \cup D^k}$. Sia ora $x = \prod_{k \in K} x_k$ la decomposizione di x su $\prod_{k \in K} S_{D_k}$. Possiamo allora associare ad xS_J la sequenza $(x_k S_{J_k \cup D^k} | k \in K)$. Il resto è ovvio.

Diciamo poi che un edificio $\Gamma = (\mathcal{K}, \mathcal{U})$ è *somma diretta debole* (o, brevemente, *somma diretta*) di due edifici $\Gamma_1 = (\mathcal{K}_1, \mathcal{U}_1)$ e $\Gamma_2 = (\mathcal{K}_2, \mathcal{U}_2)$ se risulta $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2$ ed $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 = \{\Sigma_1 \oplus \Sigma_2 | \Sigma_1 \in \mathcal{U}_1, \Sigma_2 \in \mathcal{U}_2, \Sigma_2 \in \mathcal{U}_2\}$. Diremo poi che Γ è *somma diretta forte* di Γ_1 e Γ_2 se risulta anche $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$.

Si ha allora:

(b.6) Un edificio è riducibile se e solo se è somma diretta di due edifici.

La dimostrazione del "solo se" è facile, benché un po' pesante nei dettagli. Proviamo il "se". Sia $\Gamma = (\mathcal{K}, \mathcal{U})$ somma diretta di $\Gamma_1 = (\mathcal{K}_1, \mathcal{U}_1)$ e $\Gamma_2 = (\mathcal{K}_2, \mathcal{U}_2)$. Sia V_i l'insieme delle varietà di Γ_i $(i=1,2)$. Siccome varietà distinte di ugual tipo non sono incidenti, la partizione data da V_1 e V_2 sull'insieme V delle varietà di Γ è una sovrapartizione della partizione in tipi. Sicché, assegnata in Γ una funzione di tipo τ, $\tau(V_1)$ e $\tau(V_2)$ ripartiscono in due classi disgiunte l'insieme dei vertici di $D(\Gamma)$. Siano ora $i\in\tau(V_1)$ e $j\in\tau(V_2)$, e sia F una faccia di Γ di cotipo $\{i,j\}$ e Σ un appartamento contenente F. Siccome (tanto negli edifici che) nei complessi di Coxeter vale il fatto che tre faccie sono incluse in una stessa faccia se sono a due a due incidenti, possiamo identificare il residuo di F in Σ , così come questo è stato definito nel cap. 1, con la stella $St_\Sigma(F)$ di faccie di Σ contenenti F. In $St_\Sigma(F)$, ogni faccia di tipo $\tau(F)\cup\{i\}$ è incidente ad ogni faccia di tipo $\tau(F)\cup\{j\}$. Ed è presto visto che, affinché ciò accada, deve essere $m_{ij} = 2$.

Possiamo dunque ricondurre lo studio degli edifici riducibili a quello degli edifici irriducibili, concentrando l'attenzione su questi. A rigore, tale conclusione non è del tutto corretta, in quanto la definizione di somma diretta (debole) di edifici non permette di ricostruire univocamente le somme dirette sugli edifici 'addendi'. Per inciso, a fatti come questo (e ad altri simili) pensavo quando, alla fine del precedente capitolo, affermavo che il concetto di morfismo tra edifici abbisogna di chiarificazione. Infatti, qui, la definizione utile è quella di somma diretta debole. Mentre un minimo di familiarità con categorie suggerisce che quella 'categorialmente giusta abbia da essere semmai quella di somma diretta forte. Ad ogni modo, se ci limitiamo alla considerazione di edifici di tipo finito (cfr. sotto), queste difficoltà cadono. Su essi infatti somme dirette forti o deboli sono la stessa cosa. Ciò segue dal fatto che (come vedremo più avanti) un complesso che sostenga un edificio di tipo finito ammette un'unica strutturazione in appartamenti. Che poi la somma diretta forte di due edifici (di tipo finito) sia un edificio (di tipo finito) è pressoché ovvio.

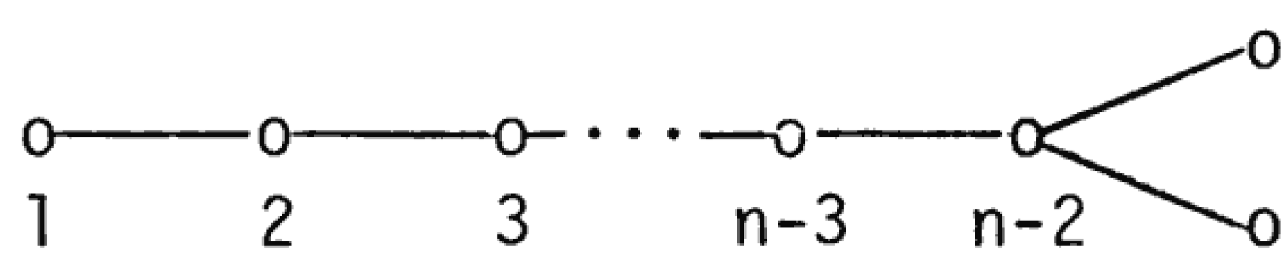
Nota - Tutto quanto fin qui detto non usa l'assunzione che gli edifici siano complessi grassi.

Un edificio si dice di *tipo finito* se il suo gruppo di Weyl è finito. Un edificio di tipo finito e irriducibile si dice di *tipo sferico*. Analoga terminologia si stabilisce su complessi di Coxeter e gruppi di Coxeter. Il termine "sferico" è motivato dal fatto che i complessi di Coxeter irriducibili finiti sono tutti producibili come tassellazioni di ipersfere. Rimando per ciò al Cap. VI di [4]. Per esempio tetraedro ed ottaedro sono gli unici complessi di Coxeter di tipo sferico di rango 3. A questi potremmo aggiungere il cubo; ma è identico all'ottaedro: basta rappresentarne le faccie come vertici ed i vertici come faccie ("faccia" è inteso qui nel senso solito, ovviamente).

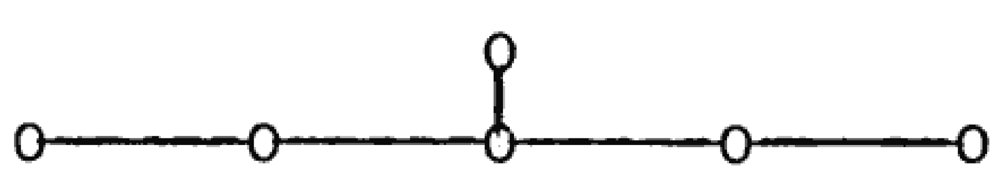
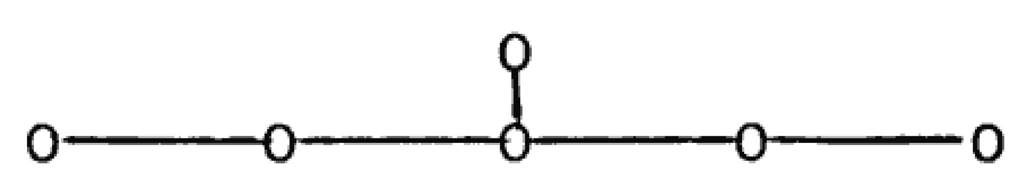
E' ben noto che i gruppi (i complessi) di Coxeter di tipo sferico sono tutti e soli quelli nei diagrammi:

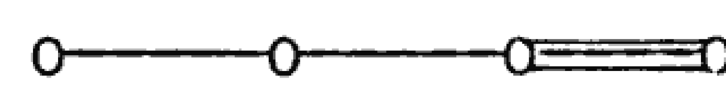
(A_n) $(n \geq 1)$ 

(C_n) $(n \geq 2)$ 

(D_n) $(n \geq 3)$ 

(F_4) 

(E_6)  (E_7) 

(E_8)  (H_3)  (H_4) 

(G^m) 

$(m \geq 3)$

Ovvio che $(G^3) = (A_2)$, $(G^4) = (C_2)$ e $(D_3) = (A_3)$. Non si usa dar senso a (G_1). Talvolta si usa (B_n) anziché (C_n), come già ho avuto occasione di ricordare in precedenza.

Di qui in poi l'assunzione che gli edifici siano complessi grassi diventa essenziale. Elenco, senza dimostrazioni, alcuni importanti risultati, dovuti per lo più a Tits.

(b.7) Non esistono edifici di diagramma (H_3) od (H_4).
(cfr. [26] , Addenda).
(b.8) Gli unici edifici finiti di diagramma (G^m) si ottengono per $m = 3,4,6,8$.

(Ciò risulta, per la parte negativa, da un noto teorema di Feit e Higman. (Cfr.[17]). Per la parte positiva: per m=3,4 è ovvia (basta considerare un piano proiettivo non degenere per m=3, e uno spazio polare grasso per m=4). Per m=6 si può considerare una BN-coppia in un gruppo di Chevalley di tipo G_2 su un campo finito. Per m=8, si consideri una BN-coppia nel gruppo di Ree ${}^2F_4$).

(b.9) *Gli edifici finiti irriducibili di rango* $\geq$ 3 *sono tutti ottenibili da BN-coppie sui gruppi semplici finiti.*

(Cfr. [26], Cap. 11).

Si dirà *rango* di una BN-coppia il rango del suo gruppo di Weyl. La BN-coppia si dirà *irriducibile* se il suo gruppo di Weyl è irriducibile.

Si ha:

(bn.5) *I gruppi finiti semplici dotati di BN-coppie irriducibili di rango* $\geq$ *3 sono gruppi di Chevalley su sistemi indecomponibili di radici o gruppi ottenuti per 'twisting' da questi.*

(Cfr. [26]). Viceversa: è ben noto che i gruppi di Chevalley su sistemi indecomponibili di radici e quelli ottenuti da questi per 'twisting' ammettono BN-coppie (si veda, per esempio, [16]).