

CAPITOLO 1
(BN-COPPIE ED EDIFICI)

ESEMPI

Do qui alcuni esempi, così da pervenire in modo naturale alla definizione di BN-coppia attraverso un esame delle proprietà rintracciabili in tali esempi. Ometterò gran parte delle dimostrazioni, salvo alcune, che sceglierò tra le più semplici, come esemplificazioni del tipo di ragionamenti che qui si impiegano. Per il resto, le dimostrazioni omesse si rifanno ad argomenti affatto generali, per i quali rimando al cap. IV di [4] e a [26]. Terminologia e definizioni verranno assestate via via, nel corso degli esempi. Ma resta inteso che devono pensarsi stabilite in generale, e non solo per gli esempi che ne hanno offerto il pretesto.

Esempio 1). - Sia V uno spazio vettoriale $n+1$ dimensionale su un campo K , e sia $G = GL_{n+1}(K)$ il gruppo delle trasformazioni lineari (invertibili) di V in sé. Sia poi V_∞ la geometria proiettiva di V .

E' noto che possono associarsi a V o a V_∞ altri gruppi notevoli: il gruppo speciale lineare $SL_{n+1}(K)$ (costituito dalle matrici a determinante 1) e i gruppi proiettivi $PGL_{n+1}(K)$ e $PSL_{n+1}(K)$, generale e speciale rispettivamente, ottenuti da $GL_{n+1}(K)$ e $SL_{n+1}(K)$ quozientando rispetto ai loro centri. Nel seguito mi riferirò per lo più al gruppo $GL_{n+1}(K)$. Ma resta inteso che l'essenziale di quanto dirò può estendersi facilmente a ciascuno degli altri tre gruppi ora elencati.

Premetto un po' di terminologia. Dovremmo denominare i sottospazi propri e non vuoti di V_∞ col termine *varietà* o *elementi* (di V_∞). Ma, almeno all'inizio, preferisco mantenere la parola *sottospazio* (intesa qui come sinonimo di varietà o elemento); ciò per non rendere l'esposizione troppo ermetica a causa di terminologie insolite. Per *punti* intendo in questo esempio i punti della geometria proiettiva V_∞ . Resta definita tra i sottospazi (o varietà, o elementi, che dir si voglia) una relazione di *incidenza*, stabilendo di dire incidenti due sottospazi quando uno dei due contenga l'altro. Una *bandiera* sarà un insieme di sottospazi a due a due incidenti, e una *camera* sarà una bandiera massimale. Ovvio che una camera

contiene esattamente n sottospazi, uno per ogni dimensione da 0 ad $n-1$. Due camere si dicono *adiacenti* se hanno esattamente $n-1$ sottospazi in comune. Date due camere C e C' , una *galleria* da C a C' è una sequenza (C_0, C_1, \dots, C_m) di camere con $C = C_0, C' = C_m$ e C_{i-1} adiacente a C_i per $i = 1, 2, \dots, m$. Il numero m è la *lunghezza* della galleria. E' poi ovvio che due qualunque camere di V_∞ sono sempre connettibili da qualche galleria. Tale circostanza, unitamente al fatto che ogni bandiera di V_∞ è sempre contenuta in qualche camera, si riassume dicendo che V_∞ definisce un *complesso di camere*. Ciò premesso, possiamo parlare della più piccola ~~tra le lunghezze di gallerie da una camera C a una camera C' , e questa sarà la~~ *distanza* di C da C' . Una galleria da C a C' sarà *minimale* se la sua lunghezza è la distanza di C da C' . Data poi una camera C e una bandiera F , una galleria da C ad una camera C' contenente F sarà detta una *galleria da C ad F* . Ovvio in che senso si parlerà di distanza di F da C , di gallerie minimali da C ad F ecc.

Osservo qui che questo apparato di definizioni richiede, per essere formulato, solo una relazione riflessiva e simmetrica, in ruolo di incidenza. L'adiacenza tra due camere può definirsi facilmente stabilendo che due camere abbiano da dirsi adiacenti quando la loro differenza simmetrica (in senso insiemistico) consta di due elementi. Il resto non presenta alcuna difficoltà. Ciò premesso, è presto visto che due camere adiacenti hanno la stessa cardinalità. Con ciò, fissata una camera C_0 e ragionando per induzione sulla distanza di una qualunque altra camera da C_0 , si vede subito che in un complesso di camere ^{le camere} tutte hanno la stessa cardinalità, che verrà detta *rango* del complesso. Nel caso di V_∞ , il rango è n , naturalmente.

Le seguenti definizioni sono invece più legate alla struttura di V_∞ . Chiamo *armatura* di V_∞ un insieme di $n+1$ punti generante per V_∞ . E, data un'armatura A , chiamo *appartamento* (sostenuto da A) la sottogeometria di V_∞ costituita dai sottospazi generati da sottoinsiemi (propri e non vuoti) di A . E' facile vedere che un'appartamento è qui null'altro che una geometria discreta su $n+1$ punti (un triangolo se $n=2$, un tetraedro se $n=3$, ecc.).

Le seguenti proprietà sono di facile verifica:

(B.1) Il complesso di camere (definito da V_∞) ha rango finito ed è *grasso*, nel senso che, data una bandiera cui manchi un elemento per essere massimale, essa appartiene ad almeno tre camere.

(B.2) Gli appartamenti sono complessi di camere *magri*, nel senso che, data in un appartamento una bandiera cui manchi un elemento per essere massimale, essa appartiene ad esattamente due camere dell'appartamento.

Più pazienza occorre per ricostruire dimostrazioni delle proprietà seguenti:

(B.3) Date due camere, esiste sempre un appartamento che le contiene entrambe.

(B.4) Data una camera C e una bandiera F e due appartamenti Σ_1 e Σ_2 contenenti sia C che F , esiste sempre un isomorfismo di Σ_1 su Σ_2 che fissa C ed F elemento per elemento.

(G) Il gruppo G (cfr. sopra) dà un gruppo di automorfismi transitivo sull'insieme delle coppie (C, Σ) ove Σ è un appartamento e C è una camera di Σ . E per ogni $g \in G$ e per ogni camera C , g fissa gli elementi di $g(C) \cap C$.

Possiamo ora dimostrare la seguente proprietà, che tornerà utile nel seguito.

(b.1) Sia Σ un appartamento, e C ed F una camera e una bandiera in Σ . Allora Σ contiene ogni galleria minimale (in V_∞) condotta da C ad F .

La dimostrazione prescinde totalmente dalle particolarità dell'esempio scelto. La riporto, ad esemplificazione del tipo di ragionamenti che qui sono consueti. Si precede per induzione sulla distanza d di F da C . Se $d = 0$ non v'è nulla da provare. Sia $d > 0$, e sia $C = C'_0, C'_1, \dots, C'_d \supseteq F$ una galleria minimale (in V_∞) da C ad F . Per la (B.3), esiste un appartamento Σ' contenente C e C'_d , e, per l'ipotesi induttiva applicata a C ed $F' = C'_d \cap C'_{d-1}$, l'appartamento Σ' contiene tutta la galleria $C'_0, C'_1, \dots, C'_{d-1}$. Per la (B.4) applicata a Σ, Σ', C ed F , l'appartamento Σ contiene una galleria $C = C_0, C_1, \dots, C_d \supseteq F$ da C ad F di lunghezza d . Se $C_d = C'_d$, l'asserto segue applicando l'ipotesi induttiva a C e alla bandiera F' . Supponiamo allora $C_d \neq C'_d$. Otterremo un assurdo. Per la (B.3), esiste un appartamento Σ'' contenente C'_1 e C_d . Per l'ipotesi induttiva applicata a C'_1 e ad

F, l'appartamento Σ'' contiene tutta la galleria C'_2, C'_3, \dots, C'_d da C'_1 ad F. E per l'ipotesi induttiva applicata a C_d ed $F'' = C \cap C_1$, l'appartamento Σ'' contiene tutta la galleria C_1, C_2, \dots, C_{d-1} da C_d ad F'' . Sicché, intanto, F ha distanza $d-1$ in Σ'' sia da C'_1 che da C_1 . Per di più, siccome C_1 è immagine di C'_1 in un isomorfismo da Σ' a Σ che fissa C, e C'_1 è adiacente a C, si ha $C \cap C'_1 = C \cap C_1 = C_1 \cap C'_1 = F''$. Applichiamo ora la (B.4) a Σ, Σ'', C_1 ed F. L'isomorfismo da Σ a Σ'' stabilito dalla (B.4), fissando C_1 , deve portare C in C'_1 , poiché fissa F'' e perché C'_1 è, oltre a C_1 , l'unica camera di Σ'' per F'' . Sicché la distanza di C da F in Σ è uguale alla distanza di C'_1 da F in Σ'' . Ma questa è $d-1$. E si ha l'assurdo.

Gli appartamenti godono di proprietà assai interessanti. Partendo qui dall'esame di quanto accade nell'esempio preso in considerazione, indicherò poi in che direzione le proprietà individuate sono suscettibili di generalizzazione. Nel nostro esempio, un appartamento è una geometria discreta su $n+1$ punti. Sicché il gruppo degli automorfismi di un appartamento è il gruppo simmetrico S_{n+1} su $n+1$ punti. Possiamo poi supporre di avere ordinato i punti che costituiscono l'armatura che sostiene l'appartamento, si da indentificarli con i numeri da 0 ad n (secondo una consueta convenzione, che consente di identificare un oggetto col suo indice). Una camera dell'appartamento, essendo una sequenza crescente di n sottoinsiemi di $\{0, 1, \dots, n\}$, è identificabile con una permutazione sui numeri $0, 1, \dots, n$. Precisamente, la permutazione p individua la camera:

$$\{p(0)\}, \{p(0), p(1)\}, \{p(0), p(1), p(2)\}, \dots$$

Con ciò, identificate camere e permutazioni, è presto visto che camere adiacenti differiscono per una trasposizione. Precisamente, se la camera individuata dalla permutazione p differisce da quella individuata dalla permutazione q solo per un insieme di k punti, allora p e q differiscono per la trasposizione $t = p \cdot (k-1, k) \cdot p^{-1}$ ($= q \cdot (k-1, k) \cdot q^{-1} = qp^{-1} = pq^{-1}$). Sia poi C_0 la camera corrispondente alla permutazione identica (ovvero: la camera fondamentale dell'appartamento relativamente all'ordinamento dato sui punti dell'armatura). Sia C una qualunque altra camera e p la permutazione associata a C. Una galleria $C_0, C_1, C_2, \dots, C_m = C$

da C_0 a C fornisce una decomposizione in trasposizioni per p . Precisamente, se t_i è la trasposizione su cui differiscono C_i e C_{i-1} (per $i=1, \dots, m$) risulta $p=t_m t_{m-1} \dots t_1$. Da ciò si ritrova il ben noto fatto che S_{n+1} è generato da trasposizioni del tipo $(k-1, k)$, per $k=1, 2, \dots, n$. Infatti, nella decomposizione ora data per p , la trasposizione t_m è del tipo $q \cdot (k-1, k) \cdot q^{-1}$, ove $q=t_{m-1} t_{m-2} \dots t_1$. E l'asserto segue per induzione sulla distanza della camera C da C_0 . Peraltro, è noto che si può dire ancor di più: posto $r_k = (k-1, k)$ le identità:

$$r_k^2 = 1 \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \quad (r_{k-1} r_k)^3 = 1 \quad \text{per } k = 2, \dots, n$$

$$(r_k r_h)^2 = 1 \quad \text{per } h, k \quad \text{tali che } |h-k| > 1$$

danno una presentazione di S_{n+1} .

Sulle bandiere dell'appartamento, ora. Ad una bandiera F possiamo associare la stella di camere che la contengono. Se poi p è la permutazione corrispondente ad una di tali camere, la stella delle camere per F corrisponde al laterale $pS_{p-1}(F)$ dello stabilizzatore $S_{p-1}(F)$ della famiglia $p^{-1}(F)$ di sottoinsiemi di $\{0, 1, \dots, n\}$. Ai sottospazi dell'appartamento corrispondono dunque in modo naturale i laterali degli stabilizzatori S^i di sottoinsiemi $\{0, 1, \dots, i-1\}$ di $\{0, 1, \dots, n\}$, per $i=1, \dots, n$. Si vede facilmente che S^i è generato dalle trasposizioni $(k-1, k)$, per $k \neq i$. L'incidenza tra due sottospazi X ed Y si traduce nel fatto che X ed Y appartengono ad una stessa camera, e cioè che i laterali corrispondenti ad X e Y abbiano qualche elemento in comune (si osservi che non resta traccia dell'inclusione tra sottospazi, intesa come relazione d'ordine, se non per il tramite degli indici i degli S^i). In definitiva: la struttura dell'appartamento è interamente individuata dal sistema dei sottogruppi S^i ed S_{n+1} , sopra definiti.

Nell'esempio scelto, un'indagine tanto pedante delle proprietà degli appartamenti può sembrare un'esercitazione gratuita, e scontata nei suoi esiti. Ma non lo è, proprio perché i suoi risultati sono generalizzabili ad altre situazioni. Per indicare cosa di ciò è generalizzabile, è necessaria un po' di terminologia.

Rammento che un *gruppo di Coxeter* di rango finito è un gruppo presentato su un insieme finito di involuzioni r_i ($i \in I$), spesso dette *riflessioni*, da identità del

tipo $(r_i, r_j)^{m_{ij}} = 1$, per $i, j \in I$; ove è, naturalmente, $m_{ij} = m_{ji} \geq 2$ e $m_{ij} = 2$. È anche consentito attribuire il valore ∞ ad alcuno degli esponenti m_{ij} . La cardinalità di I viene detta *rango* di S . Il grafo pesato (o multiplo) costruito sui vertici $i \in I$ congiungendo due vertici i, j con un lato contrassegnato dalla marca (m_{ij}) (o con $m_{ij} - 2$ lati, a seconda di quale convenzione si preferisca), si dirà *diagramma* del gruppo. Per le connessioni tra ciò e i sistemi di radici, i gruppi di riflessioni e i diagrammi di Dynkin, rimando ai capp. V e VI di [4].

Sia dato un gruppo di Coxeter S sulle riflessioni r_i ($i \in I$). Dato $J \subset I$, poniamo $S_J = \langle r_j \mid j \in J \rangle_S$. Poniamo poi $S^i = S_{I - \{i\}}$. Risulta $S_J = \bigcap_{i \notin J} S^i$ (l'inclusione $S_J \supseteq \bigcap_{i \notin J} S^i$ non è banale; cfr. [4] cap. IV, per una dimostrazione).

Possiamo definire un complesso di camere su S . Assumiamo come *varietà* i laterali dei sottogruppi del tipo S^i e stabiliamo tra essi una relazione di incidenza assumendo che due tali laterali xS^i e yS^j siano incidenti quando hanno qualche elemento in comune. Si verifica che ciò definisce un complesso di camere magro di rango $|I|$. Tale complesso sarà detto *complesso di Coxeter* (del gruppo di Coxeter S). Possiamo assegnare un *tipo* alle varietà del complesso (il tipo costituisce l'analogo di ciò che usualmente è la dimensione di un sottospazio). Precisamente, alla varietà xS^i assegnamo l'indice i come tipo. Nel seguito diremo spesso 'naturali' i tipi così definiti. Ciò premesso, il diagramma del gruppo di Coxeter assume sul complesso di Coxeter un chiaro significato geometrico. Sia infatti data una bandiera F cui manchino solo le varietà di tipo i e j per essere massimale, e consideriamo il *residuo* di F , ovvero l'insieme delle varietà di tipo i o j che sono incidenti a (tutte le varietà di) F . Congiungiamo poi due varietà nel residuo di F con un trattino quando siano incidenti. Otteniamo un poligono ordinario con $2m_{ij}$ lati (una catena infinita se $m_{ij} = \infty$). Infatti, una varietà di tipo i (di tipo j) incidente ad F determina, unitamente ad F , un laterale del sottogruppo $\langle r_j \rangle_S$ di S (del sottogruppo $\langle r_i \rangle_S$ di S), contenuto nel laterale del sottogruppo $\langle r_i, r_j \rangle_S$ corrispondente ad F . Non c'è perdita di generalità nell'assumere che il laterale individuato da F sia proprio il sottogruppo $\langle r_i, r_j \rangle_S$. Possiamo così riferirci ai laterali di $\langle r_j \rangle_S$ e $\langle r_i \rangle_S$ in $\langle r_i, r_j \rangle_S$. Ed il risultato ora

segue da una verifica diretta. E' ora presto visto che possiamo anche assumere, nel residuo di F , le varietà di tipo i in ruolo di vertici (o di lati) e quelle di tipo j in ruolo di lati (o di vertici), traducendo l'incidenza tra tali varietà nella usuale incidenza vertice-lato. Ed il residuo di F appare allora come un poligono ordinario di m_{ij} lati (un m_{ij} -gono ordinario).

In conclusione: il complesso di Coxeter individua il diagramma del gruppo da cui proviene; sicché individua il gruppo stesso. E' dunque lecito parlare *del gruppo di Coxeter di un complesso di Coxeter, del diagramma di un complesso di Coxeter*, oltre che *del complesso di Coxeter e del gruppo di Coxeter associati ad un dato diagramma* (brevemente: *in un dato diagramma*). Il gruppo di Coxeter di un complesso di Coxeter può anzi essere caratterizzato come il gruppo degli automorfismi *speciali* del complesso di Coxeter (ove "speciali" intende "che conservano i tipi"). La cosa è pressoché immediata. Il gruppo di Coxeter di un complesso di Coxeter è per l'appunto un gruppo di automorfismi speciali per il complesso, regolare sull'insieme delle camere del complesso. Infatti le camere, essendo i laterali del sottogruppo identico $1 = S_{\emptyset} = \bigcap_{i \in I} S_i^i$, sono gli elementi del gruppo, e l'azione del gruppo sulle camere è null'altro che la rappresentazione Cayleyana del gruppo su sé stesso. D'altra parte, siccome un complesso di Coxeter è magro, e una camera prende esattamente una varietà per ogni tipo, se un automorfismo speciale fissa una camera, allora esso fissa tutte le camere a questa adiacenti. Quindi, poiché un complesso di Coxeter è un complesso di camere, di adiacenza in adiacenza tale automorfismo fissa tutte le camere. Ed allora esso è l'identità, essendo speciale. In definitiva, un gruppo di automorfismi speciali di un complesso di Coxeter transitivo sull'insieme delle camere è di necessità il gruppo totale degli automorfismi speciali del complesso. E l'asserto è provato.

Nota -Per una caratterizzazione puramente geometrica dei complessi di Coxeter, rimando al cap. II di [26]; oppure, all'Appendice, in queste note.

Torniamo al nostro esempio. Sappiamo che S_{n+1} è il gruppo di Coxeter nel diagramma:



Quanto si è visto circa gli appartamenti di V_∞ si può ora riassumere dicendo semplicemente che essi sono complessi di Coxeter di S_{n+1} . In generale, anzi, dalle (B.1)-(B.4) si può dedurre:

(b.2) Gli appartamenti sono complessi di Coxeter.

Per una dimostrazione rimando al cap. III di [4]. Qui mi limito ad osservare che la dimostrazione fa uso essenziale dell'ipotesi che la struttura sia grassa, stabilita nella (B.1)).

E' poi quasi immediato che le (B.3) e (B.4) implicano:

(b.3) Gli appartamenti sono a due a due isomorfi.

Infatti, dati due appartamenti Σ e Σ' , si scelgano due camere C e C' , in Σ e Σ' rispettivamente. Per la (B.3), esiste un appartamento Σ'' che contiene C e C' . Ora basta applicare la (B.4) prima a Σ, Σ'', C e C e poi a Σ'', Σ', C' e C' .

Sicché possiamo parlare *del* gruppo di Coxeter e *del* diagramma (degli appartamenti) di una struttura che verifichi le condizioni (B.1)-(B.4). Il gruppo di Coxeter (degli appartamenti) di una tale struttura è spesso detto *gruppo di Weyl* (della struttura). Sicché: S_{n+1} è il gruppo di Weyl di V_∞ .

Passo ora a mostrare come la struttura evidenziata in V_∞ si riflette nella struttura del gruppo $G=GL_{n+1}(K)$ (e dei gruppi $SL_{n+1}, PGL_{n+1}(K), PSL_{n+1}(K)$).

Fissiamo in V_∞ un appartamento Σ_0 e una camera C_0 in Σ_0 , cui assegnamo i nomi di *appartamento fondamentale* e *camera fondamentale*, rispettivamente. Possiamo sempre supporre di avere scelto la base $\{e_0, \dots, e_1, \dots, e_n\}$ di V in modo che i sottospazi $\langle e_0 \rangle, \langle e_1 \rangle, \dots, \langle e_n \rangle$ diano l'armatura che sostiene Σ_0 , e che l'ordine in cui prendiamo i vettori e_0, e_1, \dots, e_n sia tale che la camera fondamentale sia la famiglia di sottospazi:

$$\langle e_0 \rangle, \langle e_0, e_1 \rangle, \langle e_0, e_1, e_2 \rangle, \dots, \langle e_0, e_1, \dots, e_{n-1} \rangle .$$

Indichiamo con B lo stabilizzatore in G di C_0 e con N lo stabilizzatore in G di Σ_0 . Il sottogruppo B viene spesso detto *Boreliano fondamentale*.



Negli esempi che stiamo trattando, è facile dare una descrizione matriciale di B ed N. Sia $T = B \cap N$. Risulta:

1) Sia $G = GL_{n+1}(K)$. Allora B è il gruppo delle matrici superiormente triangolari, ed N è il prodotto semidiretto del gruppo T, costituito qui dalle matrici diagonali (ovvero: matrici che portano valori non nulli solo sulla diagonale), per il gruppo delle matrici permutazionali (ovvero: individuate da permutazioni sui vettori della base). Risulta dunque $N/T \cong S_{n+1}$. A sua volta, B si spezza nel prodotto semidiretto del gruppo U delle matrici unipotenti (ovvero: superiormente triangolari e che portano sulla diagonale solo valori uguali ad 1), per T.

2) Sia $G = PGL_{n+1}(K)$. Basta quozientare sul centro di $GL_{n+1}(K)$, naturalmente. Ma possiamo dire di più. Sia \bar{T} il gruppo delle matrici diagonali che portano 1 sull'ultima posizione. Allora B è identificabile col prodotto semidiretto di U (vedi sopra) e di \bar{T} , ed N è identificabile col prodotto semidiretto di \bar{T} e di S_{n+1} . Di nuovo: $S_{n+1} \cong N/T$.

3) Sia $G = SL_{n+1}(K)$. Come nel primo caso, B è prodotto normale di U e di T, ove U è il gruppo delle matrici unipotenti e T è, qui, il gruppo delle matrici diagonali a determinante 1. Per ogni permutazione p sui vettori della base, sia t_p la matrice individuata da p. Associamo a p la matrice $t'_p = t_p$ se p è pari, e la matrice $t'_p = \bar{t}t_p$ se p è dispari, ove \bar{t} è una matrice diagonale di determinante -1. Otteniamo così un sistema di rappresentanti per gli elementi di N/T. E si ha, ancora, $N/T \cong S_{n+1}$.

4) $G = PSL_{n+1}(K)$. In questo caso B è isomorfo al prodotto normale di U e di T e T è isomorfo al prodotto di n copie del gruppo moltiplicativo K^* di K, una delle quali quozientata sul gruppo moltiplicativo delle radici (n+1)-esime di 1. Risulta poi $N/T \cong S_{n+1}$, poiché analogo isomorfismo vale nel caso $G = SL_{n+1}(K)$.

Il sottogruppo $T = B \cap N$ riceve il nome di *toro fondamentale*. Negli esempi ora esaminati è sempre:

(BN.1)

$$T \triangleleft N.$$

Di fatto ciò segue solo dalla (B.2) e dalla seconda parte della (G). Infatti la seconda parte della (G) e il fatto che gli appartamenti sono magri implica che se un elemento g di G fissa una camera C e un appartamento Σ che contiene C , allora fissa ogni camera di Σ che sia adiacente a C . Sicché, siccome gli appartamenti sono complessi di camere, g deve fissare ogni camera di Σ . Quindi induce l'identità su Σ , per la seconda parte della (G). Ne segue che T induce l'identità su Σ_0 . E la normalità di T in N segue.

Il quoziente $W = N/T$ viene detto *gruppo di Weyl* della coppia di sottogruppi B ed N . Anche l'isomorfismo $W \cong S_{n+1}$, rilevato negli esempi precedenti, discende da considerazioni del tutto generali. Si è visto infatti che gli appartamenti sono complessi di Coxeter (cfr. (b.2), sopra). La seconda parte della (G) garantisce poi che W definisce un gruppo di automorfismi speciali di Σ_0 (vedi Appendice). Per di più, la prima parte della (G) assicura la transitività di N sull'insieme delle camere di Σ_0 . Pertanto W è un gruppo di automorfismi speciali del complesso di Coxeter Σ_0 , transitivo sull'insieme delle camere di Σ_0 . Sicché, per quanto visto in precedenza:

(bn.1) W è un gruppo di Coxeter (anzi: è il gruppo di Coxeter degli appartamenti).

Dalla (B.3) e dalla prima parte della (G) si ricava poi:

$$(BN.2) \quad \langle B, N \rangle = G.$$

Si prova anzi di più. Precisamente che:

$$(bn.2) \text{ (Decomposizione di Bruhat)}. \text{ Risulta } G = \bigcup_{w \in W} BwB$$

(ovvio il senso di scritture quali BwB, wB, Bw, wBw', \dots con $w, w' \in W$).

Infatti sia $g \in G$. Per la (B.3), esiste un appartamento Σ che contiene le camere C_0 e $g(C_0)$, e per la (G), esiste un $b \in G$ che porta Σ su Σ_0 e fissa C_0 (e pertanto $b \in B$). Sempre per la (G), esiste un $n \in G$ che porta $b(g(C_0))$ in C_0 e fissa Σ_0 (e pertanto $n \in N$). Infine, nbg fissa C_0 . Sicché $nbg \in B$. E l'asserto è provato.

La seguente proprietà, benché in apparenza poco espressiva, risulta a postero-

ri assai importante. Segue anch'essa da considerazioni generali.

(BN.3) (come si è visto) W è generato da un insieme finito R di involuzioni.

Per ogni $r \in R$ e per ogni $w \in W$ risulta:

(BN.3.a) $w Br \subset BwB \cup Bwr B$

(BN.3.b) $r Br \neq B$.

Cominciamo col provare la (BN.3.b). La dimostrazione sfrutta in modo essenziale il fatto che operiamo su strutture grasse (cfr. (B.1)). Intanto, $r Br$ è lo stabilizzatore della camera $r(C_0)$, perché r è un'involuzione in W . $r(C_0)$ è adiacente a C_0 in Σ_0 (si rammenti che W è il gruppo di Coxeter del complesso Σ_0 , e che r è una riflessione in W). Sia $F = C_0 \cap r(C_0)$. Per la (B.1) esiste una terza camera C per F . Per la (B.3) esiste un appartamento Σ contenente C_0 e C , e, per la (B.2), Σ non contiene $r(C_0)$. Per la (G), esiste $b \in B$ che porta Σ_0 su Σ . Sicché b sposta $r(C_0)$, poiché Σ non contiene $r(C_0)$. Pertanto B non stabilizza $r(C_0)$. Sicché $r Br \neq B$.

Proviamo ora la (BN.3.a). Sia $b \in B$, e sia $F = C_0 \cap r(C_0)$. Per la seconda parte della (G), la camera $br(C_0)$ contiene F , ed è, ovviamente, $br(C_0) \neq C_0$. Sia \bar{r} un rappresentante di r e \bar{w} un rappresentante di w in W . Se risulta $r(C_0) = br(C_0)$, è $\bar{r}^{-1} b \bar{r} \in B$, e pertanto $\bar{w} \bar{r} \bar{w} \in B$. Sicché $\bar{w} \bar{r}$ e $\bar{w} \bar{r} B$. E in questo caso siamo a posto. Sia allora $br(C_0) \neq r(C_0)$. Allora $w(C_0)$, $wr(C_0)$ e $\bar{w}br(C_0)$ sono tre camere distinte passanti per $w(F)$. Sia $C_0, C_1, \dots, C_m \supseteq w(F)$ una galleria minimale da C_0 a $w(F)$. Tale galleria è interamente contenuta in Σ_0 , per la (b.1) (dimostrata in precedenza). Sia poi Σ un appartamento contenente C_0 e $\bar{w}br(C_0)$ (un tale Σ esiste per (B.3)). Sempre per la (B.1), Σ contiene tutta la galleria C_0, C_1, \dots, C_m . Sicché, tanto in Σ che in Σ_0 , C_1 è l'unica camera adiacente a C_0 su $C_0 \cap C_1, C_2$ è l'unica camera adiacente a C_1 su $C_1 \cap C_2$ ecc. (si rammenti che, per (B.2), gli appartamenti Σ e Σ_0 sono magri). Ora, esiste per (G) un $b' \in B$ che porta Σ su Σ_0 . E, per la seconda parte della (G), b' fissa ogni elemento di C_0 . Sicché fissa $C_0 \cap C_1$. E pertanto fissa anche C_1 , per quanto sopra detto. Iterando il procedimen

to, si ha infine che b' fissa C_m , e pertanto fissa F (sempre per la seconda parte della (G)). Allora b' porta $\bar{w}br(C_0)$ in una delle due camere $w(C_0)$ e $wr(C_0)$ di Σ_0 che passano per F . Se b' porta $\bar{w}br(C_0)$ in $w(C_0)$, risulta $\bar{w}^{-1}b'\bar{w}b\bar{r}eB$. Da cui $\bar{w}b\bar{r}eBwB$. Se b' porta $\bar{w}br$ in $wr(C_0)$ risulta invece $\bar{w}b\bar{r}eBwrB$. La (B.3.a) è infine provata.

Le condizioni fin qui elencate sulla coppia di sottogruppi B ed N non sono indipendenti. Precisamente: le (BN.1), (BN.2) e (BN.3) bastano per ricavare le (bn.1) e (bn.2).

Che da (BN.1), (BN.2) e (BN.3.a) si possa ricavare la (bn.2) è presto visto. Meno facile è dimostrare che le (BN.1)-(BN.3) bastano per ottenere la (bn.1). Rimando al Cap. IV di [4] per una dimostrazione. Qui mi limito ad osservare che nel ricavare la (bn.1) è essenziale il ruolo della (BN.3.b). Del resto, la (BN.3.b) appare come la contropartita diretta dall'assunzione, fatta nella (B.1), di operare su strutture grasse. E tale assunzione è essenziale nel ricavare la (b.2) delle (B.1)-(B.4). E la (b.2) è appunto il corrispettivo geometrico della (bn.1). Non è inopportuno a questo proposito insistere sulla potenza della (B.1); la (B.1) permette, per esempio, di sostituire la (G) con una versione a priori più debole:

(G. bis) Per ogni camera C , lo stabilizzatore B_C in G della camera C opera transitivamente sull'insieme degli appartamenti contenenti C , e fissa ogni elemento di C .

Dalla (G.bis), usando la (B.1), è possibile ricavare la (G). Cominciamo col provare che lo stabilizzatore N_Σ di un appartamento Σ opera transitivamente sull'insieme delle camere di Σ .

Siano C e C' camere adiacenti in Σ , e sia C'' una terza camera per $C \cap C'$ (C'' esiste per la (B.1)). Siano Σ' e Σ'' due appartamenti, uno contenente C e C'' e l'altro contenente C'' e C' . Per la (G.bis) esiste $b \in B_C$ che porta Σ su Σ' , esiste $b' \in B_{C''}$ che porta Σ' su Σ'' e $b'' \in B_{C'}$ che porta Σ'' su Σ . Allora $b''b'b \in N$ e porta C su C' . E la transitività di N_Σ sull'insieme delle camere di Σ segue ora dal fatto che Σ è un complesso di camere. Siano ora Σ_1 e Σ_2 due

camere, in Σ_1 e Σ_2 rispettivamente; sia Σ un appartamento contenente C_1 e C_2 . Esiste $b_1 \in B_{C_1}$ che porta Σ_1 in Σ , $n \in N_\Sigma$ che porta C_1 in C_2 e $b_2 \in B_{C_2}$ che porta Σ in Σ_2 . L'elemento $b_2 n b_1$ di G porta allora C_1 in C_2 e Σ_1 in Σ_2 . La (G) è così dimostrata.

Passiamo ora a ricostruire all'interno di G la struttura di V_∞ . Avverto ancora una volta che la costruzione è però affatto generale. Premetto un po' di definizioni. Rammento che ho indicato con R l'insieme delle riflessioni di W . In obbedienza alle convenzioni precedentemente stabilite per i gruppi di Coxeter, dato $J \subseteq R$ poniamo $W_J = \langle r_j \mid j \in J \rangle_W$ e dato $r \in R$ poniamo $W^r = W_{R-\{r\}}$. È previsto (usando la (BN.3.a)) che gli insiemi del tipo $BW_J B$ sono sottogruppi di G (contenenti B , naturalmente). Si prova anzi che:

(bn.3) I sottogruppi H di G contenenti B sono quelli rappresentabili nella forma $BW_J B$ per qualche $J \subseteq R$ (in tal caso è $W_J = (H \cap N)/T$).

(La dimostrazione sfrutta solo le (BN.1)-(BN.3), ma non è affatto banale. Rimando per essa al Cap. IV di [4]). Chiameremo *parabolici fondamentali* i sottogruppi (propri) di G contenenti B . È ovvio che i parabolici fondamentali massimali sono i sottogruppi del tipo $BW^r B$. Chiamiamo poi *boreliani* i coniugati di B e *parabolici* i sottogruppi propri di G contenenti boreliani (ovvero: i coniugati dei parabolici fondamentali). Poiché G è transitivo sull'insieme delle camere, i boreliani (ovvero: parabolici minimali) sono gli stabilizzatori delle camere.

La ricostruzione della struttura geometrica di partenza (V_∞ nel nostro esempio) dalla struttura di G (suggerisco di tenere presente $GL_{n+1}(K)$ quando si voglia trovare riscontri in fatti familiari per quanto dirò nel seguito) poggia in modo essenziale sulla seguente proprietà, deducibile in via affatto generale:

(g.1) Bandiere distinte hanno in G stabilizzatori distinti.

Siano infatti F ed F' bandiere distinte, e supponiamo, per assurdo, che lo stabilizzatore P_F di F in G sia uguale allo stabilizzatore $P_{F'}$ di F' in G . Indicato con B_C lo stabilizzatore in G di una camera C , si ha $P_F \supseteq \langle B_C \mid C \supseteq F \rangle_G$

e $P_{F'} \supseteq \langle B_C, C' \supseteq F' \rangle_G$. Siccome poi $F \neq F'$, posso sempre trovare una camera che contenga una delle due bandiere ma non l'altra. Infatti, se F non è incidente ad F' , ogni camera contenente F non contiene F' . Se F ed F' sono incidenti, ciò significa che $F \cup F'$ è una bandiera. Ma siccome $F \neq F'$, $(F-F') \cup (F'-F) \neq \emptyset$. Poniamo sia $a \in F-F'$. Sia \bar{C} una camera contenente $F \cup F'$. Per la (B.2), esiste una camera C adiacente a \bar{C} sulla bandiera $\bar{C}-\{a\}$. E $C \neq F'$. Possiamo sempre supporre dunque di avere trovato una camera C tale che $F \subseteq C \neq F'$. Per la (B.3), esiste un appartamento Σ contenente C ed F' . Per la (b.1), Σ contiene ogni galleria minimale da C ad F' . Sia ora $b \in B_C$. Siccome $B_C \subseteq P_F = P_{F'}$, b stabilizza F' . Sicché, se $C = C_0, C_1, \dots, C_m \supseteq F'$ è una galleria minimale da C ad F' , la galleria $C = b(C_0), b(C_1), \dots, b(C_m) \supseteq b(F') = F'$ è minimale da C ad F' . Sicché, per quanto detto sopra, entrambe queste gallerie sono contenute in Σ . Ma b , fissando C , fissa anche la bandiera $C \cap C_1$, per la seconda parte della (G). Sicché $b(C_1) = C_1$, perché Σ è magro. Ne segue che B_C fissa C_1 . Possiamo ora assumere C in ruolo di camera fondamentale e Σ in ruolo di appartamento fondamentale. E contraddiciamo così la (BN.3.b).

Nota - La dimostrazione ora data per la (g.1) dipende visibilmente dalla (BN.3.b), e quindi dalla (B.1). Sicché la possibilità di ricostruire nel gruppo la struttura geometrica di partenza dipende in modo essenziale dalla (B.1). Torneremo su ciò più oltre.

Si ha poi:

(g.2) Gli stabilizzatori dei sottospazi sono i parabolici massimali.

Anche ciò segue solo dalle (B.1)-(B.4) e dalla (G). Intanto, ogni sottospazio è immagine mediante qualche elemento di G di un opportuno sottospazio nella camera fondamentale C_0 . Detti *sottospazi fondamentali* gli elementi di C_0 , possiamo dunque limitarci a verificare che gli stabilizzatori dei sottospazi fondamentali sono i parabolici fondamentali massimali. Ora, C_0 si identifica con l'identità di W (si confronti quanto detto in precedenza su complessi di Coxeter e gruppi di Coxeter), e i sottospazi fondamentali si identificano coi sottogruppi W^r di W .

sono incidenti. Infatti, poniamo per assurdo che $X \notin C$. Lo stabilizzatore B_C di C stabilizza però X , perché $B_C \subseteq P_X$. Ed ora, ripetendo passo passo il ragionamento svolto per provare la (g.1), si ha l'assurdo.

Nota - Anche la dimostrazione della (g.3), procedendo sulla falsariga di quella costruita per la (g.1), usa in modo essenziale la (B.1).

E' dunque possibile ricostruire la struttura geometrica di partenza sul sistema dei parabolici individuati dalla coppia (B,N) . I sottospazi diventano i parabolici massimali, e l'incidenza tra sottospazi si traduce nel requisito che due parabolici massimali si intersechino su un parabolico.

Per completezza, indico qui anche il corrispettivo degli appartamenti. Il corrispettivo dell'appartamento fondamentale Σ_0 è ovviamente il sistema di parabolici $P_{\Sigma_0} = \{ w B W^r B w^{-1} \mid w \in W, r \in R \}$. Nell'esempio che si è scelto, anzi, il sistema $\{ w B W^{r_0} B w^{-1} \mid w \in W \}$ è il corrispettivo dell'armatura fondamentale, sostegno dell'appartamento fondamentale. Siccome poi, per la (G) , ogni appartamento Σ è trasformato di Σ_0 mediante un opportuno $g \in G$, il corrispettivo di Σ sarà il sistema $P_\Sigma = g P_{\Sigma_0} g^{-1} = \{ g w B W^r B w^{-1} g^{-1} \mid w \in W, r \in R \}$.

Esempio 2) - Spazi polari e gruppi ortogonali.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione m su un campo K di caratteristica $\neq 2$, e ϕ una forma bilineare non degenera e simmetrica su V (molto di quanto dirò vale anche se su ϕ si assumono ipotesi più deboli di queste. Rimando ai cap. VII, VIII e IX di [26] per ogni informazione al riguardo). Due vettori x, y di V sono detti *ortogonali* (in ϕ); o anche ϕ -*allineati* (o, semplicemente, *allineati*, ove non sorgano equivoci), se risulta $\phi(x, y) = 0$. Nel qual caso si usa scrivere $x \perp_\phi y$ o, semplicemente, $x \perp y$. Due sottospazi X, Y di V sono detti *ortogonali* (e si scrive $X \perp_\phi Y$, o $X \perp Y$) se è $x \perp_\phi y$ per ogni $x \in X$ e $y \in Y$. Un sottospazio di V è detto *totalmente isotropo* (per ϕ) se è ortogonale a sé stesso. E' noto che i sottospazi totalmente isotropi massimali hanno una stessa dimensione n , detta *indice di Witt* (della forma ϕ).

E W^r dà anche la stella di camere in Σ_0 contenenti il sottospazio X^r corrispondente a W^r . Sia ora $w \in W^r$ e $b, b' \in B$. Ovvio che $b'(X^r) = b(X^r) = X^r$, perché b e b' , fissando C_0 , ne fissano tutti gli elementi. Inoltre w porta W^r in sé, sicché muta in sé la stella di camere di Σ_0 uscenti da X^r . Pertanto $w(X^r) = X^r$. Sicché BW^rB stabilizza X^r . Del resto, lo stabilizzatore di X^r contiene B , ed è pertanto o un parabolico o tutto G . Ma è immediatamente visto che lo stabilizzatore di X^r non può essere G . Sicché è un parabolico, e contenendo il parabolico massimale BW^rB , deve coincidere con questo.

La scelta che si è effettuata nel nostro esempio per la camera fondamentale permette di scegliere un sistema di indici per le riflessioni r di W che faccia coincidere l'indice di r con la dimensione dei sottospazi stabilizzati da parabolici del tipo BW^rB . Allo scopo basta fare variare l'indice i da 0 ad $n-1$, ed identificare la riflessione r_i con la matrice individuata dalla trasposizione (e_i, e_{i+1}) dei vettori della base. Lo stabilizzatore di $\langle e_0, \dots, e_i \rangle$ è allora $BW^{r_i}B$. Il resto è facile. Ma gli argomenti che si usano nel mostrare questi fatti sono, nell'essenziale, assai più generali di quanto a prima vista non appaia. È possibile infatti ripartire in *tipi* (nel nostro esempio: dimensioni), coerentemente con la ripartizione in tipi vigente in ogni appartamento in virtù del fatto che questo è un complesso di Coxeter, tutte le varietà, solo usando le (B.1)-(B.4). Tornerò in seguito su ciò. Si tratta di cose per ora di secondaria importanza, ma destinate ad acquistare maggior rilievo più avanti.

(g.3) Due sottospazi sono incidenti se e solo se i loro stabilizzatori si intersecano su un parabolico.

Proviamo il se. Se due sottospazi X e X' sono incidenti, c'è una camera C contenente X e X' . Lo stabilizzatore B_C di C è allora contenuto sia nello stabilizzatore P_X di X che nello stabilizzatore $P_{X'}$ di X' . Sicché $P_X \cap P_{X'}$, contiene il boreliano B_C , e, pertanto, è un parabolico. Viceversa, sia $P_X \cap P_{X'}$ parabolico. C'è allora un boreliano \bar{B} incluso in P_X e $P_{X'}$. Ma ogni boreliano è lo stabilizzatore di una camera. Sia dunque C la camera stabilizzata da \bar{B} (C è individuata da \bar{B} , per la (g.1)). Si ha che $C \supseteq X, X'$; sicché X e X'

Nota - E' facile mostrare che, se il campo K è algebricamente chiuso, allora $2n+1 = m$ se m è dispari e $2n = m$ se m è pari. (Sicché $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ è il massimo valore possibile per m o in ogni caso). Per un controesempio, nel caso che K non sia algebricamente chiuso, basta porre $K = \mathbb{R}$, campo dei reali, e $V = \mathbb{R}^2$, e supporre che ϕ sia l'usuale prodotto scalare. L'indice di Witt di ϕ è allora 0.

Supponiamo di qui in poi che sia $n \geq 2$. Sia ora \mathcal{L}_ϕ il sistema dei sottospazi totalmente isotropi per ϕ , non nulli. Diciamo *codimensione* di un sottospazio X in \mathcal{L}_ϕ la differenza tra n (indice di Witt) e la dimensione di X (in quanto sottospazio di V). Chiamiamo poi *punti* i sottospazi in \mathcal{L}_ϕ di dimensione 1 (in V), e usiamo per di più il termine *sottospazio* per designare solo i sottospazi di V in \mathcal{L}_ϕ , omettendo di qui in poi la specificazione "totalmente isotropo". Basta un po' di pazienza per verificare che valgono su \mathcal{L}_ϕ le seguenti proprietà:

- (P.1) I sottospazi massimali, assieme ai sottospazi in essi inclusi, costituiscono spazi proiettivi di dimensione $n-1$.
- (P.2) Dato un sottospazio massimale X e un punto x fuori di esso, esiste un unico sottospazio massimale Y contenente x e intersecante X su un sottospazio di codimensione 1.
- (P.3) Esistono almeno due sottospazi massimali disgiunti.
- (P.4) L'intersezione di due sottospazi è un sottospazio.

Una qualunque struttura di punti e sottospazi verificante gli assiomi (P.1)-(P.4) viene detta *spazio polare* di rango n (nella (P.1), si concede però la possibilità di geometrie proiettive degeneri). La denominazione è motivata dal fatto che spesso la relazione di ortogonalità \perp_ϕ è detta *polarità*. Altre volte si designa col termine di polarità l'applicazione che ad $x \in V$ associa il sottospazio $\langle x \rangle$ di V costituito dai vettori ortogonali ad x , o l'applicazione indotta da questa sulla geometria proiettiva V_∞ di V . Essenzialmente, è lo stesso.

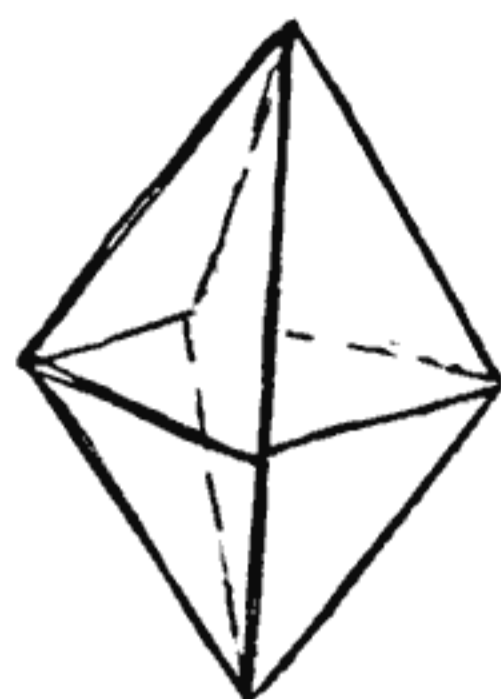
La *dimensione* di un sottospazio in uno spazio polare sarà la sua dimensione in

quanto geometria proiettiva (cfr. proprietà (P.1)), e la sua *codimensione* sarà allora la differenza tra $n-1$ e la sua dimensione. Due sottospazi di uno spazio polare si dicono poi *collineari* (o *allineati* o, anche, *ortogonali*) se esiste un sottospazio che li contenga entrambi. Le seguenti proprietà sono conseguenza delle (P.1)-(P.4) (rimando al cap. VII di [26] per una dimostrazione):

- (p.1) Dato un sottospazio massimale X ed un sottospazio Y disgiunto da X , di dimensione d , esiste un unico sottospazio di X di codimensione d ed allineato con Y . Indichiamo tale sottospazio con $p_X(Y)$.
- (p.2) Dato un sottospazio massimale, c'è sempre un altro sottospazio massimale da esso disgiunto.

Vediamo ora come in uno spazio polare possa definirsi una struttura di complesso di camere e appartamenti, simile a quella rintracciata in V_∞ nell'esempio precedente. Come prima, assumiamo i sottospazi come varietà, e definiamo tra essi un'incidenza mediante l'inclusione. Possiamo allora parlare di bandiere, camere, gallerie ecc. Ed è presto visto che lo spazio polare resta strutturato come un complesso di camere; non è però necessariamente grasso. Restano da scoprire gli appartamenti. Allo scopo, scelto un sottospazio massimale X , sia e_1, \dots, e_n un sistema di punti di X , generante per X . Sia poi Y uno spazio massimale disgiunto da X (un tale Y esiste per la (p.2)). Per ogni $i = 1, \dots, n$, poniamo $X_i = \langle e_j \mid j \neq i \rangle_X$, e sia $\bar{e}_i = p_Y(X_i)$ (cfr.(p.1)). L'insieme dei punti $e_1, \dots, e_n, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$, unitamente alla biezione che associa \bar{e}_i ad e_i (che sia una biezione è presto visto), costituisce ciò che chiameremo un'*armatura*. Un'appartamento sarà la sottogeometria dello spazio polare costituita dai sottospazi dello spazio polare generati da insiemi di punti nell'armatura. Dato il rango n di uno spazio polare, è individuata la struttura dei suoi appartamenti. Essi sono infatti tutti isomorfi al seguente spazio polare, '*discreto*'. Si scelga un insieme A di $2n$ oggetti, e si definisca su A una permutazione involutoria p senza punti fissi. Un sottoinsieme non vuoto X di A sarà poi detto *p-compatibile* se $X \cap p(X) = \emptyset$. Il sistema dei sottoinsiemi *p-compatibili* di A fornisce lo spazio polare (*discreto*) che volevamo. Nel caso $n=2$ è dato dai vertici e dai lati di un quadrangolo

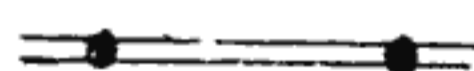
ordinario. Nel caso di $n=3$, dai vertici, dai lati e dalle faccie dell'ottaedro



E' ora quasi immediato controllare che uno spazio polare, strutturato in appartamenti come ho detto ora, verifica le proprietà (B.2)-(B.4) rinvenute nel precedente esempio. Non vale necessariamente la (B.1). Peraltro, esistono spazi polari che soddisfano anche la (B.1), e ciò qualunque valore si assegni al rango n . Siccome la struttura degli appartamenti è individuata dal rango, la proprietà (b.2), rammentata nell'esempio precedente, porta subito che:

(p.3) Gli appartamenti di uno spazio polare sono complessi di Coxeter.

Si assegni come *tipo* ad un sottospazio la sua dimensione. Conveniamo poi di chiamare *tipo* di una bandiera F l'insieme dei tipi dei suoi elementi, e *cotipo* di F l'insieme dei tipi che non rientrano nel tipo di F . Usiamo poi la convenzione, già introdotta in precedenza per i complessi di Coxeter, di rappresentare le incidenze tra varietà di due tipi assegnati rappresentando le varietà di un tipo come vertici, quelle dell'altro come lati, e raffigurando l'incidenza come un'usuale incidenza vertice-lato. Chiamiamo *digono* il poligono degenerere:

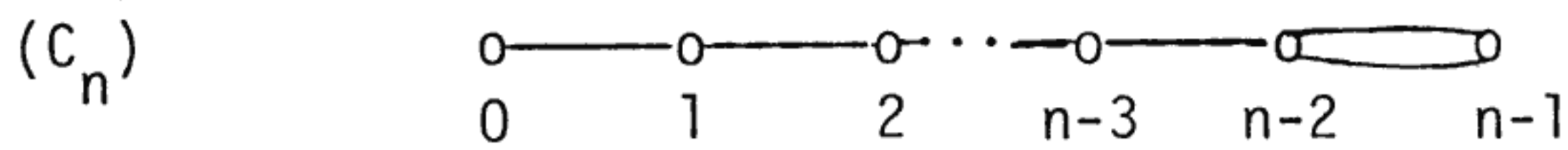


Per completare la terminologia, chiamiamo *residuo* di una bandiera F il sistema delle varietà incidenti ad F ma non appartenenti ad F , munito della relazione di incidenza. Naturalmente, il residuo di una bandiera F è immediatamente strutturato in bandiere. Sotto questo aspetto, è isomorfo alla *stella* di bandiere contenenti F .

E' ora presto visto che, data in uno spazio polare discreto di rango n una bandiera F di cotipo $\{i, j\}$ ($0 \leq i < j < n$), il residuo di F è un digono se $j-i > 1$,

è un triangolo se $n-1 > j$ e $j-i = 1$, ed è un quadrato se $j = n-1$ e $i = n-2$. Sicché, per quanto detto in precedenza a proposito dei complessi di Coxeter, si ha:

(p.4) Lo spazio polare discreto di rango n (è il complesso di Coxeter che) appartiene al diagramma:



(ovvio come diviene tale diagramma per $n=1$ o 2 . Noto poi che al posto della sigla (C_n) è usata altrettanto frequentemente la (B_n) . Le due sigle hanno, sì, sensi diversi, ma solo in riferimento alle lunghezze delle radici in un sistema di radici. E ciò qui non interessa). Il gruppo di Coxeter dello spazio polare discreto di rango n è dunque presentato su involuzioni $s_1 \dots s_n$ dalle identità:

$$(s_i s_j)^2 = 1 \quad \text{per } |i - j| > 1 \quad (s_i s_{i+1})^3 = 1 \quad \text{per } i=1, \dots, n-2$$

$$(s_{n-2} s_{n-1})^4 = 1.$$

Non è difficile indicare in concreto come scegliere le riflessioni s_1, \dots, s_n . Possiamo sempre identificare i punti dello spazio polare discreto di rango n coi numeri da 1 a $2n$ ($2n$ incluso), e supporre che la permutazione involutoria che definisce lo spazio polare porti x in $x+n$ (le somme essendo calcolate modulo $2n$, e scrivendo $2n$ anziché 0). Allora s_i (per $i \leq n-1$) sarà la permutazione $(i, i+1)(i+n, i+1+n)$, e la s_n sarà la trasposizione $(n, 2n)$. Il gruppo di Coxeter dello spazio polare sarà il sottogruppo di S_{2n} generato da queste permutazioni. La verifica è presto fatta. E' intanto immediato verificare che le identità precedenti sono soddisfatte. Con un po' di pazienza, si riesce poi a mostrare che il sottogruppo del gruppo simmetrico S_{2n} ora definito agisce transitivamente sull'insieme delle camere. E, per quanto detto in precedenza sui complessi di Coxeter, ciò basta a garantire che detto gruppo sia proprio il gruppo di Coxeter di diagramma (C_n) .

Passiamo ora alla discussione di due casi notevoli. Torniamo allo spazio polare \mathcal{P}_ϕ costruito a partire dalla forma bilineare ϕ , come all'inizio. E supponiamo che l'indice di Witt n abbia il massimo valore possibile.

Caso 1 - La dimensione m dello spazio vettoriale V è dispari. E' dunque $m=2n+1$, per le ipotesi fatte su n . Si prova allora che il complesso di camera costruito su \mathcal{P}_ϕ verifica, oltre alle (B.2)-(B.4), anche la (B.1). E possiamo riprodurre in

un opportuno gruppo di trasformazioni la struttura di \mathcal{P}_ϕ . Allo scopo, poniamo $G = GO_{2n+1}(K, \phi)$, ove $GO_{2n+1}(K, \phi)$ è il gruppo delle trasformazioni lineari di V in sé che conservano ϕ . (Quanto dirò può estendersi immediatamente al caso in cui $G = PGO_{2n+1}(K, \phi)$, ove $PGO_{2n+1}(K, \phi)$ è il quoziente di $GO_{2n+1}(K, \phi)$ sul suo centro). Non è difficile provare che la condizione (G), riportata nel primo esempio, vale su \mathcal{P}_ϕ e su G . Allora tutta la costruzione data nel primo esempio può ripetersi in questo nuovo caso. Si sceglierà un appartamento Σ_0 come appartamento fondamentale, una camera C_0 in Σ_0 come camera fondamentale, si definirà B come lo stabilizzatore di C_0 , N come lo stabilizzatore di Σ_0 , si porrà $T = B \cap N$, e si riotterranno le (BN.1)-(BN.3), dipendendo queste solo dalle (B.1)-(B.4) e dalla (G). Come nel precedente esempio, *la struttura di \mathcal{P}_ϕ è interamente riproducibile nel sistema dei parabolici della coppia (B,N), dipendendo ciò solo dalle (BN.1)-(BN.3), e dalle (B.1)-(B.4).*

Qui aggiungo solo una descrizione matriciale di B, N e T . Siano $e_1, \dots, e_n, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ i punti dell'armatura che sostiene Σ_0 . Assumiamo di averli dati in ordine così che $e_i \perp e_j$ ($i, j = 1, \dots, n$), $\bar{e}_i \perp \bar{e}_j$ ($i, j = 1, \dots, n$), e $\bar{e}_i = p_{\langle \bar{e}_1, \dots, e_n \rangle}(\langle e_j | j \neq i \rangle)$. Siano ora $u_1, \dots, u_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ vettori di V nelle direzioni individuate da $e_1, \dots, e_n, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$, rispettivamente. I vettori $u_1, \dots, u_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ generano un sottospazio $2n$ -dimensionale di V . Possiamo perciò scegliere un ulteriore vettore u in modo che $u, u_1, u_2, \dots, u_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ diano una base di V . In rapporto a tale base ϕ è rappresentata da una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} 0_n & M & X^T \\ M & 0_n & Y^T \\ X & Y & c \end{pmatrix}$$

ove 0_n è la matrice nulla $n \times n$, M è una matrice diagonale invertibile di rango n , c è uno scalare $\neq 0$, e X e Y sono matrici $1 \times n$, e X^T e Y^T sono le loro trasposte. Possiamo poi scegliere opportunamente i vettori $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$, senza mutarne le direzioni, ma in modo che M sia la matrice identica. Possiamo infine scegliere u in modo che sia X che Y siano matrici nulle (e che $c=1$, se il campo K è algebricamente chiuso). Possiamo infine supporre che la camera C_0 sia

la sequenza

$$\langle u_1 \rangle, \langle u_1, u_2 \rangle, \dots, \langle u_1, \dots, u_n \rangle$$

di sottospazi di \mathcal{P}_ϕ . Allora B è costituito da matrici del tipo

$$\begin{bmatrix} A & C & Z' \\ 0_n & (A^T)^{-1} & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & Z & \pm 1 \end{bmatrix}$$

ove A è una matrice superiormente triangolare di rango n, A^T è la trasposta di A, $0_n, 0_{n,1}$ e $0_{1,n}$ sono le matrici nulle $n \times n$, $n \times 1$ e $1 \times n$, rispettivamente, Z è un'arbitraria matrice $1 \times n$, Z' è la matrice $n \times 1$ ottenuta moltiplicando termine a termine la sequenza Z per la sequenza dei valori sulla diagonale di A, e moltiplicando tutti i termini così ottenuti per ± 1 , e C è una matrice verificante la condizione $(A^{-1}C) + (A^{-1}C)^T = -cZ^T \cdot Z$. Le matrici permutazionabili individuate da permutazioni generate dalle $(u_1, u_{i+1})(\bar{u}_i, \bar{u}_{i+1})$ per $i=1, 2, \dots, n-1$ e (u_n, \bar{u}_n) portano Σ_0 in sé e costituiscono un gruppo isomorfo al gruppo di Coxeter nel diagramma (C_n) (per quanto detto in precedenza) e perciò isomorfo al gruppo di Weyl $W = N/T$ (per la (bn.1), ricavata in precedenza). Ed è presto visto che N è prodotto normale di T per il gruppo delle matrici permutazionali ora descritte. Infine, T è il gruppo delle matrici diagonali individuate da sequenze del tipo $(a_1, \dots, a_n, a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}, \pm 1)$. Il passaggio a $PGO_{2n+1}(K, \phi)$ è immediato: il centro di $GO_{2n+1}(K, \phi)$ è costituito dalle matrici diagonali individuate dalle sequenze $(1, 1, \dots, 1, 1, \pm 1)$. Sicché il toro fondamentale, se si pone $G = PGO_{2n+1}(K, \phi)$, risulta isomorfo al gruppo delle matrici diagonali di rango n. Il boreliano fondamentale B mantiene la stessa descrizione che nel caso di $GO_{2n+1}(K, \phi)$, salvo che ora nell'ultima posizione in basso a destra troviamo sempre 1.

Caso 2 - Sia m pari, ed $n=m/2$. In tal caso si dimostra che la (B.1) è falsa su \mathcal{P}_ϕ . Infatti si prova che, nelle ipotesi assunte, per ogni sottospazio di \mathcal{P}_ϕ di codimensione 1 escono esattamente due sottospazi massimali di \mathcal{P}_ϕ . Tale circostanza si riassume dicendo che lo spazio polare \mathcal{P}_ϕ è *fine*, o *sottile* (preferisco evitare qui il termine "magro", che si presterebbe ad equivoci: "fine" infatti

intende qui qualcosa di più che "magro", e tuttavia di meno che "grasso"; inoltre la definizione di fine si applica solo a spazi polari). Sicché dato il ruolo giocato dalla (B.1) nel ricostruire su un sistema di parabolici la struttura di un complesso di camere, non possiamo sperare di riadattare tali costruzioni al nostro caso. Le difficoltà possono essere evidenziate in modo chiaro. Supponiamo di avere un gruppo G che agisce su \mathcal{P}_ϕ conservando i tipi (le dimensioni, cioè). E ciò avviene senz'altro se G verifica la condizione (G) data all'inizio. Dato un sottospazio Y di codimensione 1, siano X e X' i due sottospazi massimali per Y , e poniamo $F = \{Y, X\}$ e $F' = \{Y, X'\}$. Lo stabilizzatore in G di F stabilizza Y , perché G conserva i tipi. Sicché porta X' in un sottospazio massimale (perché G conserva i tipi) incidente ad Y . Pertanto fissa X' perché \mathcal{P}_ϕ è fine. Sicché F ed F' hanno lo stesso stabilizzatore. La condizione (g.1), dedotta nella discussione del primo esempio, cade, e, con essa, cade la speranza di riprodurre fedelmente la struttura di \mathcal{P}_ϕ in un sistema di parabolici di G , a meno di non cambiare tipo di costruzione.

E' però possibile costruire su \mathcal{P}_ϕ un'altra struttura geometrica, esente dalle pecche cui va soggetto qui \mathcal{P}_ϕ , e che, perciò, si autopropone come la geometria 'giusta' in questo caso.

Fissiamo a caso un sottospazio massimale \bar{X} di \mathcal{P}_ϕ , ed assegnamo ad esso la marca 0. Procediamo quindi a contrassegnare tutti i sottospazi massimali con una marca $i=0$ o 1, partendo da \bar{X} e secondo la seguente regola:

Se Y e Z si intersecano su un sottospazio di codimensione 1 e Y è marcato da i ($=0,1$) allora Z deve essere marcato da $i+1$ (modulo 2).

La seguente proprietà assicura che possiamo assegnare una marca a ciascuno dei sottospazi massimali.

(p.5) Dati due sottospazi massimali Y e Y' , esiste sempre una sequenza di sottospazi massimali $Y = Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_m = Y'$ tale che Y_{i-1} e Y_i si intersecano su un sottospazio di codimensione 1.

Riporto la dimostrazione di tale proprietà, in quanto, rifacendosi ad argomentazioni affatto generali, sarà trasportabile senza sforzo a situazioni diverse da quella qui esaminata, e ciò tornerà assai utile più avanti.

Dati due sottospazi Y e Y' , siano C e C' camere contenenti Y e Y' , rispettivamente. Siccome \mathcal{R}_ϕ è un complesso di camere, possiamo trovare una galleria $C = C_0, C_1, \dots, C_m = C'$. Sia Y_i il sottospazio massimale nella camera C_i ($i=0,1,\dots,m$). La sequenza Y_0, Y_1, \dots, Y_m dà, salvo eventuali ripetizioni, ciò che cerchiamo. (Osservo che è essenziale in questo ragionamento che le camere prendano ciascuna esattamente una varietà (sottospazio) da ogni tipo (dimensione)).

Si dimostra poi che la regola sopra data non produce conflitti (rimando per questo al cap. VII di [26]). I sottospazi massimali restano così ripartiti in due classi disgiunte, contraddistinte dalle marche 0 e 1 rispettivamente. (E' poi facile vedere che questa bipartizione non dipende dalla scelta di \bar{X} , se non per lo scambio di 0 ed 1, eventualmente). Assegnamo allora come nuovo tipo il numero $n-1-i$ ai sottospazi massimali contrassegnati da i (per $i=0,1$); cancelliamo tutti i sottospazi di codimensione 1, e manteniamo tutti gli altri, mantenendo ad essi come tipo la loro dimensione (nel caso non siano sottospazi massimali, naturalmente). Su questo nuovo insieme di varietà definiamo una nuova relazione di incidenza, stabilendo che l'incidenza tra due varietà di tipo i e j , con $\{i,j\} \neq \{n-2,n-1\}$, coincide con la vecchia incidenza definita su \mathcal{R}_ϕ , mentre due varietà, di tipo $n-1$ ed $n-2$ rispettivamente, sono dette incidenti se in \mathcal{R}_ϕ si intersecano su un sottospazio di codimensione 1. Chiamiamo $\sigma(\mathcal{R}_\phi)$ la struttura di incidenza così ottenuta. Essa viene detta *complesso orifiamma* di \mathcal{R}_ϕ .

E' importante notare che la costruzione ora descritta si applica a qualunque spazio polare fine \mathcal{R}_ϕ , permettendo così di definire il complesso orifiamma $\sigma(\mathcal{R}_\phi)$.

In particolare si applica agli appartamenti di uno spazio polare. Assumiamo allora come appartamenti di $\sigma(\mathcal{R}_\phi)$ i complessi orifiamma degli appartamenti di \mathcal{R}_ϕ . Con un po' di pazienza si prova allora che:

(p.6) Le (B.1)-(B.4) valgono su $\sigma(\mathcal{R}_\phi)$.

Noto che, delle particolarità di \mathcal{R}_ϕ , la dimostrazione usa, oltre al fatto

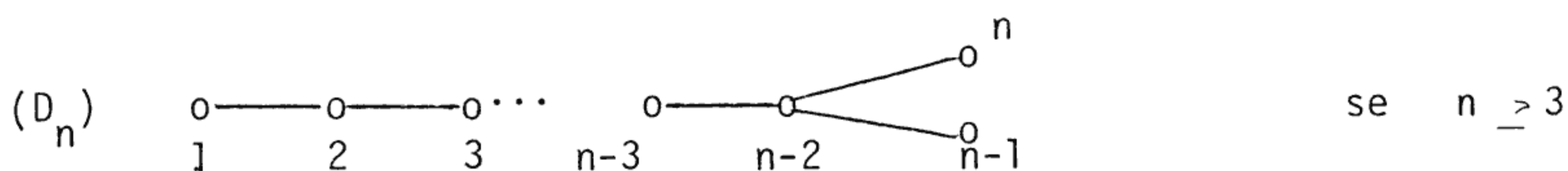
che \mathcal{L}_ϕ è fine, solo il fatto che ogni retta (sottospazio di dimensione 1) in \mathcal{L}_ϕ ha almeno tre punti; e ciò solo per quanto attiene alla dimostrazione della grassezza di $\mathcal{O}(\mathcal{L}_\phi)$ (cfr. (B.1)). Sicché il risultato si estende immediatamente ad ogni spazio polare fine le cui rette contengano tutte almeno tre punti (diciamo: che sia *non degenera*). E se si rinuncia alla pretesa che $\mathcal{O}(\mathcal{L}_\phi)$ sia grasso, allora tutto si estende al caso di un arbitrario spazio polare fine.

Inoltre, siccome gli appartamenti di $\mathcal{O}(\mathcal{L})$ sono individuati da quelli di \mathcal{L}_ϕ , e questi sono individuati dal rango n di \mathcal{L}_ϕ , allora la struttura degli appartamenti di $\mathcal{O}(\mathcal{L})$ dipende solo dal rango n di \mathcal{L} . E siccome per ogni n esistono spazi polari fini non degeneri (basta scegliere la forma ϕ su uno spazio vettoriale di dimensione $2n$, in un campo algebricamente chiuso di caratteristica $\neq 2$), la (p.6) unitamente alla (b.2) (cfr. esempio precedente) mostra che:

(p.7) Dato uno spazio polare fine \mathcal{L} , gli appartamenti di $\mathcal{O}(\mathcal{L})$ sono complessi di Coxeter. In dettaglio: se \mathcal{L} ha rango n , gli appartamenti di $\mathcal{O}(\mathcal{L})$ sono isomorfi al complesso orifiamma dello spazio polare magro di rango n (che, dunque, è un complesso di Coxeter).

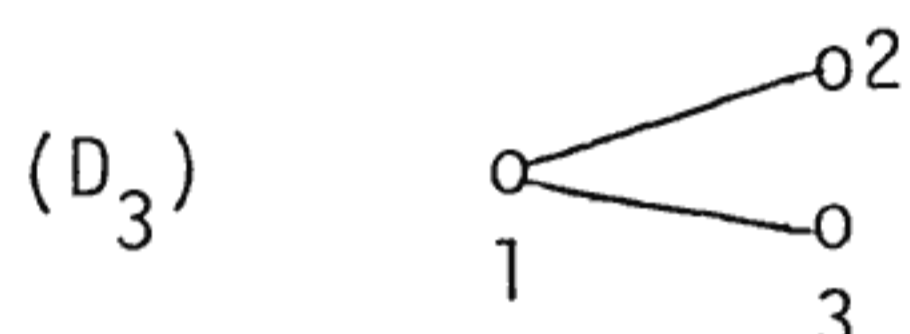
Indicato con \mathcal{O}_n il complesso di Coxeter costituito dal complesso orifiamma dello spazio polare magro di rango n , descriviamone il diagramma. Possiamo farlo descrivendo i residui di bandiere di cotipo $\{i, j\}$ (per $1 \leq i < j \leq n$), per quanto detto all'inizio sui complessi di Coxeter. Ora, finché $j \leq n-2$, oppure $i < n-2$, le cose vanno qui esattamente come nello spazio polare magro. Il residuo di una bandiera di cotipo $\{n-1, n\}$ è poi un digono (rappresentando le varietà di un tipo come vertici e quelle nell'altro come lati). Infatti, fissato un sottospazio X dello spazio polare magro, di dimensione $n-3$, restano utilizzabili solo quattro punti per costruire sottospazi massimali dello spazio polare magro contenenti X . Sicché il residuo cercato è null'altro che il complesso orifiamma dello spazio polare magro di rango 2. E questo è appunto un digono. Il residuo di una bandiera di \mathcal{O}_n di cotipo $\{n-2, n-i\}$ (per $i=0,1$) è, infine, un triangolo. Infatti, fissato un sottospazio massimale X nello spazio polare magro, sia Y un sottospazio di X di dimensione $n-4$ ($Y=\emptyset$ se $n=3$). $X-Y$ consta di tre punti, ciascuno dei quali, aggiun

to ad Y , dà un sottospazio di dimensione $n-3$; e ogni coppia di tali punti individua (assieme ad Y ed al punto non ortogonale al rimanente punto della terna) un sottospazio massimale incidente ad X in \mathcal{O}_n . In definitiva: il diagramma di \mathcal{O}_n è:



ed è: $\begin{array}{ccc} \circ & \circ & \text{se } n=2. \\ 1 & 2 & \end{array}$

Nel caso $n=2$ si ottiene dunque un digono, e la costruzione sortisce un esito di ben scarso interesse. Nel caso di $n=3$ il diagramma (D_n) diviene:



essenzialmente identico ad $(A_3) \quad \begin{array}{ccc} \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ 1 & & 2 & & 3 \end{array}$ (basta mutare la assegnazione dei tipi). Sicché \mathcal{O}_3 è la geometria proiettiva discreta su quattro punti.

Possiamo ora ricostruire un sistema di riflessioni su cui dare la presentazione del gruppo di Coxeter di \mathcal{O}_n . Siano $e_1, e_2, \dots, e_n, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ i punti dello spazio polare magro di rango n , dati in modo che la permutazione involutoria che definisce tale spazio scambi e_i con \bar{e}_i (per $i=1, \dots, n$). Poniamo $s_i = (e_i, e_{i+1})(\bar{e}_i, \bar{e}_{i+1})$ per $1 \leq i \leq n-1$, ed $s_n = (e_{n-1}, \bar{e}_n)(\bar{e}_{n-1}, e_n)$. Le identità riassunte in (D_n) sono soddisfatte dalle s_1, \dots, s_n . Queste permutazioni conservano poi la struttura di \mathcal{O}_n . Il sottogruppo di S_{2n} da esse generato opera poi transitivamente sull'insieme delle camere di \mathcal{O}_n . Sicché, per quanto detto sui gruppi di Coxeter, il gruppo di Coxeter di \mathcal{O}_n è il sottogruppo di S_{2n} generato dalle s_1, \dots, s_n sopra definite.

E' facile vedere che nel caso di $n=2$ si ottiene il gruppo abeliano elementare di ordine 4. La coincidenza di (D_3) ed (A_3) indica che, nel caso di $n=3$, il sottogruppo di S_6 ora definito coincide con S_4 . Non è difficile esibire in concreto tale

isomorfismo. Siano $X_0 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, e_3\}$, $X_1 = \{\bar{e}_1, e_2, \bar{e}_3\}$, $X_2 = \{e_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, $X_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$. Allora s_i è identificabile con la trasposizione (X_{i-1}, X_i) , per $i=1,2,3$. Il sottogruppo di S_6 generato da s_1, s_2 ed s_3 è il gruppo delle permutazioni sui quattro oggetti X_0, X_1, X_2, X_3 .

Torniamo ora all'esempio che avevamo scelto: \mathcal{L}_ϕ di rango n, V di dimensione $2n$. Assumiamo ora $n \geq 4$. La restrizione non deve stupire, ormai: (D_2) e (D_3) sono i due casi anomali del diagramma (D_n) . Poniamo $G = SO_{2n}(K, \phi)$ o $G = PSO_{2n}(K, \phi)$ (ove è $SO_{2n}(K, \phi) = GO_{2n}(K, \phi) \cap SL_{2n}(K)$ e $PSO_{2n}(K, \phi) = SO_{2n}(K, \phi) / Z(SO_{2n}(K, \phi))$). Si può provare che G agisce su $\mathcal{O}(\mathcal{B}_\phi)$ soddisfacendo la condizione (G). Fissato un appartamento Σ_0 in $\mathcal{O}(\mathcal{B}_\phi)$ come appartamento fondamentale e una camera C_0 in Σ_0 come camera fondamentale, siano B lo stabilizzatore di C_0 ed N lo stabilizzatore di Σ_0 . E' ormai ovvio che valgono sulla coppia B ed N le condizioni (BN.1)-(BN.3), sicché è possibile ricostruire $\mathcal{O}(\mathcal{L}_\phi)$ sui parabolici definiti da B .

Ometto la descrizione matriciale di B, N e T : credo sia ormai evidente che aggiungerebbe ben poco a quello che già sappiamo. Ad ogni modo: la descrizione di B e T può ottenersi con calcoli diretti, come nel caso di $GO_{2n+1}(K, \phi)$ esaminato in precedenza. Allo scopo converrà scegliere la base di V_{2n} in modo da farla coincidere con l'armatura di Σ_0 e da portare la matrice di ϕ nella forma:

$$\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

ove I_n ed 0_n sono le matrici identica e nulla, $n \times n$. La descrizione di N si ottiene sfruttando la descrizione del sistema di riflessioni del Gruppo di Coxeter di diagramma (D_n) data sopra, e la descrizione di T .

Naturalmente non è necessario che sia $m=2n+1$ perché \mathcal{L}_ϕ sia grasso. Infatti: (il complesso di camere individuato da) \mathcal{L}_ϕ è grasso se $n < m/2$ (sia m pari o dispari) (cfr. [26], Teorema 8.3.4). Sicché se $n < m/2$ le cose vanno bene non appena si trovi un opportuno gruppo G che agisca su \mathcal{B}_ϕ salvaguardando la condizione (G). Non è detto che a questo scopo basti sempre assumere $G = GO_m(K, \phi)$ (av-

verto che, nell'eventualità che (G) non sia soddisfatta da $GO_m(K, \phi)$, allora (G) è falsa su ogni sottogruppo di $GL_m(K)$ che conservi l'ortogonalità \perp_ϕ ; ciò segue da ben note proprietà delle forme quadratiche). Dò qui un controesempio. Sia K il campo dei reali, $m=6$ e ϕ sia individuata dalla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

L'indice di Witt di ϕ è 2. Consideriamo ora i vettori:

$$\begin{array}{ll} a = (1, 0, 0, 0, 0, 1) & b = (0, 1, 0, 0, 1, 0) \\ a' = (0, 0, 1, 0, 0, 1) & b' = (0, 0, 0, 1, 1, 0) \\ a'' = (0, 0, 0, 1, 0, 1) & b'' = (0, 0, 1, 0, 1, 0) \end{array}$$

È presto visto che sono isotropi e che $\{a, b, a', b'\}$ e $\{a, b, a'', b''\}$ danno le armature di due appartamenti di \mathcal{Q}_ϕ . Nel primo appartamento le coppie di vettori non ortogonali sono (a, a') e (b, b') , nel secondo sono (a, a'') e (b, b'') . Un calcolo un po' laborioso mostra che non esiste alcun elemento di $GO_6(K, \phi)$ che fissi la camera $\{ \langle a \rangle, \langle a, b \rangle \}$ e porti il primo appartamento sul secondo. Sicché (G) è falsa su $GO_6(K, \phi)$ e \mathcal{Q}_ϕ .

Nell'esempio ora riportato, è m pari ed $n = (m-2)/2$. È però $n \geq 4$. A titolo di notizia: la condizione (G) vale su $SO_m(K, \phi)$ e \mathcal{Q}_ϕ non appena $m=2n+2$ ed $n \geq 4$.

Esempio 3) - Spazi polari e gruppi simplettici.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione m su un campo K di caratteristica $\neq 2$, e sia ϕ una forma bilineare antisimmetrica, non degenera. Esattamente come nel caso in cui ϕ era simmetrica, è possibile parlare di ortogonalità (spesso detta *polarità*, anche in questo caso), di sottospazi totalmente isotropi, indice di Witt n , ecc... E, se $n \geq 2$, come nel caso in cui ϕ era simmetrica, \mathcal{P}_ϕ è uno spazio polare. Ora, però, \mathcal{Q}_ϕ è sempre grasso. Mi limito qui al caso in cui

$m=2n$. In tale caso possiamo scegliere come gruppo G il gruppo $\mathrm{GSp}_{2n}(K, \phi)$ delle matrici che conservano ϕ , o il gruppo $\mathrm{PGSp}_{2n}(K, \phi) = \mathrm{GSp}_{2n}(K, \phi)/Z(\mathrm{GSp}_{2n}(K, \phi))$. Vale la condizione (G) su G e \mathcal{Q}_ϕ . Osservo che, esattamente come nel caso in cui ϕ era simmetrica, un'opportuna scelta della base di V permette di portare la matrice di ϕ nella forma:

$$\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

$\mathrm{GSp}_{2n}(K, \phi)$ è spesso detto *gruppo simplettico*, e denotato semplicemente con $\mathrm{GSp}_{2n}(K)$.

Che gli esempi sin qui forniti abbiano tutti a che fare in qualche modo con BN-coppie su gruppi algebrici non è del tutto casuale. Ma non mi è possibile approfondire questo aspetto, tanto meno qui. Rimando comunque al cap. 11 di [26].