

CAPITOLO 1
(BN-COPPIE ED EDIFICI)

ESEMPI

Do qui alcuni esempi, così da pervenire in modo naturale alla definizione di BN-coppia attraverso un esame delle proprietà rintracciabili in tali esempi. Ometterò gran parte delle dimostrazioni, salvo alcune, che sceglierò tra le più semplici, come esemplificazioni del tipo di ragionamenti che qui si impiegano. Per il resto, le dimostrazioni omesse si rifanno ad argomenti affatto generali, per i quali rimando al cap. IV di [4] e a [26]. Terminologia e definizioni verranno assestate via via, nel corso degli esempi. Ma resta inteso che devono pensarsi stabilite in generale, e non solo per gli esempi che ne hanno offerto il pretesto.

Esempio 1). - Sia V uno spazio vettoriale $n+1$ dimensionale su un campo K , e sia $G = GL_{n+1}(K)$ il gruppo delle trasformazioni lineari (invertibili) di V in sé. Sia poi V_∞ la geometria proiettiva di V .

E' noto che possono associarsi a V o a V_∞ altri gruppi notevoli: il gruppo speciale lineare $SL_{n+1}(K)$ (costituito dalle matrici a determinante 1) e i gruppi proiettivi $PGL_{n+1}(K)$ e $PSL_{n+1}(K)$, generale e speciale rispettivamente, ottenuti da $GL_{n+1}(K)$ e $SL_{n+1}(K)$ quozientando rispetto ai loro centri. Nel seguito mi riferirò per lo più al gruppo $GL_{n+1}(K)$. Ma resta inteso che l'essenziale di quanto dirò può estendersi facilmente a ciascuno degli altri tre gruppi ora elencati.

Premetto un po' di terminologia. Dovremmo denominare i sottospazi propri e non vuoti di V_∞ col termine *varietà* o *elementi* (di V_∞). Ma, almeno all'inizio, preferisco mantenere la parola *sottospazio* (intesa qui come sinonimo di varietà o elemento); ciò per non rendere l'esposizione troppo ermetica a causa di terminologie insolite. Per *punti* intendo in questo esempio i punti della geometria proiettiva V_∞ . Resta definita tra i sottospazi (o varietà, o elementi, che dir si voglia) una relazione di *incidenza*, stabilendo di dire incidenti due sottospazi quando uno dei due contenga l'altro. Una *bandiera* sarà un insieme di sottospazi a due a due incidenti, e una *camera* sarà una bandiera massimale. Ovvio che una camera

contiene esattamente n sottospazi, uno per ogni dimensione da 0 ad $n-1$. Due camere si dicono *adiacenti* se hanno esattamente $n-1$ sottospazi in comune. Date due camere C e C' , una *galleria* da C a C' è una sequenza (C_0, C_1, \dots, C_m) di camere con $C = C_0, C' = C_m$ e C_{i-1} adiacente a C_i per $i = 1, 2, \dots, m$. Il numero m è la *lunghezza* della galleria. E' poi ovvio che due qualunque camere di V_∞ sono sempre connettibili da qualche galleria. Tale circostanza, unitamente al fatto che ogni bandiera di V_∞ è sempre contenuta in qualche camera, si riassume dicendo che V_∞ definisce un *complesso di camere*. Ciò premesso, possiamo parlare della più piccola ~~tra le lunghezze di gallerie da una camera C a una camera C' , e questa sarà la~~ distanza di C da C' . Una galleria da C a C' sarà *minimale* se la sua lunghezza è la distanza di C da C' . Data poi una camera C e una bandiera F , una galleria da C ad una camera C' contenente F sarà detta una *galleria da C ad F* . Ovvio in che senso si parlerà di distanza di F da C , di gallerie minimali da C ad F ecc.

Osservo qui che questo apparato di definizioni richiede, per essere formulato, solo una relazione riflessiva e simmetrica, in ruolo di incidenza. L'adiacenza tra due camere può definirsi facilmente stabilendo che due camere abbiano da dirsi adiacenti quando la loro differenza simmetrica (in senso insiemistico) consta di due elementi. Il resto non presenta alcuna difficoltà. Ciò premesso, è presto visto che due camere adiacenti hanno la stessa cardinalità. Con ciò, fissata una camera C_0 e ragionando per induzione sulla distanza di una qualunque altra camera da C_0 , si vede subito che in un complesso di camere tutte ^{le camere} hanno la stessa cardinalità, che verrà detta *rango* del complesso. Nel caso di V_∞ , il rango è n , naturalmente.

Le seguenti definizioni sono invece più legate alla struttura di V_∞ . Chiamo *armatura* di V_∞ un insieme di $n+1$ punti generante per V_∞ . E, data un'armatura A , chiamo *appartamento* (sostenuto da A) la sottogeometria di V_∞ costituita dai sottospazi generati da sottoinsiemi (propri e non vuoti) di A . E' facile vedere che un'appartamento è qui null'altro che una geometria discreta su $n+1$ punti (un triangolo se $n=2$, un tetraedro se $n=3$, ecc.).

Le seguenti proprietà sono di facile verifica:

(B.1) Il complesso di camere (definito da V_∞) ha rango finito ed è *grasso*, nel senso che, data una bandiera cui manchi un elemento per essere massimale, essa appartiene ad almeno tre camere.

(B.2) Gli appartamenti sono complessi di camere *magri*, nel senso che, data in un appartamento una bandiera cui manchi un elemento per essere massimale, essa appartiene ad esattamente due camere dell'appartamento.

Più pazienza occorre per ricostruire dimostrazioni delle proprietà seguenti:

(B.3) Date due camere, esiste sempre un appartamento che le contiene entrambe.

(B.4) Data una camera C e una bandiera F e due appartamenti Σ_1 e Σ_2 contenenti sia C che F , esiste sempre un isomorfismo di Σ_1 su Σ_2 che fissa C ed F elemento per elemento.

(G) Il gruppo G (cfr. sopra) dà un gruppo di automorfismi transitivo sull'insieme delle coppie (C, Σ) ove Σ è un appartamento e C è una camera di Σ . E per ogni $g \in G$ e per ogni camera C , g fissa gli elementi di $g(C) \cap C$.

Possiamo ora dimostrare la seguente proprietà, che tornerà utile nel seguito.

(b.1) Sia Σ un appartamento, e C ed F una camera e una bandiera in Σ . Allora Σ contiene ogni galleria minimale (in V_∞) condotta da C ad F .

La dimostrazione prescinde totalmente dalle particolarità dell'esempio scelto. La riporto, ad esemplificazione del tipo di ragionamenti che qui sono consueti. Si precede per induzione sulla distanza d di F da C . Se $d = 0$ non v'è nulla da provare. Sia $d > 0$, e sia $C = C'_0, C'_1, \dots, C'_d \supseteq F$ una galleria minimale (in V_∞) da C ad F . Per la (B.3), esiste un appartamento Σ' contenente C e C'_d , e, per l'ipotesi induttiva applicata a C ed $F' = C'_d \cap C'_{d-1}$, l'appartamento Σ' contiene tutta la galleria $C'_0, C'_1, \dots, C'_{d-1}$. Per la (B.4) applicata a Σ, Σ', C ed F , l'appartamento Σ contiene una galleria $C = C_0, C_1, \dots, C_d \supseteq F$ da C ad F di lunghezza d . Se $C_d = C'_d$, l'asserto segue applicando l'ipotesi induttiva a C e alla bandiera F' . Supponiamo allora $C_d \neq C'_d$. Otterremo un assurdo. Per la (B.3), esiste un appartamento Σ'' contenente C'_1 e C_d . Per l'ipotesi induttiva applicata a C'_1 e ad

F, l'appartamento Σ'' contiene tutta la galleria C_2', C_3', \dots, C_d' da C_1' ad F. E per l'ipotesi induttiva applicata a C_d ed $F'' = C \cap C_1$, l'appartamento Σ'' contiene tutta la galleria C_1, C_2, \dots, C_{d-1} da C_d ad F'' . Sicché, intanto, F ha di stanza $d-1$ in Σ'' sia da C_1' che da C_1 . Per di più, siccome C_1 è immagine di C_1' in un isomorfismo da Σ' a Σ che fissa C, e C_1' è adiacente a C, si ha $C \cap C_1' = C \cap C_1 = C_1 \cap C_1' = F''$. Applichiamo ora la (B.4) a Σ, Σ'', C_1 ed F. L'isomorfismo da Σ a Σ'' stabilito dalla (B.4), fissando C_1 , deve portare C in C_1' , poiché fissa F'' e perché C_1' è, oltre a C_1 , l'unica camera di Σ'' per F'' . Sicché la distanza di C da F in Σ è uguale alla distanza di C_1' da F in Σ'' . Ma questa è $d-1$. E si ha l'assurdo.

Gli appartamenti godono di proprietà assai interessanti. Partendo qui dall'esame di quanto accade nell'esempio preso in considerazione, indicherò poi in che direzione le proprietà individuate sono suscettibili di generalizzazione. Nel nostro esempio, un appartamento è una geometria discreta su $n+1$ punti. Sicché il gruppo degli automorfismi di un appartamento è il gruppo simmetrico S_{n+1} su $n+1$ punti. Possiamo poi supporre di avere ordinato i punti che costituiscono l'armatura che sostiene l'appartamento, si da indentificarli con i numeri da 0 ad n (secondo una consueta convenzione, che consente di identificare un oggetto col suo indice). Una camera dell'appartamento, essendo una sequenza crescente di n sottoinsiemi di $\{0, 1, \dots, n\}$, è identificabile con una permutazione sui numeri $0, 1, \dots, n$. Precisamente, la permutazione p individua la camera:

$$\{p(0)\}, \{p(0), p(1)\}, \{p(0), p(1), p(2)\}, \dots$$

Con ciò, identificate camere e permutazioni, è presto visto che camere adiacenti differiscono per una trasposizione. Precisamente, se la camera individuata dalla permutazione p differisce da quella individuata dalla permutazione q solo per un insieme di k punti, allora p e q differiscono per la trasposizione $t = p \cdot (k-1, k) \cdot p^{-1}$ ($= q \cdot (k-1, k) \cdot q^{-1} = qp^{-1} = pq^{-1}$). Sia poi C_0 la camera corrispondente alla permutazione identica (ovvero: la camera fondamentale dell'appartamento relativamente all'ordinamento dato sui punti dell'armatura). Sia C una qualunque altra camera e p la permutazione associata a C. Una galleria $C_0, C_1, C_2, \dots, C_m = C$

da C_0 a C fornisce una decomposizione in trasposizioni per p . Precisamente, se t_i è la trasposizione su cui differiscono C_i e C_{i-1} (per $i=1, \dots, m$) risulta $p=t_m t_{m-1} \dots t_1$. Da ciò si ritrova il ben noto fatto che S_{n+1} è generato da trasposizioni del tipo $(k-1, k)$, per $k=1, 2, \dots, n$. Infatti, nella decomposizione ora data per p , la trasposizione t_m è del tipo $q \cdot (k-1, k) \cdot q^{-1}$, ove $q=t_{m-1} t_{m-2} \dots t_1$. E l'asserto segue per induzione sulla distanza della camera C da C_0 . Peraltro, è noto che si può dire ancor di più: posto $r_k = (k-1, k)$ le identità:

$$r_k^2 = 1 \quad \text{per } k = 1, \dots, n, \quad (r_{k-1} r_k)^3 = 1 \quad \text{per } k = 2, \dots, n$$

$$(r_k r_h)^2 = 1 \quad \text{per } h, k \quad \text{tali che } |h-k| > 1$$

danno una presentazione di S_{n+1} .

Sulle bandiere dell'appartamento, ora. Ad una bandiera F possiamo associare la stella di camere che la contengono. Se poi p è la permutazione corrispondente ad una di tali camere, la stella delle camere per F corrisponde al laterale $pS_{p-1}(F)$ dello stabilizzatore $S_{p-1}(F)$ della famiglia $p^{-1}(F)$ di sottoinsiemi di $\{0, 1, \dots, n\}$. Ai sottospazi dell'appartamento corrispondono dunque in modo naturale i laterali degli stabilizzatori S^i di sottoinsiemi $\{0, 1, \dots, i-1\}$ di $\{0, 1, \dots, n\}$, per $i=1, \dots, n$. Si vede facilmente che S^i è generato dalle trasposizioni $(k-1, k)$, per $k \neq i$. L'incidenza tra due sottospazi X ed Y si traduce nel fatto che X ed Y appartengono ad una stessa camera, e cioè che i laterali corrispondenti ad X e Y abbiano qualche elemento in comune (si osservi che non resta traccia dell'inclusione tra sottospazi, intesa come relazione d'ordine, se non per il tramite degli indici i degli S^i). In definitiva: la struttura dell'appartamento è interamente individuata dal sistema dei sottogruppi S^i ed S_{n+1} , sopra definiti.

Nell'esempio scelto, un'indagine tanto pedante delle proprietà degli appartamenti può sembrare un'esercitazione gratuita, e scontata nei suoi esiti. Ma non lo è, proprio perché i suoi risultati sono generalizzabili ad altre situazioni. Per indicare cosa di ciò è generalizzabile, è necessaria un po' di terminologia.

Rammento che un *gruppo di Coxeter* di rango finito è un gruppo presentato su un insieme finito di involuzioni r_i ($i \in I$), spesso dette *riflessioni*, da identità del

tipo $(r_i r_j)^{m_{ij}} = 1$, per $i, j \in I$; ove è, naturalmente, $m_{ij} = m_{ji} \geq 2$ e $m_{ij} = 2$. È anche consentito attribuire il valore ∞ ad alcuno degli esponenti m_{ij} . La cardinalità di I viene detta *rango* di S . Il grafo pesato (o multiplo) costruito sui vertici $i \in I$ congiungendo due vertici i, j con un lato contrassegnato dalla marca (m_{ij}) (o con $m_{ij} - 2$ lati, a seconda di quale convenzione si preferisca), si dirà *diagramma* del gruppo. Per le connessioni tra ciò e i sistemi di radici, i gruppi di riflessioni e i diagrammi di Dynkin, rimando ai capp. V e VI di [4].

Sia dato un gruppo di Coxeter S sulle riflessioni r_i ($i \in I$). Dato $J \subset I$, poniamo $S_J = \langle r_j \mid j \in J \rangle_S$. Poniamo poi $S^i = S_{I - \{i\}}$. Risulta $S_J = \bigcap_{i \notin J} S^i$ (l'inclusione $S_J \supseteq \bigcap_{i \notin J} S^i$ non è banale; cfr. [4] cap. IV, per una dimostrazione).

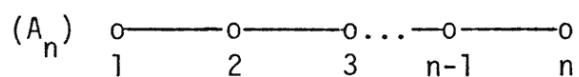
Possiamo definire un complesso di camere su S . Assumiamo come *varietà* i laterali dei sottogruppi del tipo S^i e stabiliamo tra essi una relazione di incidenza assumendo che due tali laterali xS^i e yS^j siano incidenti quando hanno qualche elemento in comune. Si verifica che ciò definisce un complesso di camere magro di rango $|I|$. Tale complesso sarà detto *complesso di Coxeter* (del gruppo di Coxeter S). Possiamo assegnare un *tipo* alle varietà del complesso (il tipo costituisce l'analogo di ciò che usualmente è la dimensione di un sottospazio). Precisamente, alla varietà xS^i assegnamo l'indice i come tipo. Nel seguito diremo spesso 'naturali' i tipi così definiti. Ciò premesso, il diagramma del gruppo di Coxeter assume sul complesso di Coxeter un chiaro significato geometrico. Sia infatti data una bandiera F cui manchino solo le varietà di tipo i e j per essere massimale, e consideriamo il *residuo* di F , ovvero l'insieme delle varietà di tipo i o j che sono incidenti a (tutte le varietà di) F . Congiungiamo poi due varietà nel residuo di F con un trattino quando siano incidenti. Otteniamo un poligono ordinario con $2m_{ij}$ lati (una catena infinita se $m_{ij} = \infty$). Infatti, una varietà di tipo i (di tipo j) incidente ad F determina, unitamente ad F , un laterale del sottogruppo $\langle r_j \rangle_S$ di S (del sottogruppo $\langle r_i \rangle_S$ di S), contenuto nel laterale del sottogruppo $\langle r_i, r_j \rangle_S$ corrispondente ad F . Non c'è perdita di generalità nell'assumere che il laterale individuato da F sia proprio il sottogruppo $\langle r_i, r_j \rangle_S$. Possiamo così riferirci ai laterali di $\langle r_j \rangle_S$ e $\langle r_i \rangle_S$ in $\langle r_i, r_j \rangle_S$. Ed il risultato ora

segue da una verifica diretta. E' ora presto visto che possiamo anche assumere, nel residuo di F , le varietà di tipo i in ruolo di vertici (o di lati) e quelle di tipo j in ruolo di lati (o di vertici), traducendo l'incidenza tra tali varietà nella usuale incidenza vertice-lato. Ed il residuo di F appare allora come un poligono ordinario di m_{ij} lati (un m_{ij} -gono ordinario).

In conclusione: il complesso di Coxeter individua il diagramma del gruppo da cui proviene; sicché individua il gruppo stesso. E' dunque lecito parlare *del gruppo di Coxeter di un complesso di Coxeter, del diagramma di un complesso di Coxeter*, oltre che *del complesso di Coxeter e del gruppo di Coxeter associati ad un dato diagramma* (brevemente: *in un dato diagramma*). Il gruppo di Coxeter di un complesso di Coxeter può anzi essere caratterizzato come il gruppo degli automorfismi *speciali* del complesso di Coxeter (ove "speciali" intende "che conservano i tipi"). La cosa è pressoché immediata. Il gruppo di Coxeter di un complesso di Coxeter è per l'appunto un gruppo di automorfismi speciali per il complesso, regolare sull'insieme delle camere del complesso. Infatti le camere, essendo i laterali del sottogruppo identico $1 = S_{\emptyset} = \bigcap_{i \in I} S^i$, sono gli elementi del gruppo, e l'azione del gruppo sulle camere è null'altro che la rappresentazione Cayleyana del gruppo su sé stesso. D'altra parte, siccome un complesso di Coxeter è magro, e una camera prende esattamente una varietà per ogni tipo, se un automorfismo speciale fissa una camera, allora esso fissa tutte le camere a questa adiacenti. Quindi, poiché un complesso di Coxeter è un complesso di camere, di adiacenza in adiacenza tale automorfismo fissa tutte le camere. Ed allora esso è l'identità, essendo speciale. In definitiva, un gruppo di automorfismi speciali di un complesso di Coxeter transitivo sull'insieme delle camere è di necessità il gruppo totale degli automorfismi speciali del complesso. E l'asserto è provato.

Nota -Per una caratterizzazione puramente geometrica dei complessi di Coxeter, rimando al cap. II di [26]; oppure, all'Appendice, in queste note.

Torniamo al nostro esempio. Sappiamo che S_{n+1} è il gruppo di Coxeter nel diagramma:



Quanto si è visto circa gli appartamenti di V_∞ si può ora riassumere dicendo semplicemente che essi sono complessi di Coxeter di S_{n+1} . In generale, anzi, dalle (B.1)-(B.4) si può dedurre:

(b.2) Gli appartamenti sono complessi di Coxeter.

Per una dimostrazione rimando al cap. III di [4]. Qui mi limito ad osservare che la dimostrazione fa uso essenziale dell'ipotesi che la struttura sia grassa, stabilita nella (B.1)).

E' poi quasi immediato che le (B.3) e (B.4) implicano:

(b.3) Gli appartamenti sono a due a due isomorfi.

Infatti, dati due appartamenti Σ e Σ' , si scelgano due camere C e C' , in Σ e Σ' rispettivamente. Per la (B.3), esiste un appartamento Σ'' che contiene C e C' . Ora basta applicare la (B.4) prima a Σ , Σ'' , C e C e poi a Σ'' , Σ' , C' e C' .

Sicché possiamo parlare *del* gruppo di Coxeter e *del* diagramma (degli appartamenti) di una struttura che verifichi le condizioni (B.1)-(B.4). Il gruppo di Coxeter (degli appartamenti) di una tale struttura è spesso detto *gruppo di Weyl* (della struttura). Sicché: S_{n+1} è il gruppo di Weyl di V_∞ .

Passo ora a mostrare come la struttura evidenziata in V_∞ si riflette nella struttura del gruppo $G=GL_{n+1}(K)$ (e dei gruppi SL_{n+1} , $PGL_{n+1}(K)$, $PSL_{n+1}(K)$).

Fissiamo in V_∞ un appartamento Σ_0 e una camera C_0 in Σ_0 , cui assegnamo i nomi di *appartamento fondamentale* e *camera fondamentale*, rispettivamente. Possiamo sempre supporre di avere scelto la base $\{e_0, \dots, e_1, \dots, e_n\}$ di V in modo che i sottospazi $\langle e_0 \rangle, \langle e_1 \rangle, \dots, \langle e_n \rangle$ diano l'armatura che sostiene Σ_0 , e che l'ordine in cui prendiamo i vettori e_0, e_1, \dots, e_n sia tale che la camera fondamentale sia la famiglia di sottospazi:

$$\langle e_0 \rangle, \langle e_0, e_1 \rangle, \langle e_0, e_1, e_2 \rangle, \dots, \langle e_0, e_1, \dots, e_{n-1} \rangle .$$

Indichiamo con B lo stabilizzatore in G di C_0 e con N lo stabilizzatore in G di Σ_0 . Il sottogruppo B viene spesso detto *Boreliano fondamentale*.



Negli esempi che stiamo trattando, è facile dare una descrizione matriciale di B ed N. Sia $T = B \cap N$. Risulta:

1) Sia $G = GL_{n+1}(K)$. Allora B è il gruppo delle matrici superiormente triangolari, ed N è il prodotto semidiretto del gruppo T, costituito qui dalle matrici diagonali (ovvero: matrici che portano valori non nulli solo sulla diagonale), per il gruppo delle matrici permutazionali (ovvero: individuate da permutazioni sui vettori della base). Risulta dunque $N/T \cong S_{n+1}$. A sua volta, B si spezza nel prodotto semidiretto del gruppo U delle matrici unipotenti (ovvero: superiormente triangolari e che portano sulla diagonale solo valori uguali ad 1), per T.

2) Sia $G = PGL_{n+1}(K)$. Basta quozientare sul centro di $GL_{n+1}(K)$, naturalmente. Ma possiamo dire di più. Sia \bar{T} il gruppo delle matrici diagonali che portano 1 sull'ultima posizione. Allora B è identificabile col prodotto semidiretto di U (vedi sopra) e di \bar{T} , ed N è identificabile col prodotto semidiretto di \bar{T} e di S_{n+1} . Di nuovo: $S_{n+1} \cong N/T$.

3) Sia $G = SL_{n+1}(K)$. Come nel primo caso, B è prodotto normale di U e di T, ove U è il gruppo delle matrici unipotenti e T è, qui, il gruppo delle matrici diagonali a determinante 1. Per ogni permutazione p sui vettori della base, sia t_p la matrice individuata da p. Associamo a p la matrice $t'_p = t_p$ se p è pari, e la matrice $t'_p = \bar{t}t_p$ se p è dispari, ove \bar{t} è una matrice diagonale di determinante -1. Otteniamo così un sistema di rappresentanti per gli elementi di N/T. E si ha, ancora, $N/T \cong S_{n+1}$.

4) $G = PSL_{n+1}(K)$. In questo caso B è isomorfo al prodotto normale di U e di T e T è isomorfo al prodotto di n copie del gruppo moltiplicativo K^* di K, una delle quali quozientata sul gruppo moltiplicativo delle radici (n+1)-esime di 1. Risulta poi $N/T \cong S_{n+1}$, poiché analogo isomorfismo vale nel caso $G = SL_{n+1}(K)$.

Il sottogruppo $T = B \cap N$ riceve il nome di *toro fondamentale*. Negli esempi ora esaminati è sempre:

(BN.1) $T \trianglelefteq N$.

Di fatto ciò segue solo dalla (B.2) e dalla seconda parte della (G). Infatti la seconda parte della (G) e il fatto che gli appartamenti sono magri implica che se un elemento g di G fissa una camera C e un appartamento Σ che contiene C , allora fissa ogni camera di Σ che sia adiacente a C . Sicché, siccome gli appartamenti sono complessi di camere, g deve fissare ogni camera di Σ . Quindi induce l'identità su Σ , per la seconda parte della (G). Ne segue che T induce l'identità su Σ_0 . E la normalità di T in N segue.

Il quoziente $W = N/T$ viene detto *gruppo di Weyl* della coppia di sottogruppi B ed N . Anche l'isomorfismo $W \cong S_{n+1}$, rilevato negli esempi precedenti, discende da considerazioni del tutto generali. Si è visto infatti che gli appartamenti sono complessi di Coxeter (cfr. (b.2), sopra). La seconda parte della (G) garantisce poi che W definisce un gruppo di automorfismi speciali di Σ_0 (vedi Appendice). Per di più, la prima parte della (G) assicura la transitività di N sull'insieme delle camere di Σ_0 . Pertanto W è un gruppo di automorfismi speciali del complesso di Coxeter Σ_0 , transitivo sull'insieme delle camere di Σ_0 . Sicché, per quanto visto in precedenza:

(bn.1) W è un gruppo di Coxeter (anzi: è il gruppo di Coxeter degli appartamenti).

Dalla (B.3) e dalla prima parte della (G) si ricava poi:

(BN.2) $\langle B, N \rangle = G$.

Si prova anzi di più. Precisamente che:

(bn.2) (*Decomposizione di Bruhat*). Risulta $G = \bigcup_{w \in W} BwB$

(ovvio il senso di scritte quali BwB, wB, Bw, wBw', \dots con w, w' e W).

Infatti sia $g \in G$. Per la (B.3), esiste un appartamento Σ che contiene le camere C_0 e $g(C_0)$, e per la (G), esiste un $b \in G$ che porta Σ su Σ_0 e fissa C_0 (e pertanto $b \in B$). Sempre per la (G), esiste un $n \in G$ che porta $b(g(C_0))$ in C_0 e fissa Σ_0 (e pertanto $n \in N$). Infine, nbg fissa C_0 . Sicché $nbg \in B$.

E l'asserto è provato.

La seguente proprietà, benché in apparenza poco espressiva, risulta a postero-

ri assai importante. Segue anch'essa da considerazioni generali.

(BN.3) (come si è visto) W è generato da un insieme finito R di involuzioni.

Per ogni $r \in R$ e per ogni $w \in W$ risulta:

(BN.3.a) $w Br \subset BwB \cup Bwr B$

(BN.3.b) $r Br \neq B$.

Cominciamo col provare la (BN.3.b). La dimostrazione sfrutta in modo essenziale il fatto che operiamo su strutture grasse (cfr. (B.1)). Intanto, $r Br$ è lo stabilizzatore della camera $r(C_0)$, perché r è un'involuzione in W . E $r(C_0)$ è adiacente a C_0 in Σ_0 (si rammenti che W è il gruppo di Coxeter del complesso Σ_0 , e che r è una riflessione in W). Sia $F = C_0 \cap r(C_0)$. Per la (B.1) esiste una terza camera C per F . Per la (B.3) esiste un appartamento Σ contenente C_0 e C , e, per la (B.2), Σ non contiene $r(C_0)$. Per la (G), esiste $b \in B$ che porta Σ_0 su Σ . Sicché b sposta $r(C_0)$, poiché Σ non contiene $r(C_0)$. Pertanto B non stabilizza $r(C_0)$. Sicché $r Br \neq B$.

Proviamo ora la (BN.3.a). Sia $b \in B$, e sia $F = C_0 \cap r(C_0)$. Per la seconda parte della (G), la camera $br(C_0)$ contiene F , ed è, ovviamente, $br(C_0) \neq C_0$. Sia \bar{r} un rappresentante di r e \bar{w} un rappresentante di w in W . Se risulta $r(C_0) = br(C_0)$, è $\bar{r}^{-1} b \bar{r} \in B$, e pertanto $b \bar{r} \in B$. Sicché $\bar{w} b \bar{r} \in B$. E in questo caso siamo a posto. Sia allora $br(C_0) \neq r(C_0)$. Allora $w(C_0)$, $wr(C_0)$ e $\bar{w}br(C_0)$ sono tre camere distinte passanti per $w(F)$. Sia $C_0, C_1, \dots, C_m \supseteq w(F)$ una galleria minimale da C_0 a $w(F)$. Tale galleria è interamente contenuta in Σ_0 , per la (b.1) (dimostrata in precedenza). Sia poi Σ un appartamento contenente C_0 e $\bar{w}br(C_0)$ (un tale Σ esiste per (B.3)). Sempre per la (B.1), Σ contiene tutta la galleria C_0, C_1, \dots, C_m . Sicché, tanto in Σ che in Σ_0 , C_1 è l'unica camera adiacente a C_0 su $C_0 \cap C_1, C_2$ è l'unica camera adiacente a C_1 su $C_1 \cap C_2$ ecc. (si rammenti che, per (B.2), gli appartamenti Σ e Σ_0 sono magri). Ora, esiste per (G) un $b' \in B$ che porta Σ su Σ_0 . E, per la seconda parte della (G), b' fissa ogni elemento di C_0 . Sicché fissa $C_0 \cap C_1$. E pertanto fissa anche C_1 , per quanto sopra detto. Iterando il procedimen

to , si ha infine che b' fissa C_m , e pertanto fissa F (sempre per la seconda parte della (G)). Allora b' porta $\bar{w}br(C_0)$ in una delle due camere $w(C_0)$ e $wr(C_0)$ di Σ_0 che passano per F . Se b' porta $\bar{w}br(C_0)$ in $w(C_0)$, risulta $\bar{w}^{-1}b'\bar{w}b\bar{r}eB$. Da cui $\bar{w}b\bar{r}eBwB$. Se b' porta $\bar{w}br$ in $wr(C_0)$ risulta invece $\bar{w}b\bar{r}eBwrB$. La (B.3.a) è infine provata.

Le condizioni fin qui elencate sulla coppia di sottogruppi B ed N non sono indipendenti. Precisamente: *le (BN.1), (BN.2) e (BN.3) bastano per ricavare le (bn.1) e (bn.2).*

Che da (BN.1),(BN.2) e (BN.3.a) si possa ricavare la (bn.2) è presto visto. Meno facile è dimostrare che le (BN.1)-(BN.3) bastano per ottenere la (bn.1). Rimando al Cap. IV di [4] per una dimostrazione. Qui mi limito ad osservare che nel ricavare la (bn.1) è essenziale il ruolo della (BN.3.b). Del resto, la (BN.3.b) appare come la contropartita diretta dall'assunzione, fatta nella (B.1), di operare su strutture grasse. E tale assunzione è essenziale nel ricavare la (b.2) delle (B.1)-(B.4). E la (b.2) è appunto il corrispettivo geometrico della (bn.1). Non è inopportuno a questo proposito insistere sulla potenza della (B.1); la (B.1) permette, per esempio, di sostituire la (G) con una versione a priori più debole:

(G. bis) Per ogni camera C , lo stabilizzatore B_C in G della camera C opera transitivamente sull'insieme degli appartamenti contenenti C , e fissa ogni elemento di C .

Dalla (G.bis), usando la (B.1), è possibile ricavare la (G). Cominciamo col provare che lo stabilizzatore N_Σ di un appartamento Σ opera transitivamente sull'insieme delle camere di Σ .

Siano C e C' camere adiacenti in Σ , e sia C'' una terza camera per $C \cap C'$ (C'' esiste per la (B.1)). Siano Σ' e Σ'' due appartamenti, uno contenente C e C'' e l'altro contenente C'' e C' . Per la (G.bis) esiste beB_C che porta Σ su Σ' , esiste $b'eB_{C''}$ che porta Σ' su Σ'' e $b''eB_{C'}$ che porta Σ'' su Σ . Allora $b''b'beN$ e porta C su C' . E la transitività di N_Σ sull'insieme delle camere di Σ segue ora dal fatto che Σ è un complesso di camere. Siano ora Σ_1 e Σ_2 due

camere, in Σ_1 e Σ_2 rispettivamente; sia Σ un appartamento contenente C_1 e C_2 . Esiste $b_1 \in B_{C_1}$ che porta Σ_1 in Σ , $n \in N_\Sigma$ che porta C_1 in C_2 e $b_2 \in B_{C_2}$ che porta Σ in Σ_2 . L'elemento $b_2 n b_1$ di G porta allora C_1 in C_2 e Σ_1 in Σ_2 . La (G) è così dimostrata.

Passiamo ora a ricostruire all'interno di G la struttura di V_∞ . Avverto ancora una volta che la costruzione è però affatto generale. Premetto un po' di definizioni. Rammento che ho indicato con R l'insieme delle riflessioni di W . In obbedienza alle convenzioni precedentemente stabilite per i gruppi di Coxeter, dato $J \subseteq R$ poniamo $W_J = \langle r_j \mid j \in J \rangle_W$ e dato $r \in R$ poniamo $W^r = W_{R-\{r\}}$. È previsto (usando la (BN.3.a)) che gli insiemi del tipo BW_JB sono sottogruppi di G (contenenti B , naturalmente). Si prova anzi che:

(bn.3) I sottogruppi H di G contenenti B sono quelli rappresentabili nella forma BW_JB per qualche $J \subseteq R$ (in tal caso è $W_J = (H \cap N)/T$).

(La dimostrazione sfrutta solo le (BN.1)-(BN.3), ma non è affatto banale. Rimando per essa al Cap. IV di [4]). Chiameremo *parabolici fondamentali* i sottogruppi (propri) di G contenenti B . È ovvio che i parabolici fondamentali massimali sono i sottogruppi del tipo BW^rB . Chiamiamo poi *boreliani* i coniugati di B e *parabolici* i sottogruppi propri di G contenenti boreliani (ovvero: i coniugati dei parabolici fondamentali). Poiché G è transitivo sull'insieme delle camere, i boreliani (ovvero: parabolici minimali) sono gli stabilizzatori delle camere.

La ricostruzione della struttura geometrica di partenza (V_∞ nel nostro esempio) dalla struttura di G (suggerisco di tenere presente $GL_{n+1}(K)$ quando si voglia trovare riscontri in fatti familiari per quanto dirò nel seguito) poggia in modo essenziale sulla seguente proprietà, deducibile in via affatto generale:

(g.1) Bandiere distinte hanno in G stabilizzatori distinti.

Siano infatti F ed F' bandiere distinte, e supponiamo, per assurdo, che lo stabilizzatore P_F di F in G sia uguale allo stabilizzatore $P_{F'}$ di F' in G . Indicato con B_C lo stabilizzatore in G di una camera C , si ha $P_F \supseteq B_C \mid C \supseteq F \supseteq G$

e $P_{F'} \supseteq \langle B_C, |C' \supseteq F' \rangle_G$. Siccome poi $F \neq F'$, posso sempre trovare una camera che contenga una delle due bandiere ma non l'altra. Infatti, se F non è incidente ad F' , ogni camera contenente F non contiene F' . Se F ed F' sono incidenti, ciò significa che $F \cup F'$ è una bandiera. Ma siccome $F \neq F'$, $(F-F') \cup (F'-F) \neq \emptyset$. Poniamo sia $a \in F-F'$. Sia \bar{C} una camera contenente $F \cup F'$. Per la (B.2), esiste una camera C adiacente a \bar{C} sulla bandiera $\bar{C}-\{a\}$. E $C \not\subseteq F'$. Possiamo sempre supporre dunque di avere trovato una camera C tale che $F \subseteq C \not\subseteq F'$. Per la (B.3), esiste un appartamento Σ contenente C ed F' . Per la (b.1), Σ contiene ogni galleria minimale da C ad F' . Sia ora $b \in B_C$. Siccome $B_C \subseteq P_F = P_{F'}$, b stabilizza F' . Sicché, se $C = C_0, C_1, \dots, C_m \supseteq F'$ è una galleria minimale da C ad F' , la galleria $C = b(C_0), b(C_1), \dots, b(C_m) \supseteq b(F') = F'$ è minimale da C ad F' . Sicché, per quanto detto sopra, entrambe queste gallerie sono contenute in Σ . Ma b , fissando C , fissa anche la bandiera $C \cap C_1$, per la seconda parte della (G). Sicché $b(C_1) = C_1$, perché Σ è magro. Ne segue che B_C fissa C_1 . Possiamo ora assumere C in ruolo di camera fondamentale e Σ in ruolo di appartamento fondamentale. E contraddiciamo così la (BN.3.b).

Nota - La dimostrazione ora data per la (g.1) dipende visibilmente dalla (BN.3.b), e quindi dalla (B.1). Sicché la possibilità di ricostruire nel gruppo la struttura geometrica di partenza dipende in modo essenziale dalla (B.1). Torneremo su ciò più oltre.

Si ha poi:

(g.2) Gli stabilizzatori dei sottospazi sono i parabolici massimali.

Anche ciò segue solo dalle (B.1)-(B.4) e dalla (G). Intanto, ogni sottospazio è immagine mediante qualche elemento di G di un opportuno sottospazio nella camera fondamentale C_0 . Detti *sottospazi fondamentali* gli elementi di C_0 , possiamo dunque limitarci a verificare che gli stabilizzatori dei sottospazi fondamentali sono i parabolici fondamentali massimali. Ora, C_0 si identifica con l'identità di W (si confronti quanto detto in precedenza su complessi di Coxeter e gruppi di Coxeter), e i sottospazi fondamentali si identificano coi sottogruppi W^r di W .

sono incidenti. Infatti, poniamo per assurdo che $X \notin C$. Lo stabilizzatore B_C di C stabilizza però X , perché $B_C \subseteq P_X$. Ed ora, ripetendo passo passo il ragionamento svolto per provare la (g.1), si ha l'assurdo.

Nota - Anche la dimostrazione della (g.3), procedendo sulla falsariga di quella costruita per la (g.1), usa in modo essenziale la (B.1).

E' dunque possibile ricostruire la struttura geometrica di partenza sul sistema dei parabolici individuati dalla coppia (B,N) . I sottospazi diventano i parabolici massimali, e l'incidenza tra sottospazi si traduce nel requisito che due parabolici massimali si intersechino su un parabolico.

Per completezza, indico qui anche il corrispettivo degli appartamenti. Il corrispettivo dell'appartamento fondamentale Σ_0 è ovviamente il sistema di parabolici $P_{\Sigma_0} = \{w B W^r B w^{-1} \mid w \in W, r \in R\}$. Nell'esempio che si è scelto, anzi, il sistema $\{w B W^{r_0} B w^{-1} \mid w \in W\}$ è il corrispettivo dell'*armatura fondamentale*, sostegno dell'appartamento fondamentale. Siccome poi, per la (G), ogni appartamento Σ è trasformato di Σ_0 mediante un opportuno $g \in G$, il corrispettivo di Σ sarà il sistema $P_\Sigma = g P_{\Sigma_0} g^{-1} = \{g w B W^r B w^{-1} g^{-1} \mid w \in W, r \in R\}$.

Esempio 2) - *Spazi polari e gruppi ortogonali.*

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione m su un campo K di caratteristica $\neq 2$, e ϕ una forma bilineare non degenera e simmetrica su V (molto di quanto dirò vale anche se su ϕ si assumono ipotesi più deboli di queste. Rimando ai cap. VII, VIII e IX di [26] per ogni informazione al riguardo). Due vettori x, y di V sono detti *ortogonali* (in ϕ); o anche ϕ -*allineati* (o, semplicemente, *allineati*, ove non sorgano equivoci), se risulta $\phi(x, y) = 0$. Nel qual caso si usa scrivere $x \perp_\phi y$ o, semplicemente, $x \perp y$. Due sottospazi X, Y di V sono detti *ortogonali* (e si scrive $X \perp_\phi Y$, o $X \perp Y$) se è $x \perp_\phi y$ per ogni $x \in X$ e $y \in Y$. Un sottospazio di V è detto *totalmente isotropo* (per ϕ) se è ortogonale a sé stesso. E' noto che i sottospazi totalmente isotropi massimali hanno una stessa dimensione n , detta *indice di Witt* (della forma ϕ).

E W^r dà anche la stella di camere in Σ_0 contenenti il sottospazio X^r corrispondente a W^r . Sia ora $w \in W^r$ e $b, b' \in B$. Ovvio che $b'(X^r) = b(X^r) = X^r$, perché b e b' , fissando C_0 , ne fissano tutti gli elementi. Inoltre w porta W^r in sé, sicché muta in sé la stella di camere di Σ_0 uscenti da X^r . Pertanto $w(X^r) = X^r$. Sicché BW^rB stabilizza X^r . Del resto, lo stabilizzatore di X^r contiene B , ed è pertanto o un parabolico o tutto G . Ma è immediatamente visto che lo stabilizzatore di X^r non può essere G . Sicché è un parabolico, e contenendo il parabolico massimale BW^rB , deve coincidere con questo.

La scelta che si è effettuata nel nostro esempio per la camera fondamentale permette di scegliere un sistema di indici per le riflessioni r di W che faccia coincidere l'indice di r con la dimensione dei sottospazi stabilizzati da parabolici del tipo BW^rB . Allo scopo basta fare variare l'indice i da 0 ad $n-1$, ed identificare la riflessione r_i con la matrice individuata dalla trasposizione (e_i, e_{i+1}) dei vettori della base. Lo stabilizzatore di $\langle e_0, \dots, e_i \rangle$ è allora $BW^{r_i}B$. Il resto è facile. Ma gli argomenti che si usano nel mostrare questi fatti sono, nell'essenziale, assai più generali di quanto a prima vista non appaia. E' possibile infatti ripartire in *tipi* (nel nostro esempio: dimensioni), coerentemente con la ripartizione in tipi vigente in ogni appartamento in virtù del fatto che questo è un complesso di Coxeter, tutte le varietà, solo usando le (B.1)-(B.4). Tornerò in seguito su ciò. Si tratta di cose per ora di secondaria importanza, ma destinate ad acquistare maggior rilievo più avanti.

(g.3) Due sottospazi sono incidenti se e solo se i loro stabilizzatori si intersecano su un parabolico.

Proviamo il se. Se due sottospazi X e X' sono incidenti, c'è una camera C contenente X e X' . Lo stabilizzatore B_C di C è allora contenuto sia nello stabilizzatore P_X di X che nello stabilizzatore $P_{X'}$ di X' . Sicché $P_X \cap P_{X'}$, contiene il boreliano B_C , e, pertanto, è un parabolico. Viceversa, sia $P_X \cap P_{X'}$ parabolico. C'è allora un boreliano \bar{B} incluso in P_X e $P_{X'}$. Ma ogni boreliano è lo stabilizzatore di una camera. Sia dunque C la camera stabilizzata da \bar{B} (C è individuata da \bar{B} , per la (g.1)). Si ha che $C \supseteq X, X'$; sicché X e X'

Nota - E' facile mostrare che, se il campo K è algebricamente chiuso, allora $2n+1 = m$ se m è dispari e $2n = m$ se m è pari. (Sicché $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ è il massimo valore possibile per m o in ogni caso). Per un controesempio, nel caso che K non sia algebricamente chiuso, basta porre $K = \mathbb{R}$, campo dei reali, e $V = \mathbb{R}^2$, e supporre che ϕ sia l'usuale prodotto scalare. L'indice di Witt di ϕ è allora 0.

Supponiamo di qui in poi che sia $n \geq 2$. Sia ora \mathcal{L}_ϕ il sistema dei sottospazi totalmente isotropi per ϕ , non nulli. Diciamo *codimensione* di un sottospazio X in \mathcal{L}_ϕ la differenza tra n (indice di Witt) e la dimensione di X (in quanto sottospazio di V). Chiamiamo poi *punti* i sottospazi in \mathcal{L}_ϕ di dimensione 1 (in V), e usiamo per di più il termine *sottospazio* per designare solo i sottospazi di V in \mathcal{L}_ϕ , omettendo di qui in poi la specificazione "totalmente isotropo". Basta un po' di pazienza per verificare che valgono su \mathcal{L}_ϕ le seguenti proprietà:

- (P.1) I sottospazi massimali, assieme ai sottospazi in essi inclusi, costituiscono spazi proiettivi di dimensione $n-1$.
- (P.2) Dato un sottospazio massimale X e un punto x fuori di esso, esiste un unico sottospazio massimale Y contenente x e intersecante X su un sottospazio di codimensione 1.
- (P.3) Esistono almeno due sottospazi massimali disgiunti.
- (P.4) L'intersezione di due sottospazi è un sottospazio.

Una qualunque struttura di punti e sottospazi verificante gli assiomi (P.1)-(P.4) viene detta *spazio polare* di rango n (nella (P.1), si concede però la possibilità di geometrie proiettive degeneri). La denominazione è motivata dal fatto che spesso la relazione di ortogonalità \perp_ϕ è detta *polarità*. Altre volte si designa col termine di polarità l'applicazione che ad $x \in V$ associa il sottospazio $\langle x \rangle$ di V costituito dai vettori ortogonali ad x , o l'applicazione indotta da questa sulla geometria proiettiva V_∞ di V . Essenzialmente, è lo stesso.

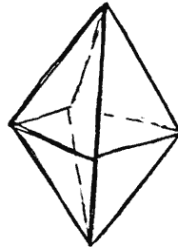
La *dimensione* di un sottospazio in uno spazio polare sarà la sua dimensione in

quanto geometria proiettiva (cfr. proprietà (P.1)), e la sua *codimensione* sarà allora la differenza tra $n-1$ e la sua dimensione. Due sottospazi di uno spazio polare si dicono poi *collineari* (o *allineati* o, anche, *ortogonali*) se esiste un sottospazio che li contenga entrambi. Le seguenti proprietà sono conseguenza delle (P.1)-(P.4) (rimando al cap. VII di [26] per una dimostrazione):

- (p.1) Dato un sottospazio massimale X ed un sottospazio Y disgiunto da X , di dimensione d , esiste un unico sottospazio di X di codimensione d ed allineato con Y . Indichiamo tale sottospazio con $p_X(Y)$.
- (p.2) Dato un sottospazio massimale, c'è sempre un altro sottospazio massimale da esso disgiunto.

Vediamo ora come in uno spazio polare possa definirsi una struttura di complesso di camere e appartamenti, simile a quella rintracciata in V_∞ nell'esempio precedente. Come prima, assumiamo i sottospazi come varietà, e definiamo tra essi un'incidenza mediante l'inclusione. Possiamo allora parlare di bandiere, camere, gallerie ecc. Ed è presto visto che lo spazio polare resta strutturato come un complesso di camere; non è però necessariamente grasso. Restano da scoprire gli appartamenti. Allo scopo, scelto un sottospazio massimale X , sia e_1, \dots, e_n un sistema di punti di X , generante per X . Sia poi Y uno spazio massimale disgiunto da X (un tale Y esiste per la (p.2)). Per ogni $i = 1, \dots, n$, poniamo $X_i = \langle e_j \mid j \neq i \rangle_X$, e sia $\bar{e}_i = p_Y(X_i)$ (cfr.(p.1)). L'insieme dei punti $e_1, \dots, e_n, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$, unitamente alla biezione che associa \bar{e}_i ad e_i (che sia una biezione è presto visto), costituisce ciò che chiameremo un'*armatura*. Un'*appartamento* sarà la sottogeometria dello spazio polare costituita dai sottospazi dello spazio polare generati da insiemi di punti nell'armatura. Dato il rango n di uno spazio polare, è individuata la struttura dei suoi appartamenti. Essi sono infatti tutti isomorfi al seguente spazio polare, '*discreto*'. Si scelga un insieme A di $2n$ oggetti, e si definisca su A una permutazione involutoria p senza punti fissi. Un sottoinsieme non vuoto X di A sarà poi detto *p-compatibile* se $X \cap p(X) = \emptyset$. Il sistema dei sottoinsiemi *p-compatibili* di A fornisce lo spazio polare (discreto) che volevamo. Nel caso $n=2$ è dato dai vertici e dai lati di un quadrangolo

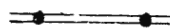
ordinario. Nel caso di $n=3$, dai vertici, dai lati e dalle faccie dell'ottaedro



E' ora quasi immediato controllare che uno spazio polare, strutturato in appartamenti come ho detto ora, verifica le proprietà (B.2)-(B.4) rinvenute nel precedente esempio. Non vale necessariamente la (B.1). Peraltro, esistono spazi polari che soddisfano anche la (B.1), e ciò qualunque valore si assegni al rango n . Siccome la struttura degli appartamenti è individuata dal rango, la proprietà (b.2), rammentata nell'esempio precedente, porta subito che:

(p.3) Gli appartamenti di uno spazio polare sono complessi di Coxeter.

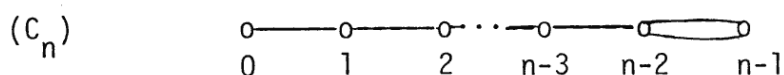
Si assegni come *tipo* ad un sottospazio la sua dimensione. Conveniamo poi di chiamare *tipo* di una bandiera F l'insieme dei tipi dei suoi elementi, e *cotipo* di F l'insieme dei tipi che non rientrano nel tipo di F . Usiamo poi la convenzione, già introdotta in precedenza per i complessi di Coxeter, di rappresentare le incidenze tra varietà di due tipi assegnati rappresentando le varietà di un tipo come vertici, quelle dell'altro come lati, e raffigurando l'incidenza come un'usuale incidenza vertice-lato. Chiamiamo *digono* il poligono degenero:



Per completare la terminologia, chiamiamo *residuo* di una bandiera F il sistema delle varietà incidenti ad F ma non appartenenti ad F , munito della relazione di incidenza. Naturalmente, il residuo di una bandiera F è immediatamente strutturato in bandiere. Sotto questo aspetto, è isomorfo alla *stella* di bandiere contenenti F .

E' ora presto visto che, data in uno spazio polare discreto di rango n una bandiera F di cotipo $\{i, j\}$ ($0 \leq i < j < n$), il residuo di F è un digono se $j-i > 1$, è un triangolo se $n-1 > j$ e $j-i = 1$, ed è un quadrato se $j=n-1$ e $i=n-2$. Sicché, per quanto detto in precedenza a proposito dei complessi di Coxeter, si ha:

(p.4) Lo spazio polare discreto di rango n (è il complesso di Coxeter che) appartiene al diagramma:



(ovvio come diviene tale diagramma per $n=1$ o 2 . Noto poi che al posto della sigla (C_n) è usata altrettanto frequentemente la (B_n) . Le due sigle hanno, sì, sensi diversi, ma solo in riferimento alle lunghezze delle radici in un sistema di radici. E ciò qui non interessa). Il gruppo di Coxeter dello spazio polare discreto di rango n è dunque presentato su involuzioni $s_1 \dots s_n$ dalle identità:

$$(s_i s_j)^2 = 1 \quad \text{per } |i - j| > 1 \quad (s_i s_{i+1})^3 = 1 \quad \text{per } i=1, \dots, n-2$$

$$(s_{n-2} s_{n-1})^4 = 1.$$

Non è difficile indicare in concreto come scegliere le riflessioni s_1, \dots, s_n . Possiamo sempre identificare i punti dello spazio polare discreto di rango n coi numeri da 1 a $2n$ ($2n$ incluso), e supporre che la permutazione involutoria che definisce lo spazio polare porti x in $x+n$ (le somme essendo calcolate modulo $2n$, e scrivendo $2n$ anziché 0). Allora s_i (per $i \leq n-1$) sarà la permutazione $(i, i+1)(i+n, i+1+n)$, e la s_n sarà la trasposizione $(n, 2n)$. Il gruppo di Coxeter dello spazio polare sarà il sottogruppo di S_{2n} generato da queste permutazioni. La verifica è presto fatta. E' intanto immediato verificare che le identità precedenti sono soddisfatte. Con un po' di pazienza, si riesce poi a mostrare che il sottogruppo del gruppo simmetrico S_{2n} ora definito agisce transitivamente sull'insieme delle camere. E, per quanto detto in precedenza sui complessi di Coxeter, ciò basta a garantire che detto gruppo sia proprio il gruppo di Coxeter di diagramma (C_n) .

Passiamo ora alla discussione di due casi notevoli. Torniamo allo spazio polare \mathcal{P}_ϕ costruito a partire dalla forma bilineare ϕ , come all'inizio. E supponiamo che l'indice di Witt n abbia il massimo valore possibile.

Caso 1 - La dimensione m dello spazio vettoriale V è dispari. E' dunque $m=2n+1$, per le ipotesi fatte su n . Si prova allora che il complesso di camera costruito su \mathcal{P}_ϕ verifica, oltre alle (B.2)-(B.4), anche la (B.1). E possiamo riprodurre in

un opportuno gruppo di trasformazioni la struttura di \mathcal{P}_ϕ . Allo scopo, poniamo $G = GO_{2n+1}(K, \phi)$, ove $GO_{2n+1}(K, \phi)$ è il gruppo delle trasformazioni lineari di V in sé che conservano ϕ . (Quanto dirò può estendersi immediatamente al caso in cui $G = PGO_{2n+1}(K, \phi)$, ove $PGO_{2n+1}(K, \phi)$ è il quoziente di $GO_{2n+1}(K, \phi)$ sul suo centro). Non è difficile provare che la condizione (G), riportata nel primo esempio, vale su \mathcal{P}_ϕ e su G . Allora tutta la costruzione data nel primo esempio può ripetersi in questo nuovo caso. Si sceglierà un appartamento Σ_0 come appartamento fondamentale, una camera C_0 in Σ_0 come camera fondamentale, si definirà B come lo stabilizzatore di C_0 , N come lo stabilizzatore di Σ_0 , si porrà $T = B \cap N$, e si riotterranno le (BN.1)-(BN.3), dipendendo queste solo dalle (B.1)-(B.4) e dalla (G). Come nel precedente esempio, *la struttura di \mathcal{P}_ϕ è interamente riproducibile nel sistema dei parabolici della coppia (B,N), dipendendo ciò solo dalle (BN.1)-(BN.3), e dalle (B.1)-(B.4).*

Qui aggiungo solo una descrizione matriciale di B, N e T . Siano $e_1, \dots, e_n, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ i punti dell'armatura che sostiene Σ_0 . Assumiamo di averli dati in ordine così che $e_i \perp e_j$ ($i, j = 1, \dots, n$), $\bar{e}_i \perp \bar{e}_j$ ($i, j = 1, \dots, n$), e $\bar{e}_i = p_{\langle \bar{e}_1, \dots, e_n \rangle}(\langle e_j | j \neq i \rangle)$. Siano ora $u_1, \dots, u_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ vettori di V nelle direzioni individuate da $e_1, \dots, e_n, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$, rispettivamente. I vettori $u_1, \dots, u_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ generano un sottospazio $2n$ -dimensionale di V . Possiamo perciò scegliere un ulteriore vettore u in modo che $u, u_1, u_2, \dots, u_n, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ diano una base di V . In rapporto a tale base ϕ è rappresentata da una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} O_n & M & X^T \\ M & O_n & Y^T \\ X & Y & c \end{pmatrix}$$

ove O_n è la matrice nulla $n \times n$, M è una matrice diagonale invertibile di rango n , c è uno scalare $\neq 0$, e X e Y sono matrici $1 \times n$, e X^T e Y^T sono le loro trasposte. Possiamo poi scegliere opportunamente i vettori $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$, senza mutarne le direzioni, ma in modo che M sia la matrice identica. Possiamo infine scegliere u in modo che sia X che Y siano matrici nulle (e che $c=1$, se il campo K è algebricamente chiuso). Possiamo infine supporre che la camera C_0 sia

la sequenza

$$\langle u_1 \rangle, \langle u_1, u_2 \rangle, \dots, \langle u_1, \dots, u_n \rangle$$

di sottospazi di \mathcal{P}_ϕ . Allora B è costituito da matrici del tipo

$$\begin{bmatrix} A & C & Z' \\ 0_n & (A^T)^{-1} & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & Z & \pm 1 \end{bmatrix}$$

ove A è una matrice superiormente triangolare di rango n, A^T è la trasposta di A, $0_n, 0_{n,1}$ e $0_{1,n}$ sono le matrici nulle $n \times n, n \times 1$ e $1 \times n$, rispettivamente, Z è un'arbitraria matrice $1 \times n$, Z' è la matrice $n \times 1$ ottenuta moltiplicando termine a termine la sequenza Z per la sequenza dei valori sulla diagonale di A, e moltiplicando tutti i termini così ottenuti per ± 1 , e C è una matrice verificante la condizione $(A^{-1}C) + (A^{-1}C)^T = -cZ^T \cdot Z$. Le matrici permutazionabili individuate da permutazioni generate dalle $(u_1, u_{i+1})(\bar{u}_i, \bar{u}_{i+1})$ per $i=1, 2, \dots, n-1$ e (u_n, \bar{u}_n) portano Σ_0 in sé e costituiscono un gruppo isomorfo al gruppo di Coxeter nel diagramma (C_n) (per quanto detto in precedenza) e perciò isomorfo al gruppo di Weyl $W = N/T$ (per la (bn.1), ricavata in precedenza). Ed è presto visto che N è prodotto normale di T per il gruppo delle matrici permutazionali ora descritte. Infine, T è il gruppo delle matrici diagonali individuate da sequenze del tipo $(a_1, \dots, a_n, a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}, \pm 1)$. Il passaggio a $PGO_{2n+1}(K, \phi)$ è immediato: il centro di $GO_{2n+1}(K, \phi)$ è costituito dalle matrici diagonali individuate dalle sequenze $(1, 1, \dots, 1, 1, \pm 1)$. Sicché il toro fondamentale, se si pone $G = PGO_{2n+1}(K, \phi)$, risulta isomorfo al gruppo delle matrici diagonali di rango n. Il boreliano fondamentale B mantiene la stessa descrizione che nel caso di $GO_{2n+1}(K, \phi)$, salvo che ora nell'ultima posizione in basso a destra troviamo sempre 1.

Caso 2 - Sia m pari, ed $n=m/2$. In tal caso si dimostra che la (B.1) è falsa su \mathcal{P}_ϕ . Infatti si prova che, nelle ipotesi assunte, per ogni sottospazio di \mathcal{P}_ϕ di codimensione 1 escono esattamente due sottospazi massimali di \mathcal{P}_ϕ . Tale circostanza si riassume dicendo che lo spazio polare \mathcal{P}_ϕ è *fine*, o *sottile* (preferisco evitare qui il termine "magro", che si presterebbe ad equivoci: "fine" infatti

intende qui qualcosa di più che "magro", e tuttavia di meno che "grasso"; inoltre la definizione di fine si applica solo a spazi polari). Sicché dato il ruolo giocato dalla (B.1) nel ricostruire su un sistema di parabolici la struttura di un complesso di camere, non possiamo sperare di riadattare tali costruzioni al nostro caso. Le difficoltà possono essere evidenziate in modo chiaro. Supponiamo di avere un gruppo G che agisce su \mathcal{P}_ϕ conservando i tipi (le dimensioni, cioè). E ciò avviene senz'altro se G verifica la condizione (G) data all'inizio. Dato un sottospazio Y di codimensione 1, siano X e X' i due sottospazi massimali per Y , e poniamo $F = \{Y, X\}$ e $F' = \{Y, X'\}$. Lo stabilizzatore in G di F stabilizza Y , perché G conserva i tipi. Sicché porta X' in un sottospazio massimale (perché G conserva i tipi) incidente ad Y . Pertanto fissa X' perché \mathcal{P}_ϕ è fine. Sicché F ed F' hanno lo stesso stabilizzatore. La condizione (g.1), dedotta nella discussione del primo esempio, cade, e, con essa, cade la speranza di riprodurre fedelmente la struttura di \mathcal{P}_ϕ in un sistema di parabolici di G , a meno di non cambiare tipo di costruzione.

E' però possibile costruire su \mathcal{P}_ϕ un'altra struttura geometrica, esente dalle pecche cui va soggetto qui \mathcal{P}_ϕ , e che, perciò, si autopropone come la geometria 'giusta' in questo caso.

Fissiamo a caso un sottospazio massimale \bar{X} di \mathcal{P}_ϕ , ed assegnamo ad esso la marca 0. Procediamo quindi a contrassegnare tutti i sottospazi massimali con una marca $i=0$ o 1, partendo da \bar{X} e secondo la seguente regola:

Se Y e Z si intersecano su un sottospazio di codimensione 1 e Y è marcato da i ($=0,1$) allora Z deve essere marcato da $i+1$ (modulo 2).

La seguente proprietà assicura che possiamo assegnare una marca a ciascuno dei sottospazi massimali.

(p.5) Dati due sottospazi massimali Y e Y' , esiste sempre una sequenza di sottospazi massimali $Y = Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_m = Y'$ tale che Y_{i-1} e Y_i si intersecano su un sottospazio di codimensione 1.

Riporto la dimostrazione di tale proprietà, in quanto, rifacendosi ad argomentazioni affatto generali, sarà trasportabile senza sforzo a situazioni diverse da quella qui esaminata, e ciò tornerà assai utile più avanti.

Dati due sottospazi Y e Y' , siano C e C' camere contenenti Y e Y' , rispettivamente. Siccome \mathcal{R}_ϕ è un complesso di camere, possiamo trovare una galleria $C = C_0, C_1, \dots, C_m = C'$. Sia Y_i il sottospazio massimale nella camera C_i ($i=0,1,\dots,m$). La sequenza Y_0, Y_1, \dots, Y_m dà, salvo eventuali ripetizioni, ciò che cerchiamo. (Osservo che è essenziale in questo ragionamento che le camere prendano ciascuna esattamente una varietà (sottospazio) da ogni tipo (dimensione)).

Si dimostra poi che la regola sopra data non produce conflitti (rimando per questo al cap. VII di [26]). I sottospazi massimali restano così ripartiti in due classi disgiunte, contraddistinte dalle marche 0 e 1 rispettivamente. (È poi facile vedere che questa bipartizione non dipende dalla scelta di \bar{X} , se non per lo scambio di 0 ed 1, eventualmente). Assegnamo allora come nuovo tipo il numero $n-1-i$ ai sottospazi massimali contrassegnati da i (per $i=0,1$); cancelliamo tutti i sottospazi di codimensione 1, e manteniamo tutti gli altri, mantenendo ad essi come tipo la loro dimensione (nel caso non siano sottospazi massimali, naturalmente). Su questo nuovo insieme di varietà definiamo una nuova relazione di incidenza, stabilendo che l'incidenza tra due varietà di tipo i e j , con $\{i,j\} \neq \{n-2,n-1\}$, coincide con la vecchia incidenza definita su \mathcal{R}_ϕ , mentre due varietà, di tipo $n-1$ ed $n-2$ rispettivamente, sono dette incidenti se in \mathcal{R}_ϕ si intersecano su un sottospazio di codimensione 1. Chiamiamo $\sigma(\mathcal{R}_\phi)$ la struttura di incidenza così ottenuta. Essa viene detta *complesso orifiamma* di \mathcal{R}_ϕ .

È importante notare che la costruzione ora descritta si applica a qualunque spazio polare fine \mathcal{R}_ϕ , permettendo così di definire il complesso orifiamma $\sigma(\mathcal{R}_\phi)$.

In particolare si applica agli appartamenti di uno spazio polare. Assumiamo allora come appartamenti di $\sigma(\mathcal{R}_\phi)$ i complessi orifiamma degli appartamenti di \mathcal{R}_ϕ . Con un po' di pazienza si prova allora che:

(p.6) Le (B.1)-(B.4) valgono su $\sigma(\mathcal{R}_\phi)$.

Noto che, delle particolarità di \mathcal{R}_ϕ , la dimostrazione usa, oltre al fatto

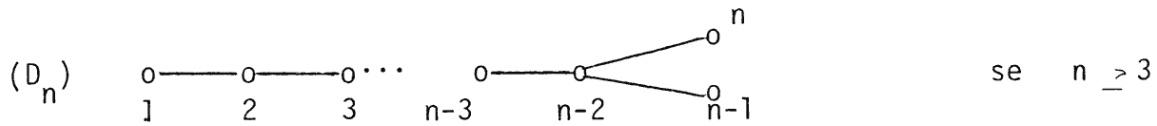
che \mathcal{L}_ϕ è fine, solo il fatto che ogni retta (sottospazio di dimensione 1) in \mathcal{R}_ϕ ha almeno tre punti; e ciò solo per quanto attiene alla dimostrazione della grassezza di $\mathcal{O}(\mathcal{R}_\phi)$ (cfr. (B.1)). Sicché il risultato si estende immediatamente ad ogni spazio polare fine le cui rette contengano tutte almeno tre punti (diciamo: che sia *non degenera*). E se si rinuncia alla pretesa che $\mathcal{O}(\mathcal{R}_\phi)$ sia grasso, allora tutto si estende al caso di un arbitrario spazio polare fine.

Inoltre, siccome gli appartamenti di $\mathcal{O}(\mathcal{R})$ sono individuati da quelli di \mathcal{L}_ϕ , e questi sono individuati dal rango n di \mathcal{R}_ϕ , allora la struttura degli appartamenti di $\mathcal{O}(\mathcal{R})$ dipende solo dal rango n di \mathcal{R} . E siccome per ogni n esistono spazi polari fini non degeneri (basta scegliere la forma ϕ su uno spazio vettoriale di dimensione $2n$, in un campo algebricamente chiuso di caratteristica $\neq 2$), la (p.6) unitamente alla (b.2) (cfr. esempio precedente) mostra che:

(p.7) Dato uno spazio polare fine \mathcal{L} , gli appartamenti di $\mathcal{O}(\mathcal{L})$ sono complessi di Coxeter. In dettaglio: se \mathcal{L} ha rango n , gli appartamenti di $\mathcal{O}(\mathcal{L})$ sono isomorfi al complesso orifiamma dello spazio polare magro di rango n (che, dunque, è un complesso di Coxeter).

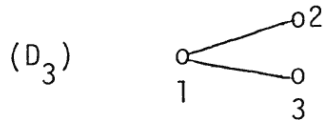
Indicato con \mathcal{O}_n il complesso di Coxeter costituito dal complesso orifiamma dello spazio polare magro di rango n , descriviamone il diagramma. Possiamo farlo descrivendo i residui di bandiere di cotipo $\{i, j\}$ (per $1 \leq i < j \leq n$), per quanto detto all'inizio sui complessi di Coxeter. Ora, finché $j \leq n-2$, oppure $i < n-2$, le cose vanno qui esattamente come nello spazio polare magro. Il residuo di una bandiera di cotipo $\{n-1, n\}$ è poi un digono (rappresentando le varietà di un tipo come vertici e quelle nell'altro come lati). Infatti, fissato un sottospazio X dello spazio polare magro, di dimensione $n-3$, restano utilizzabili solo quattro punti per costruire sottospazi massimali dello spazio polare magro contenenti X . Sicché il residuo cercato è null'altro che il complesso orifiamma dello spazio polare magro di rango 2. E questo è appunto un digono. Il residuo di una bandiera di \mathcal{O}_n di cotipo $\{n-2, n-i\}$ (per $i=0, 1$) è, infine, un triangolo. Infatti, fissato un sottospazio massimale X nello spazio polare magro, sia Y un sottospazio di X di dimensione $n-4$ ($Y=\emptyset$ se $n=3$). $X-Y$ consta di tre punti, ciascuno dei quali, aggiun

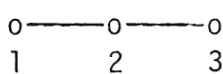
to ad Y , dà un sottospazio di dimensione $n-3$; e ogni coppia di tali punti individua (assieme ad Y ed al punto non ortogonale al rimanente punto della terna) un sottospazio massimale incidente ad X in \mathcal{O}_n . In definitiva: il diagramma di \mathcal{O}_n è:



ed è: $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}$ se $n=2$.

Nel caso $n=2$ si ottiene dunque un digono, e la costruzione sortisce un esito di ben scarso interesse. Nel caso di $n=3$ il diagramma (D_n) diviene:



essenzialmente identico ad (A₃)  (basta mutare la assegnazione dei tipi).

Sicché \mathcal{O}_3 è la geometria proiettiva discreta su quattro punti.

Possiamo ora ricostruire un sistema di riflessioni su cui dare la presentazione del gruppo di Coxeter di \mathcal{O}_n . Siano $e_1, e_2, \dots, e_n, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ i punti dello spazio polare magro di rango n , dati in modo che la permutazione involutoria che definisce tale spazio scambi e_i con \bar{e}_i (per $i=1, \dots, n$). Poniamo $s_i = (e_i, e_{i+1})(\bar{e}_i, \bar{e}_{i+1})$ per $1 \leq i \leq n-1$, ed $s_n = (e_{n-1}, \bar{e}_n)(\bar{e}_{n-1}, e_n)$. Le identità riassunte in (D_n) sono soddisfatte dalle s_1, \dots, s_n . Queste permutazioni conservano poi la struttura di \mathcal{O}_n . Il sottogruppo di S_{2n} da esse generato opera poi transitivamente sull'insieme delle camere di \mathcal{O}_n . Sicché, per quanto detto sui gruppi di Coxeter, il gruppo di Coxeter di \mathcal{O}_n è il sottogruppo di S_{2n} generato dalle s_1, \dots, s_n sopra definite.

E' facile vedere che nel caso di $n=2$ si ottiene il gruppo abeliano elementare di ordine 4. La coincidenza di (D₃) ed (A₃) indica che, nel caso di $n=3$, il sottogruppo di S_6 ora definito coincide con S_4 . Non è difficile esibire in concreto tale

isomorfismo. Siano $X_0 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, e_3\}$, $X_1 = \{\bar{e}_1, e_2, \bar{e}_3\}$, $X_2 = \{e_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, $X_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$. Allora s_i è identificabile con la trasposizione (X_{i-1}, X_i) , per $i=1,2,3$. Il sottogruppo di S_6 generato da s_1, s_2 ed s_3 è il gruppo delle permutazioni sui quattro oggetti X_0, X_1, X_2, X_3 .

Torniamo ora all'esempio che avevamo scelto: \mathcal{L}_ϕ di rango n , V di dimensione $2n$. Assumiamo ora $n \geq 4$. La restrizione non deve stupire, ormai: (D_2) e (D_3) sono i due casi anomali del diagramma (D_n) . Poniamo $G = SO_{2n}(K, \phi)$ o $G = PSO_{2n}(K, \phi)$ (ove $SO_{2n}(K, \phi) = GO_{2n}(K, \phi) \cap SL_{2n}(K)$ e $PSO_{2n}(K, \phi) = SO_{2n}(K, \phi) / Z(SO_{2n}(K, \phi))$). Si può provare che G agisce su $\mathcal{O}(\mathcal{L}_\phi)$ soddisfacendo la condizione (G). Fissato un appartamento Σ_0 in $\mathcal{O}(\mathcal{L}_\phi)$ come appartamento fondamentale e una camera C_0 in Σ_0 come camera fondamentale, siano B lo stabilizzatore di C_0 ed N lo stabilizzatore di Σ_0 . E' ormai ovvio che valgono sulla coppia B ed N le condizioni (BN.1)-(BN.3), sicché è possibile ricostruire $\mathcal{O}(\mathcal{L}_\phi)$ sui parabolici definiti da B .

Ometto la descrizione matriciale di B, N e T : credo sia ormai evidente che aggiungerebbe ben poco a quello che già sappiamo. Ad ogni modo: la descrizione di B e T può ottenersi con calcoli diretti, come nel caso di $GO_{2n+1}(K, \phi)$ esaminato in precedenza. Allo scopo converrà scegliere la base di V_{2n} in modo da farla coincidere con l'armatura di Σ_0 e da portare la matrice di ϕ nella forma:

$$\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

ove I_n ed 0_n sono le matrici identica e nulla, $n \times n$. La descrizione di N si ottiene sfruttando la descrizione del sistema di riflessioni del Gruppo di Coxeter di diagramma (D_n) data sopra, e la descrizione di T .

Naturalmente non è necessario che sia $m=2n+1$ perché \mathcal{L}_ϕ sia grasso. Infatti: (il complesso di camere individuato da) \mathcal{L}_ϕ è grasso se $n < m/2$ (sia m pari o dispari) (cfr. [26], Teorema 8.3.4). Sicché se $n < m/2$ le cose vanno bene non appena si trovi un opportuno gruppo G che agisca su \mathcal{L}_ϕ salvaguardando la condizione (G). Non è detto che a questo scopo basti sempre assumere $G = GO_m(K, \phi)$ (av-

verto che, nell'eventualità che (G) non sia soddisfatta da $GO_m(K, \phi)$, allora (G) è falsa su ogni sottogruppo di $GL_m(K)$ che conservi l'ortogonalità \perp_ϕ ; ciò segue da ben note proprietà delle forme quadratiche). Dò qui un controesempio. Sia K il campo dei reali, $m=6$ e ϕ sia individuata dalla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

L'indice di Witt di ϕ è 2. Consideriamo ora i vettori:

$$\begin{array}{ll} a = (1, 0, 0, 0, 0, 1) & b = (0, 1, 0, 0, 1, 0) \\ a' = (0, 0, 1, 0, 0, 1) & b' = (0, 0, 0, 1, 1, 0) \\ a'' = (0, 0, 0, 1, 0, 1) & b'' = (0, 0, 1, 0, 1, 0) \end{array}$$

E' presto visto che sono isotropi e che $\{a, b, a', b'\}$ e $\{a, b, a'', b''\}$ danno le armature di due appartamenti di \mathcal{Q}_ϕ . Nel primo appartamento le coppie di vettori non ortogonali sono (a, a') e (b, b') , nel secondo sono (a, a'') e (b, b'') . Un calcolo un po' laborioso mostra che non esiste alcun elemento di $GO_6(K, \phi)$ che fissi la camera $\{<a>, <a, b>\}$ e porti il primo appartamento sul secondo. Sicché (G) è falsa su $GO_6(K, \phi)$ e \mathcal{Q}_ϕ .

Nell'esempio ora riportato, è m pari ed $n = (m-2)/2$. E' però $n \geq 4$. A titolo di notizia: la condizione (G) vale su $SO_m(K, \phi)$ e \mathcal{Q}_ϕ non appena $m=2n+2$ ed $n \geq 4$.

Esempio 3) - Spazi polari e gruppi simplettici.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione m su un campo K di caratteristica $\neq 2$, e sia ϕ una forma bilineare antisimmetrica, non degenera. Esattamente come nel caso in cui ϕ era simmetrica, è possibile parlare di ortogonalità (spesso detta *polarità*, anche in questo caso), di sottospazi totalmente isotropi, indice di Witt n , ecc... E, se $n \geq 2$, come nel caso in cui ϕ era simmetrica, \mathcal{P}_ϕ è uno spazio polare. Ora, però, \mathcal{Q}_ϕ è sempre grasso. Mi limito qui al caso in cui

$m=2n$. In tale caso possiamo scegliere come gruppo G il gruppo $\mathrm{GSp}_{2n}(K, \phi)$ delle matrici che conservano ϕ , o il gruppo $\mathrm{PGSp}_{2n}(K, \phi) = \mathrm{GSp}_{2n}(K, \phi) / Z(\mathrm{GSp}_{2n}(K, \phi))$. Vale la condizione (G) su G e \mathcal{D}_ϕ . Osservo che, esattamente come nel caso in cui ϕ era simmetrica, un'opportuna scelta della base di V permette di portare la matrice di ϕ nella forma:

$$\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

$\mathrm{GSp}_{2n}(K, \phi)$ è spesso detto *gruppo simplettico*, e denotato semplicemente con $\mathrm{GSp}_{2n}(K)$.

Che gli esempi sin qui forniti abbiano tutti a che fare in qualche modo con BN-coppie su gruppi algebrici non è del tutto casuale. Ma non mi è possibile approfondire questo aspetto, tanto meno qui. Rimando comunque al cap. 11 di [26].

CAPITOLO 2

(BN-COPPIE ED EDIFICI)

DEFINIZIONI E COSTRUZIONI

La precedente rassegna di esempi ci indica come fondamentali le proprietà (B.1)-(B.4), per l'aspetto geometrico, e le (BN.1)-(BN.3) per l'aspetto gruppale; infine, la proprietà (G) come connettiva di questi due aspetti. Ma prima di risolversi a trasformare tali proprietà in definizioni, occorre chiarire in che misura le assunzioni di finitezza fatte nella (B.1) e nella (BN.3) influenzano la teoria di cui, nella precedente rassegna di esempi, ho esibito qualche parte. La influenzano, in effetti, ma esclusivamente nella pretesa di produrre i complessi di camere semplicemente come complessi di bandiere, riconducendo tutto all'incidenza di varietà. E, benché tale pretesa sia stata incorporata nel senso stesso che si è attribuito al termine "complesso di camere", essa interviene in modo essenziale solo nella definizione dei complessi di Coxeter, così come questa è stata fissata nelle pagine precedenti. Entra anche nella ricostruzione, su un sistema di parabolici, di un complesso di camere verificante le (B.1)-(B.4), nel senso che la ricostruzione si riduce a stabilire una corrispondenza biunivoca tra parabolici massimali e varietà (sottospazi) e a trovare il corrispettivo dell'incidenza tra varietà nel fatto che l'intersezione dei corrispettivi parabolici sia un parabolico. Ma possiamo vedere in ciò solo una semplificazione, autorizzata dal fatto che avevamo assunto che il complesso di camere da ricostruire fosse un complesso di bandiere; tutto quanto dovevamo fare era solo stabilire un isomorfismo tra la costruzione prodotta sui parabolici e il complesso di partenza. E la possibilità di ciò non dipendeva in alcun modo dalle ipotesi di finitezza incorporate nella (BN.3) e nella (B.1). Le cose cambierebbero aspetto quando, presa in un gruppo G una coppia di sottogruppi verificante le (BN.1)-(BN.3), volessimo costruire direttamente un complesso di camere sui parabolici, partendo solo dalla incidenza tra parabolici massimali definita secondo la clausola:

due parabolici massimali sono detti incidenti se la loro
intersezione è un parabolico.

Si presenterebbero allora, nel caso di R infinito, difficoltà analoghe a quelle che si incontrano sui gruppi di Coxeter. Vale la pena di esaminare la cosa in det-

taglio, sia nel caso dei gruppi di Coxeter che nel caso di complessi di camere costruiti su parabolici.

Cominciamo dai gruppi di Coxeter. Dato un gruppo di Coxeter S sulle riflessioni s_i ($i \in I$), si sono scelte come varietà i laterali dei sottogruppi $S^i = S_{I-\{i\}}$. Due varietà (di tali laterali) si dicevano incidenti se avevano intersezione non vuota. Si vorrebbe così poter associare alle bandiere i laterali dei sottogruppi S_J ($J \subseteq I$). In particolare, alle camere verrebbero associati gli elementi di S (laterali di S_\emptyset). Richiamo qui i punti essenziali del procedimento con cui si mostra la possibilità di una tale corrispondenza; avvertirò quando interviene l'ipotesi che I sia finito. Intanto, assegnamo ad ogni varietà xS^i come tipo l'indice i . Si vede facilmente che varietà di ugual tipo sono incidenti (se e) solo se coincidono. Dato poi un sottogruppo S_J e $x \in S$, dovremmo fare corrispondere a S_J la bandiera $\{xS^i \mid i \notin J\}$; ovvero: l'insieme di tutte le varietà contenenti xS_J . Allo scopo occorrerà solo mostrare che, preso un insieme di varietà $\{x_i S^i \mid x_i \in J'\}$, a due a due incidenti, l'intersezione di tali varietà è un laterale del tipo xS_J , per un opportuno $x \in S$ e per $J = I - J'$. Dopodiché sarà ovvio che ogni varietà contenente xS_J è del tipo xS^i per $i \in J'$ (cioè: è una delle varietà nell'insieme di partenza). Tutto ciò che occorre mostrare è che, ferme le ipotesi ora assunte su $\{x_i S^i \mid i \in J'\}$, risulta $\emptyset \neq \bigcap_{i \in J'} x_i S^i$ (dopodiché, si sceglierà x in $\bigcap_{i \in J'} x_i S^i$, e il resto verrà subito). Si usa un lemma: dati $\bar{J}, \bar{J}', \bar{J}'' \subseteq I$, risulta: $S_{\bar{J}} \cap (S_{\bar{J}'} \cdot S_{\bar{J}''}) = (S_{\bar{J}} \cap S_{\bar{J}'}) \cdot (S_{\bar{J}} \cap S_{\bar{J}''})$.

La dimostrazione non sfrutta l'ipotesi che I sia finito (rimando per una traccia all'esercizio 1 del cap. IV di [4]). Da tale relazione si ricava che, dati tre sottinsiemi \bar{J}, \bar{J}' e \bar{J}'' di J e tre elementi x, x' e x'' di S , se i laterali $xS_{\bar{J}}, x'S_{\bar{J}'}$ e $x''S_{\bar{J}''}$ hanno a due a due intersezione $\neq \emptyset$, allora $\emptyset \neq xS_{\bar{J}} \cap x'S_{\bar{J}'} \cap x''S_{\bar{J}''}$ (lascio a chi legge il gusto di ricostruirsi la dimostrazione; questa comunque non dipende dalla struttura di S , se non per il tramite del precedente lemma).

Sia ora $\{x_j S^j \mid j \in J'\}$ un insieme di varietà a due a due incidenti. Se I è finito, allora J' è finito, perché varietà distinte di ugual tipo non sono incidenti.

(Questo è l'unico punto in cui interviene l'ipotesi che I sia finito). Allora è $\bigcap_{j \in J'} x_j S_j^j \neq \emptyset$. La cosa ora segue dalla proprietà precedente, per induzione sulla cardinalità di J' , e sfruttando il fatto che, se $\emptyset \neq x' S_{j'} \cap x'' S_{j''}$, risulta $x' S_{j'} \cap x'' S_{j''} = x S_{j'} \cap x'' S_{j''}$ per qualche $x \in x' S_{j'} \cap x'' S_{j''}$. Nel caso che I sia infinito il ragionamento cade. Dò un controesempio. Sia I l'insieme degli interi positivi. Consideriamo la camera $\{x_i S_i^i \mid i \in I\}$, ove $x_i = \prod_{k=1}^i s_k$. Che di una camera si tratti risulta dal fatto che $\prod_{k=i+1}^j s_k \in S_i^i \cap (\prod_{k=i+1}^j s_k) S_j^j$ per $i < j$. Ma è $\bigcap_{i \in I} x_i S_i^i = \emptyset$. Cade così la possibilità di vedere le bandiere come laterali di sottogruppi del tipo S_J ($J \subseteq I$). Resta dunque da decidere se ridefinire il senso di "complesso di camere" in modo da riottenere la corrispondenza desiderata, o se non si debba piuttosto rinunciare a tale corrispondenza nel caso di rango infinito. Ma la prima alternativa è obbligata. Infatti, nel caso di rango infinito, la relazione di incidenza sopra stabilita tra laterali dei sottogruppi S_i^i nemmeno definisce un complesso di camere. Infatti, sia I come sopra, sia C la camera sopra definita, e sia p una permutazione di I , di periodo infinito. Sia C' la camera costruita con lo stesso criterio della C , ma ordinando I secondo l'ordine indotto da p . Non c'è alcuna galleria che connetta C e C' . La via d'uscita consiste allora nel prendere in considerazione non *tutte* le bandiere, ma per l'appunto solo quelle costituite dalle stelle delle varietà contenenti laterali di sottogruppi del tipo S_J ($J \subseteq I$). Per quanto ora visto, nel caso finito non cambia nulla, e, nel caso generale perdiamo solo bandiere infinite. Ma prima di esaminare in dettaglio le modifiche da apportare nel caso generale, preferisco discutere la questione sui parabolici di una coppia (B, N) di sottogruppi di un gruppo G sulla quale valgono le (BN.1)-(BN.3). Come nel caso dei gruppi di Coxeter, la possibilità di associare biunivocamente parabolici e bandiere dipende dal fatto che l'intersezione di un insieme di parabolici massimali a due a due incidenti sia un parabolico.

Più in dettaglio. Si prova intanto (ovviamente senza ricorrere all'ipotesi che R sia finito) che:

(bn.4) Siano P e P' due parabolici fondamentali e sia $gPg^{-1} \subseteq P'$. Allora è $g \in P'$.

(Rimando al cap. IV di [4] per una dimostrazione).

Sia ora $\{P^i \mid i \in J\}$ un insieme di parabolici massimali, con $P^i = g_i B W^{r_i} B g_i^{-1}$, e $P = \bigcap_{i \in J} P^i$ sia parabolico. Sarà allora $P = g B W_{\bar{J}} B g^{-1}$, per opportuni $g \in G$ e $\bar{J} \subseteq R$. Dalla (bn.4) si ha che $(g_i^{-1})g \in B W^{r_i} B$ per ogni $i \in J$. Da ciò si ha $P^i = g B W^{r_i} B g^{-1}$. E si ottiene che $\bar{J} = R - \{r_i \mid i \in J\}$. Da ciò, usando di nuovo la (bn.4), si ricava che ogni parabolico massimale contenente P è uno dei P^i ($i \in J$). Sicché $\{P^i \mid i \in J\}$ è la stella dei parabolici massimali contenenti P . Sicché la corrispondenza tra bandiere e parabolici è stabilita se solo si riesce a provare che l'intersezione di un insieme di parabolici massimali a due a due incidenti è un parabolico. Ma allo scopo è necessario sfruttare l'ipotesi che R sia finito. Vediamo come. Anche qui avvertirò quando l'ipotesi di finitezza interviene. Occorre intanto definire il *tipo* di un parabolico massimale: si assegnerà come tipo al parabolico massimale $g B W^{r_i} B g^{-1}$ la riflessione r_i , o un suo indice in un sistema di indici per R . Con ragionamenti analoghi a quelli svolti qui sopra, sfruttando la (bn.4), si prova che parabolici massimali di ugual tipo sono incidenti (se e) solo se coincidono.

Consideriamo poi i parabolici del tipo $w B W_J B w^{-1}$ per $J \subseteq R$ e $w \in W$. Siccome questo sistema di parabolici dovrà poi costituire l'*appartamento fondamentale*, lo indico fin da ora con il termine "appartamento fondamentale". Possiamo stabilire un isomorfismo tra l'appartamento fondamentale, ordinato mediante l'inclusione insiemistica, e il sistema dei laterali dei sottogruppi di W del tipo W_J ($J \subseteq R$), ordinato mediante l'inclusione. Ovvero: un isomorfismo tra il complesso di Coxeter di W e l'appartamento fondamentale (il che giustifica, almeno in parte, la terminologia adottata). L'isomorfismo si costruisce associando a $w B W_J B w^{-1}$ il laterale $w W_J$. La corrispondenza è ben posta. Sia infatti $w B W_J B w^{-1} = w' B W_{J'} B (w')^{-1}$. Dalla (bn.4) si ha subito $((w')^{-1})w \in B W_{J'} B$. Da cui $B W_J B = B W_{J'} B$ e, infine, $W_J = W_{J'}$. La $w' W_{J'} = w W_J$ è ora ovvia. E' poi presto visto che la corrispondenza è biunivoca. Resta così stabilito l'isomorfismo desiderato.

Possiamo ora provare che, dati tre parabolici $g_i B W_{J_i} B g_i^{-1}$ ($i=1,2,3$), se essi

si intersecano a due a due su parabolici, allora l'intersezione di tutte e tre è un parabolico. Intanto, coniugando con g_1^{-1} , possiamo ricondurci al caso in cui $g_1=1$. Sia ora $P = g_2 B W_{J_2} B g_2^{-1} \cap g_3 B W_{J_3} B g_3^{-1}$. Per le ipotesi assunte sui $g_i B W_{J_i} B g_i^{-1}$, P è un parabolico. Sicché risulta $P = g B W_J B g^{-1}$ per opportuni $g \in G$ e $J \subseteq R$. Per la (bn.4) risulta $(g_i^{-1})g \in B W_{J_i} B$ per $i=2,3$. Possiamo allora sostituire g_2 e g_3 con g . Per la decomposizione di Bruhat, possiamo porre g nella forma $g = \bar{w} b \bar{w}'$ per opportuni $b, b' \in B$ e $\bar{w} \in N$. Coniugando con b^{-1} ci riconduciamo al caso $g = \bar{w}$. E che $B W_{J_1} B \cap \bar{w} B W_{J_2} B \bar{w}^{-1} \cap \bar{w} B W_{J_3} B \bar{w}^{-1} \neq \emptyset$ segue ora dall'isomorfismo tra l'appartamento fondamentale e il complesso di Coxeter di W , e da quanto visto in precedenza sui gruppi di Coxeter.

Sia ora $\{P^i \mid i \in J\}$ un insieme di parabolici massimali a due a due incidenti. Siccome parabolici massimali distinti di ugual tipo non sono mai incidenti, se R è finito allora J è finito (e questo è l'unico punto in cui interviene l'ipotesi che R sia finito). Allora, usando la proprietà provata poco sopra, e ragionando per induzione sulla cardinalità di J , otteniamo che $\bigcap_{i \in J} P^i$ è parabolico.

Nel caso che R sia infinito, invece, l'isomorfismo tra l'appartamento fondamentale e il complesso di Coxeter di W mostra che si riproducono sui parabolici gli stessi inconvenienti che nei gruppi di Coxeter. Dovremmo dunque rinunciare a considerare tutte le bandiere, e dovremmo scartare alcune bandiere infinite (tutte quelle *non* costituite da stelle di parabolici massimali contenenti un dato parabolico).

Dobbiamo dunque rinunciare ad assumere come punto di partenza, per l'armamentario di definizioni, il concetto di complesso delle bandiere definite da una relazione di incidenza. Una soluzione ovvia: assumere un sottocomplesso del complesso delle bandiere. Per il resto, tutto resta identico. Dovremmo comunque conservare le bandiere costituite da coppie di varietà; per poter ancora trovare un'equivalente per l'incidenza di due varietà nel fatto che dette varietà appartengono ad una stessa bandiera. Ma a questo punto è più semplice assumere ciò direttamente come definizione di incidenza, escludendo l'incidenza dal repertorio dei concetti fondamentali (questa è la via seguita da Tits in [26]). Ci rimane allora un insieme non vuoto V (i cui elementi diremo *vertici*, o anche *varietà*, o *elementi* o *sot-*

Tutto quanto detto su edifici nel primo capitolo resta valido. In particolare restano valide le (b.1)-(b.3)). Per di più:

(b.5) Un edificio è un complesso di bandiere finite.

Si ha infatti dalle (B.3), (b.2) e (b.4) che date in un edificio tre faccie A,B,C a due a due incidenti, AUBUC è una faccia (si applichi (B.3) alle faccie AUB e C). Da ciò la (b.5) segue subito.

DEFINIZIONE DI BN-COPPIA. - Dati due sottogruppi B ed N di un gruppo G, diciamo che B ed N formano una BN-coppia se verificano le condizioni (BN.1),(BN.2) (cfr. cap. 1) e la condizione (BN*.3), ottenuta depennando nella (BN.3) il requisito che R sia finito.

Tutto quanto detto su BN-coppie nel primo capitolo resta valido. In particolare restano valide le (bn.1)-(bn.3).

Sulla connessione tra edifici e BN-coppie, ora. Sia G un gruppo che agisce come gruppo di automorfismi su un edificio $\Gamma = (K, U)$ soddisfacendo la condizione (G). Quanto detto nel primo capitolo mostra come associare a Γ una BN-coppia su G. Indicheremo una tale BN-coppia col simbolo $(B(\Gamma, C_0), N(\Gamma, \Sigma_0))$ per evidenziarne la dipendenza dalla scelta di un appartamento fondamentale Σ_0 di Γ e di una camera fondamentale C_0 in Σ_0 . La costruzione data nel cap. 1 mostra anche come ricostruire Γ direttamente sui parabolici di $(B(\Gamma, C_0), N(\Gamma, \Sigma_0))$. Basterà sostituire il termine "bandiera" col termine "faccia". la (g.1) garantisce la fedeltà della ricostruzione; e la dimostrazione della (g.1) non fa alcun uso dell'ipotesi che K sia un complesso di bandiere. Ma si può far di più. Sia data una BN-coppia (B, N) su un gruppo G. Assumiamo come vertici i parabolici massimali, come faccie i parabolici (o meglio, le stelle di parabolici massimali per parabolici dati), come camere dunque i boreliani, e come appartamenti i coniugati del complesso $\Sigma_0^{con.} = \{w Bw_j Bw^{-1} \mid w \in W, j \in R\}$ (detto appartamento fondamentale). La struttura così ottenuta è un edificio, che indicheremo con $\Gamma_{B,N}^{con.} = (K_{B,N}^{con.}, U_{B,N}^{con.})$ e G agisce su $\Gamma_{B,N}^{con.}$ per coniugazione, soddisfacendo la (G). Possiamo allora considerare la BN-coppia definita da $\Gamma_{B,N}^{con.}$ Σ_0 e B su G, e risulta: $B(\Gamma_{B,N}^{con.}, B) = B$

ed $N(\Gamma_{B,N}^{con.}, \Sigma_0^{con.}) = \bar{N}$ ove $\bar{N} = N\bar{T}$ ed è $\bar{T} = \bigcap_{w \in W} wBw^{-1}$ (ovvio che $N \cap B = T \subseteq \bar{T} \subseteq \bar{N}$, e che $\bar{N}/\bar{T} \cong N/T$).

Dò qui una dimostrazione di quanto sopra asserito. Verifichiamo intanto che $\Gamma_{B,N}^{con.}$ è un complesso di camere. E' intanto ovvio che ogni faccia (parabolico) appartiene a (include) almeno una camera (boreliano): per definizione di parabolico. E' poi presto visto che due boreliani (camere) sono adiacenti se e solo se generano un parabolico del tipo $gB\langle r \rangle Bg^{-1}$, per qualche $r \in R$. Siano ora B_1, B_2 due boreliani. A meno di coniugazioni, possiamo sempre supporre $B_1 = B$. Sarà allora $B_2 = gBg^{-1}$ per qualche $g \in G$. Per la decomposizione di Bruhat, è $g = \bar{b}b'$ per opportuni $b, b' \in B$ e $\bar{b} \in N$. Coniugando con b^{-1} ci riconduciamo al caso in cui $B_1 = B$ e $B_2 = \bar{w}B\bar{w}^{-1}$. Siamo così all'interno di $\Gamma_0^{con.}$. E la possibilità di connettere B_1 e B_2 con una galleria segue dall'isomorfismo tra $\Gamma_0^{con.}$ e il complesso di Coxeter di W , dimostrato in precedenza. Proviamo ora che $\Gamma_{B,N}^{con.}$ è grasso. Consideriamo le camere B, rBr e $brBrb^{-1}$ ($b \in B$ ed $r \in R$). Per la (BN.3.a), è $rBr \subseteq B \cup BrB = B\langle r \rangle B$. Sicché queste tre camere passano tutte per la faccia $B\langle r \rangle B$. E' poi $brBrb^{-1} \neq B \neq rBr$, per (BN.3.b). Poniamo che fosse $brBrb^{-1} = rBr$ per ogni $b \in B$. Allora, per (bn.4), $\bar{r}^{-1}b\bar{r} \in B$ per ogni $b \in B$ e per ogni rappresentante \bar{r} di r in N . Sicché $rBr \subseteq B$. Il ché contraddice la (BN.3.b). Ne segue che $brBrb^{-1} \neq rBr$ per qualche $b \in B$. E, per coniugazione, abbiamo subito che, $\Gamma_{B,N}^{con.}$ è grasso. La (B.2) segue subito dall'isomorfismo tra $\Gamma_0^{con.}$ ed il complesso di Coxeter di W . La (B.3) è ovvia (per coniugazione, e usando la decomposizione di Bruhat, ci si può sempre ricondurre al caso di due camere in $\Sigma_0^{con.}$). Resta da provare la (B.4). Possiamo ricondurci al caso che la camera sia B e uno dei due appartamenti sia $\Gamma_0^{con.}$. Sia P la faccia di cui nell'ipotesi della (B.4), e $\Sigma = g\Sigma_0^{con.}g^{-1}$ l'altro appartamento. Siccome P appartiene a Σ e $\Sigma_0^{con.}$, abbiamo $wBw_Jw^{-1} = P = gw_1Bw_{J_1}w_1^{-1}g^{-1}$ per opportuni $w, w_1 \in W$ e $J, J_1 \subseteq R$. Siccome B è una camera anche per Σ , è $B = gw_2Bw_2^{-1}g^{-1}$ per qualche $w_2 \in W$. Dalla (bn.4) abbiamo allora $gw_2 \in B$ e $w^{-1}gw_1 \in Bw_JB$. Da ciò, intanto, $gw_1Bw_{J_1}w_1^{-1}g^{-1} = gw_1Bw_Jw_J^{-1}g^{-1}$. Sicché $W_J = W_{J_1}$ (per l'isomorfismo tra il complesso di Coxeter

di W e $\Sigma_0^{\text{con.}}$). Si ha allora $w_2^{-1}w_1 \in Bw(Bw_JB)$. Da cui, per l'unicità della decomposizione di Bruhat (cfr. "Groupes et Algebres de Lie", cap. IV, n.2.5, Prop. 2) risulta $w_1ew_2w_J$. E' allora $P=wBW_JBw^{-1} = gw_2wBW_JBw^{-1}w_2^{-1}g^{-1}$. Coniughiamo ora Σ con $w_2^{-1}g^{-1}$. Portiamo così Σ su $\Sigma_0^{\text{con.}}$, tenendo fisso B perché gw_2eB , e portando P in $wBW_JBw^{-1} = P$. Sicché: fissiamo anche P . E' poi presto visto che la coniugazione mediante un elemento di G , se fissa una faccia, allora ne fissa tutti i vertici. E con ciò la (3.4) è provata, assieme alla seconda parte della (G). La prima parte della (G) è ovvia. Resta ora da provare che lo stabilizzatore di B in G è B e lo stabilizzatore $\Sigma_0^{\text{con.}}$ in G è $\bar{N} = N\bar{T}$ ove $\bar{T} = \bigcap_{w \in W} wBw^{-1}$. Che lo stabilizzatore di B in G sia B segue subito dalla (bn.4). Sia ora $g(\Sigma_0^{\text{con.}})g^{-1} = \Sigma_0^{\text{con.}}$. Esiste allora una funzione $f : W \rightarrow W$ tale che $gwBw^{-1}g^{-1} = f(w)Bf(w)^{-1}$.

Per la (bn.4), risulta $g=f(1)b$ per qualche $b \in B$ (uso qui la convenzione di indicare con uno stesso simbolo gli elementi di W e i loro rappresentanti in N). Da ciò $f(1)bwBw^{-1}b^{-1}f(1)^{-1} = f(w)Bf(w)^{-1}$ per ogni $w \in W$, e pertanto $f(w)^{-1}f(1)bw \in B$ per ogni $w \in W$. Cioè: $f(w)^{-1}f(1)bw \in Bw^{-1}$. Da ciò, per l'unicità della decomposizione di Bruhat, $f(w)^{-1}f(1) = w^{-1}$. Sicché $f(w) = f(1)w$. Si ha allora $f(1)wBw^{-1}f(1)^{-1} = f(1)bwBw^{-1}b^{-1}f(1)^{-1}$, per ogni $w \in W$. Infine, $wBw^{-1} = bwBw^{-1}b^{-1}$, per ogni $w \in W$. Da ciò: $wbw^{-1} \in B$ per ogni $w \in W$, per la (bn.4). In definitiva: $b \in \bigcap_{w \in W} w^{-1}Bw$. Ed è $g \in \bar{N}$. Quel poco che resta ora da provare non presenta più difficoltà.

Tutta la dimostrazione precedente dipende in modo essenziale dalla (bn.4), e la (bn.4) è equivalente alla (BN.3.b), sotto le (BN.1), (BN.2) e (BN.3.a). Si è già detto infatti che (bn.4) segue dalle (BN.1), (BN.2) e (BN*.3). Viceversa, valga (bn.4), e sia per assurdo $rBr = B$. Allora è reB per (bn.4). E ciò contraddice le restanti ipotesi (BN.1)-(BN.3.a).

E' però possibile dare un'altra costruzione che prescinde dalla (BN.3.b), ed offre dunque maggiori speranze di potersi adattare ai casi non grassi.

L'idea è semplice. Salta agli occhi la differenza tra la costruzione prodotta nel caso dei complessi di Coxeter e la costruzione di $\Sigma_{B,N}^{\text{con.}}$. Nel primo caso si

usano i laterali, nel secondo i coniugati. E' immediatamente visto che questo secondo metodo non può adattarsi ai gruppi di Coxeter. Viceversa, il primo metodo è affatto generale. Sia data infatti una famiglia $\{X^i \mid i \in I\}$ di sottogruppi di un gruppo. Si ponga $X_j = \bigcap_{i \notin j} X^i$. Si assumano come faccie i laterali (sinistri per fissare le idee) dei sottogruppi X_j , e come relazione d'ordine la duale dell'inclusione. Si ha un complesso di faccie e vertici (i vertici sono dati dai laterali sinistri dei sottogruppi $X_{I-\{i\}} = X^i$). E' poi un semplice esercizio mostrare che il complesso così ottenuto è un complesso di camere se e solo se $X = \langle X_{\{i\}} \mid i \in I \rangle$. La costruzione qui descritta è appunto quella seguita nel caso dei complessi di Coxeter. Trasportandola al caso di una BN-coppia (B, N) in un gruppo G , assumiamo come faccie i laterali dei parabolici fondamentali (anziché i parabolici); e come appartamento fondamentale $\Sigma_0^{\text{lat.}}$ il sistema di laterali $\{wBw_jB \mid w \in W, j \in J\}$. I vertici sono i laterali dei parabolici fondamentali massimali. A B resta assegnato il ruolo di camera fondamentale. Gli appartamenti saranno poi i sistemi del tipo $g \Sigma_0^{\text{lat.}}$, per $g \in G$. Otteniamo così un nuovo complesso strutturato in appartamenti $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}} = (K_{B,N}^{\text{lat.}}, U_{B,N}^{\text{lat.}})$. La dimostrazione che $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$ è un edificio non si discosta nelle linee essenziali da quella data nel caso di $\Gamma_{B,N}^{\text{con.}}$. Con la notevole differenza, però, che dovendo ora operare su laterali e non su coniugati, non abbiamo più alcuna necessità della (bn.4). Si evita così il ricorso alla (BN.3.b), salvo che quando si deve dimostrare che $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$ è grasso, naturalmente. Per il resto, ciò di cui abbiamo bisogno nella dimostrazione è essenzialmente la Prop. 2 del num. 2.5 del Cap. IV di "Groupes et Algebres de Lie", che costituisce una diretta generalizzazione dell'unicità della decomposizione di Bruhat [26], Cap. IV, num. 2.3, Teorema 1), e questa prescinde dalla (BN.3.b). Rimando comunque al num. 3.2.6 di "Buildings of Spherical Type ..." per la dimostrazione diretta del fatto che $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$ è un edificio.

E' poi ovvio quale sia l'azione di G su $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$: G vi agisce per moltiplicazione (a sinistra).

Qui mi limito a poche osservazioni.

Intanto, che la costruzione ora data per $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$ sia effettivamente un caso particolare della costruzione generale descritta prima, segue facilmente dall'isomorfismo tra $\Gamma_0^{\text{lat.}}$ ed il complesso di Coxeter di W . Vediamo quest'ultimo punto. L'isomorfismo si costruirà facendo corrispondere wW_J a $wBW_{J,B}$. Occorre vedere che la corrispondenza è ben posta. Infatti, sia $w'BW_{J,B} = wBW_{J,B}$. Per l'unicità della decomposizione di Bruhat, è $(w')^{-1}w \in W_{J'}$. Da ciò si ha $wBW_{J',B} = w'BW_{J',B}$. Sicché si ottiene $BW_{J',B} = BW_{J,B}$. Di nuovo per l'unicità della decomposizione di Bruhat, risulta $W_{J'} = W_J$. Infine $wW_J = w'W_{J'}$, perché $(w')^{-1}weW_{J'}$. La corrispondenza è dunque ben posta (noto che nemmeno qui si è dovuta usare la (BN.3.b)). Quanto resta da provare si ottiene con argomentazioni elementari.

Le due costruzioni (sui laterali e sui parabolici) danno lo stesso risultato. E' infatti $\Gamma_{B,N}^{\text{con.}} \simeq \Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$ (indirettamente, ciò restituisce una dimostrazione del fatto che il complesso $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$ è un edificio).

L'isomorfismo viene costruito associando al parabolico gBW_JBg^{-1} il laterale $gBW_{J,B}$ del parabolico fondamentale $BW_{J,B}$. Ovvio poi quale debba essere l'effetto di ciò sugli appartamenti. Ovvio ancora che tale corrispondenza porta $\Sigma_0^{\text{con.}}$ su $\Sigma_0^{\text{lat.}}$ e B su B . Proviamo che la corrispondenza è ben posta. Sia $gBW_JBg^{-1} = g'BW_{J',B}(g')^{-1}$. Per la (bn.4) è $g^{-1}g' \in BW_{J',B}$. Da ciò si ha subito $BW_{J',B} = BW_{J,B}$. Infine, $gBW_{J',B} = gBW_{J,B} = g(g^{-1}g')BW_{J',B}$ (perché $g^{-1}g' \in BW_{J',B} = BW_{J,B}$). Sicché $gBW_{J',B} = g'BW_{J',B}$. La dimostrazione che la corrispondenza è biunivoca si ottiene con mezzi elementari. Tutto il resto è ovvio.

Concludendo, la costruzione sui parabolici e quella sui laterali danno lo stesso risultato. La prima appare come più naturale, sugli esempi. Ma necessita di ipotesi più forti della seconda. La seconda è più generale.

Prima di riassumere quanto sin qui visto, è necessario ancora un po' di terminologia. Sia (B,N) una BN-coppia in un gruppo G . La coppia (B,N) si dice *saturata* se $T (= N \cap B) = \bigcap_{w \in W} wBw^{-1}$. Data una BN-coppia (B,N) , si ponga $\bar{T} = \bigcap_{w \in W} wBw^{-1}$, $\bar{N} = N\bar{T}$.

Allora (B, \bar{N}) è una BN-coppia saturata (la cosa è pressoché ovvia), e viene detta la saturazione di (B, N) ; è inoltre $\bar{N}/\bar{T} = \bar{W} \stackrel{\sim}{=} W = N/T$. Date due BN-coppie (B, N) e (B', N') di uno stesso gruppo G , esse si dicono *coniugate* se è $B' = gBg^{-1}$ ed $N' = gNg^{-1}$ per qualche $g \in G$. Intendiamo poi per *edificio coordinatizzato* una terna (Γ, Σ, C) ove Γ è un edificio, Σ un appartamento di Γ e C una camera in Σ . La coppia (C, Σ) sarà detta una *coordinatizzazione* di Γ . (Queste due ultime definizioni non sono reperibili nella letteratura; però qui tornano comode. La scelta del termine "coordinatizzazione" è suggerita dalla considerazione di cosa diviene una coordinatizzazione (C, Σ) nella geometria proiettiva di uno spazio vettoriale). Dirò che due edifici coordinatizzati (Γ, Σ, C) e (Γ', Σ', C') sono *isomorfi* se esiste un isomorfismo di Γ su Γ' che porti Σ su Σ' e C su C' . Ciò premesso:

(g.4) Data una BN-coppia (B, N) su un gruppo G , restano definiti due edifici coordinatizzati $(\Gamma_{B,N}^{\text{con.}}, \Sigma_0^{\text{con.}}, B)$ e $(\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}, \Sigma_0^{\text{lat.}}, B)$, tra loro isomorfi. Il gruppo G agisce per coniugazione su $\Gamma_{B,N}^{\text{con.}}$ e per moltiplicazione (a sinistra) su $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$ e per moltiplicazione (a destra) su $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$, in entrambi i casi soddisfacendo alla (G). Viceversa, dato un edificio coordinatizzato (Γ, Σ, C) e un gruppo G che agisce su Γ come gruppo di automorfismi soddisfacendo alla (G), resta definita su G una BN-coppia (B, N) , ove B è lo stabilizzatore di C ed N lo stabilizzatore di Σ (brevemente: (B, N) è la stabilizzatrice della coordinatizzazione (C, Σ)). E risulta $(\Gamma_{B,N}^{\text{con.}}, \Sigma_0^{\text{con.}}, B) \stackrel{\sim}{=} (\Gamma, \Sigma, C) \stackrel{\sim}{=} (\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}, \Sigma_0^{\text{lat.}}, B)$. Infine, data una BN-coppia (B, N) in un gruppo G , le BN-coppie stabilizzatrici in G delle coordinatizzazioni $(B, \Sigma_0^{\text{con.}})$ e $(B, \Sigma_0^{\text{lat.}})$, di $\Gamma_{B,N}^{\text{con.}}$ e $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$ rispettivamente, coincidono, e danno la saturazione di (B, N) . Date due BN-coppie saturate (B', N') e (B, N) in uno stesso gruppo G , risulta $\Gamma_{B,N}^{\text{con.}} = \Gamma_{B',N'}^{\text{con.}}$ (equivalentemente $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}} = \Gamma_{B',N'}^{\text{lat.}}$) se e solo se (B, N) e (B', N') sono coniugate. Un edificio individua pertanto su un gruppo G che agisca su esso come gruppo di automorfismi soddisfacendo la (G), una classe completa di BN-coppie saturate coniugate. La scelta di una particolare BN-coppia in tale classe corrisponde alla scelta di una coordinatizzazione dell'edificio. La scelta di una di tali

classi complete di BN-coppie saturate coniugate equivale alla scelta di un particolare edificio cui associare G .

C'è poco di quanto elencato qui sopra che già non si sia visto. E quel poco che c'è in più si dimostra con poche battute. Per esempio: che due BN-coppie saturate siano coniugate se definiscono (o provengono da) lo stesso edificio segue subito dal fatto che dare una BN-coppia è lo stesso che dare una coordinatizzazione dell'edificio, e la condizione (G) dice in sostanza che il gruppo agisce transitivamente sulla famiglia delle coordinatizzazioni.

La scelta del termine "coordinatizzazione" si rivela qui abbastanza chiarificatrice. L'esempio delle geometrie proiettive di spazi vettoriali indica nella coordinatizzazione la contropartita sugli edifici della scelta di un sistema di riferimento (cioè: una sequenza, *ordinata*, di assi coordinati). Vista in questa luce, la richiesta formulata nella (G) è più che ragionevole: vi si pretende in fondo null'altro che la transitività sull'insieme dei sistemi di riferimento.

Può essere utile tradurre il contenuto della (g.4) in termini di funtori, aggiunzioni, ecc. Non si tratterebbe però di un banale esercizio. Se non altro perché le usuali definizioni di morfismo tra complessi di camere mal si piegano a questa esigenza. Bisognerebbe modificarle opportunamente. Ma allora occorrerebbe esaminare tutte le conseguenze di tali modifiche. Il concetto di morfismo ne uscirebbe forse chiarificato (e non è che di ciò non vi sia bisogno). Ma non si tratterebbe più di un esercizio appunto.

Il succo che si può trarre dalla (g.4) è che un gruppo dotato di BN-coppie contiene intrinsecamente le proprie interpretazioni geometriche (quelle canoniche, potremmo dire). Ciò tanto più in quanto le BN-coppie possono essere spesso individuate senza la mediazione di un edificio che le produca come stabilizzatrici di una coordinatizzazione.

Per esempio: in un gruppo di Chevalley finito G definito su un campo finito F_q di caratteristica p (ove $q = p^n$), si può scegliere un p -sottogruppo di

Sylow \mathcal{U} e porre $B = N_G(\mathcal{U})$; si ha che l'estensione B di \mathcal{U} si spezza nel prodotto normale di \mathcal{U} e di un complemento T di \mathcal{U} in B . Posto allora $N = N_G(T)$, si ha che B ed N costituiscono una BN-coppia saturata (ed è $T = N \cap B$). Non è difficile vedere che tutte le BN-coppie costituite su G in questo modo sono coniugate.

Nota. - L'edificio $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$ poteva anche costruirsi sui laterali destri, naturalmente. Si passa dall'una costruzione all'altra mediante la corrispondenza:

$gBW_jB \leftrightarrow BW_jBg^{-1}$. La costruzione sui laterali sinistri è però più naturale quando il prodotto di due applicazioni f e g (prima f e poi g) lo si scriva da destra a sinistra, come gf , come appunto faccio in queste note.

CAPITOLO 3

(BN-COPPIE ED EDIFICI)

EDIFICI DI TIPO FINITO ED EDIFICI FINITI

Diciamo *diagramma* $D(\Gamma)$ di un edificio $\Gamma = (K, \mathcal{U})$ il diagramma del suo gruppo di Weyl. Di qui in poi, sia che si rappresenti $D(\Gamma)$ come grafo multiplo sia che lo si pensi come grafo pesato, atteniamoci alla convenzione di non tracciare alcun lato tra due vertici i, j di $D(\Gamma)$ se il peso m_{ij} è 2. Ciò premesso, $D(\Gamma)$ si dirà *irriducibile* se consta di un'unica componente connessa, *riducibile* in caso contrario. L'edificio Γ si dirà *irriducibile* se $D(\Gamma)$ è irriducibile, *riducibile* in caso contrario. Vedremo che gli edifici riducibili si spezzano in 'somme dirette' di edifici irriducibili. Ma occorrono alcune definizioni preliminari.

Intanto, i vertici di $D(\Gamma)$ possono essere assegnati come tipi alle varietà di Γ . Allo scopo si fissi una coordinatizzazione (C, Σ) di Γ . Le varietà in Σ , essendo associate alle riflessioni del gruppo di Weyl di Γ , restano distribuite in tipi corrispondenti ai vertici di $D(\Gamma)$, in modo naturale. Inoltre, per quanto già sappiamo sui complessi di Coxeter, una camera di un complesso di Coxeter prende una varietà in ogni tipo. Resta così definita una biezione τ_C da C sull'insieme dei vertici di $D(\Gamma)$. Presa ora una qualunque altra camera C' , sia Σ' un appartamento per C e C' . Applicando la (B.4) a Σ, Σ', C e C' , posso ricopiare su Σ' la partizione in tipi delle varietà di Σ da cui è stata prodotta τ_C . E' così presto visto che esiste un'unica ripartizione naturale delle varietà di Σ' in tipi che concordi con τ_C . Resta così univocamente determinata una funzione $\tau_{C'}$ da C' all'insieme dei vertici di $D(\Gamma)$. E $\tau_{C'}$ non dipende dalla scelta di Σ' . Sia infatti Σ'' un'altro appartamento per C e C' , e sia $\tau_{C'}'$ l'applicazione da C' a $D(\Gamma)$ indotta da τ_C su C' per il tramite di Σ'' . Se fosse $\tau_{C'}' \neq \tau_{C'}$, applicando la (B.4) prima a Σ, Σ', C, C' , poi a Σ', Σ'', C e C' , poi a Σ'', Σ, C e C' , otterremmo un automorfismo non speciale di Σ che fissa tutte le varietà di una camera (cioè di C). Il che non può accadere, poiché Σ è un complesso di Coxeter. Resta così definita un'applicazione dall'insieme delle varietà di Γ sui vertici di $D(\Gamma)$, che diremo *funzione di tipo basata su C* , e indicheremo con τ^C . Proviamo ora che, date due camere C e C' , se τ^C e $\tau^{C'}$ coincidono su C' , allora coinci

dono su tutto Γ . Si ragiona per induzione sulla distanza tra C e C' . Siano C e C' adiacenti, e C'' sia una qualunque altra camera. Sia Σ'' un appartamento per $C \cap C'$ e C'' , e Σ' , Σ siano appartamenti per C' e C'' e per C e C'' . Sia τ_Σ la funzione naturale di tipo indotta da τ^C su Σ e $\tau'_{\Sigma'}$ quella indotta da $\tau^{C'}$ su Σ' . L'esistenza ed unicità delle τ_Σ e $\tau'_{\Sigma'}$ segue dalle considerazioni precedenti, poiché C appartiene a Σ e C' appartiene a Σ' . Applicando la (B.4) a Σ, Σ'', C'' e $C \cap C'$ e a Σ', Σ'', C'' e $C \cap C'$, ricopiamo τ_Σ e $\tau'_{\Sigma'}$ su Σ'' , ottenendo così due funzioni naturali di tipo $\tau_{\Sigma''}$ e $\tau'_{\Sigma''}$ su Σ'' , che coincidono su $C \cap C'$ e inducono su C'' la τ^C e la $\tau^{C'}$, rispettivamente. Ma $C \cap C'$ coinvolge tutti i tipi di Σ'' , meno uno. Sicché deve essere $\tau_{\Sigma''} = \tau'_{\Sigma''}$. Pertanto τ^C e $\tau^{C'}$ coincidono su C'' . Infine: $\tau^C = \tau^{C'}$. Possiamo ora provare che una funzione di tipo è sempre compatibile coi tipi degli appartamenti (cioè: induce su ogni appartamento una funzione naturale di tipo). Siano infatti C una camera e Σ' un appartamento. Scegliamo una camera C' in Σ' , e consideriamo la funzione di tipo $\tau^{C'}$ individuata dal coincidere con τ^C su C' . Per quanto visto ora è $\tau^C = \tau^{C'}$. Ma $\tau^{C'}$ induce una funzione naturale di tipo su Σ' , per quanto visto poco più sopra (è infatti $C' \in \Sigma'$). E l'asserto è provato. È poi facile vedere che ogni funzione dall'insieme delle varietà di Γ sull'insieme dei vertici di $D(\Gamma)$ che sia compatibile coi tipi degli appartamenti è costruibile come funzione di tipo basata su una (qualunque) camera. Definiamo dunque *funzione di tipo* un'applicazione dall'insieme delle varietà di Γ sull'insieme dei vertici di $D(\Gamma)$, compatibile coi tipi degli appartamenti. Da quanto ora visto, due funzioni di tipo coincidono se coincidono su una camera. E, in genere, due funzioni di tipo differiscono per un automorfismo di $D(\Gamma)$ e individuano la stessa partizione sull'insieme delle varietà di Γ , detta *partizione in tipi*. Tale partizione può facilmente costruirsi per via diretta. Intanto, è presto visto che, assegnata una funzione di tipo τ , una camera prende esattamente una varietà da ogni tipo; che due varietà distinte di ugual tipo non sono mai incidenti; e che, date due varietà, x, y , se esistono due camere C, C' tali che $\{x, y\} = (C - C') \cup (C' - C)$, allora $\tau(x) = \tau(y)$. Definiamo allora una relazione binaria T sull'insieme delle varietà ponendo xTy se $\{x, y\} = (C - C') \cup (C' - C)$ per due opportune camere C e C' . E sia $\theta(T)$

la relazione di equivalenza generata da T . E' immediato verificare che $\theta(T)$ è la partizione in tipi.

E' poi ovvio che la partizione in tipi e l'insieme delle funzioni di tipo si conservano per isomorfismi.

Ovvio che tutte le funzioni di tipo considerate o costruite nei capitoli precedenti (su spazi proiettivi, spazi polari, complessi orifiamma o su $\Gamma_{B,N}^{con.}$ e $\Gamma_{B,N}^{lat.}$) sono funzioni di tipo nel senso ora definito. Sono dunque le uniche funzioni di tipo definibili in tali casi (ciò a meno di automorfismi del diagramma). Così: uno spazio proiettivo, appartenendo al diagramma (A_n) ammette esattamente due funzioni di tipo (si passa dall'una all'altra scambiando i punti con gli iperpiani); uno spazio polare di rango ≥ 3 ha una sola funzione di tipo (ne ha due nel caso di rango 2). Un complesso orifiamma ne ha due se ha rango $\neq 4$ (si passa dall'una all'altra scambiando le marche 1,2 nella suddivisione dei sottospazi massimali dello spazio polare di cui si è costruito il complesso orifiamma). Ne ha 6 se ha rango 4.

Fissata una funzione di tipo τ , possiamo definire il *tipo* di una faccia A come l'insieme $\tau(A)$. Il *cotipo* di A sarà allora il complementare di $\tau(A)$ nell'insieme dei vertici di $D(\Gamma)$. Come nei complessi di Coxeter, un automorfismo di Γ si dirà *speciale* se conserva i tipi. E' ovvio che un gruppo di automorfismi speciali soddisfa la seconda parte della (G). Anzi, da quanto sarà detto nell'Appendice, la (G) è equivalente alla condizione:

(G.bis) G è un gruppo di automorfismi speciali transitivo sull'insieme delle coordinatizzazioni.

Infatti, se un gruppo G agisce su un edificio Γ soddisfacendo la (G), allora soddisfa la (G.bis) nella sua azione su $\Gamma_{B,N}^{lat.}$ (o $\Gamma_{B,N}^{con.}$). Sicché soddisfa la (G.bis) su Γ , perché $\Gamma_{B,N}^{lat.} \cong \Gamma \cong \Gamma_{B,N}^{con.}$.

Torniamo ora alla riducibilità di diagrammi ed edifici.

Intanto, è presto visto che $D(\Gamma)$ è riducibile se e solo se il gruppo di Weyl di Γ si spezza

nella somma diretta di sottogruppi (di Coxeter, nei diagrammi corrispondenti alle componenti connesse di $D(\Gamma)$). Diciamo poi che un complesso di faccie K su un insieme di vertici V è *somma diretta* di due sottocomplessi K_1 e K_2 , sugli insiemi di vertici V_1 e V_2 , e scriveremo $K = K_1 \oplus K_2$, se V è unione disgiunta di V_1 e V_2 e le faccie di K sono le unioni (disgiunte) delle faccie di K_1 e di quelle di K_2 . E' facile vedere che un complesso di Coxeter in un diagramma riducibile è la somma diretta dei sottocomplessi di Coxeter nei diagrammi corrispondenti alle componenti connesse del diagramma dato. Sia infatti S un gruppo di Coxeter in un diagramma $D(S)$ di componenti connesse D_k ($k \in K$). Conveniamo di indicare con lo stesso simbolo D_k sia l'insieme di vertici che il grafo individuati dalla componente connessa D_k di $D(S)$. I sottogruppi S_{D_k} di S sono i gruppi di Coxeter nel diagramma D_k (per $k \in K$), e risulta $S = \bigoplus_{k \in K} S_{D_k}$. Per ogni $k \in K$, il complesso di Coxeter $K(S_{D_k})$ di S_{D_k} è isomorfo alla stella di faccie del complesso $K(S)$ di S contenenti la faccia S_{D_k} , ove si sia posto $D^k = \cup \{D_h \mid h \neq k, h \in K\}$. Dato ora $J \subseteq I = \bigcup_{k \in K} D_k$, poniamo $J_k = J \cap D_k$. Per ogni $x \in S$, risulta $xS_J = \bigcap_{k \in K} xS_{J_k \cup D^k}$. Sia ora $x = \prod_{k \in K} x_k$ la decomposizione di x su $\prod_{k \in K} S_{D_k}$. Possiamo allora associare ad xS_J la sequenza $(x_k S_{J_k \cup D^k} \mid k \in K)$. Il resto è ovvio.

Diciamo poi che un edificio $\Gamma = (K, \mathcal{U})$ è *somma diretta debole* (o, brevemente, *somma diretta*) di due edifici $\Gamma_1 = (K_1, \mathcal{U}_1)$ e $\Gamma_2 = (K_2, \mathcal{U}_2)$ se risulta $K = K_1 \oplus K_2$ ed $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 = \{\Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \mid \Sigma_1 \in \mathcal{U}_1, \Sigma_2 \in \mathcal{U}_2, \Sigma_2 \in \mathcal{U}_2\}$. Diremo poi che Γ è *somma diretta forte* di Γ_1 e Γ_2 se risulta anche $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$.

Si ha allora:

(b.6) Un edificio è riducibile se e solo se è somma diretta di due edifici.

La dimostrazione del "solo se" è facile, benché un po' pesante nei dettagli. Proviamo il "se". Sia $\Gamma = (K, \mathcal{U})$ somma diretta di $\Gamma_1 = (K_1, \mathcal{U}_1)$ e $\Gamma_2 = (K_2, \mathcal{U}_2)$. Sia V_i l'insieme delle varietà di Γ_i ($i=1,2$). Siccome varietà distinte di ugual tipo non sono incidenti, la partizione data da V_1 e V_2 sull'insieme V delle varietà di Γ è una sovrappartizione della partizione in tipi. Sicché, assegnata

in Γ una funzione di tipo τ , $\tau(V_1)$ e $\tau(V_2)$ ripartiscono in due classi disgiunte l'insieme dei vertici di $D(\Gamma)$. Siano ora $i \in \tau(V_1)$ e $j \in \tau(V_2)$, e sia F una faccia di Γ di cotipo $\{i, j\}$ e Σ un appartamento contenente F . Siccome (tanto negli edifici che) nei complessi di Coxeter vale il fatto che tre faccie sono incluse in una stessa faccia se sono a due a due incidenti, possiamo identificare il residuo di F in Σ , così come questo è stato definito nel cap. 1, con la stella $St_{\Sigma}(F)$ di faccie di Σ contenenti F . In $St_{\Sigma}(F)$, ogni faccia di tipo $\tau(F) \cup \{i\}$ è incidente ad ogni faccia di tipo $\tau(F) \cup \{j\}$. Ed è presto visto che, affinché ciò accada, deve essere $m_{ij} = 2$.

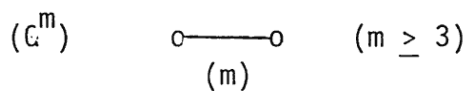
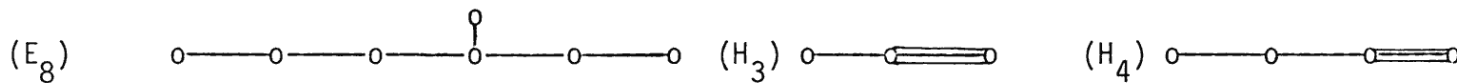
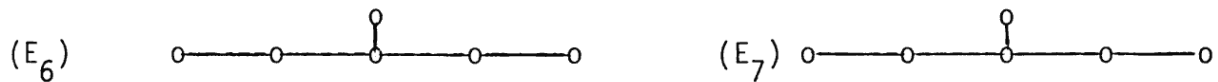
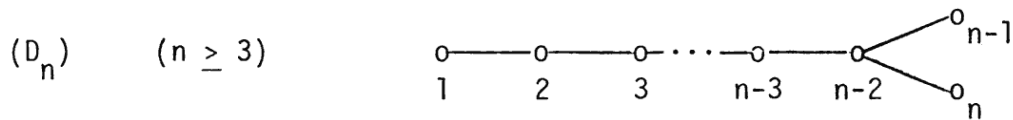
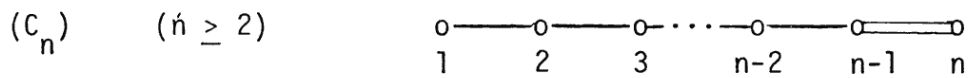
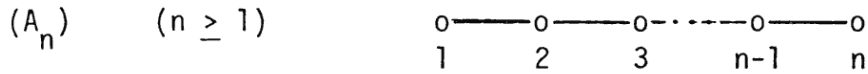
Possiamo dunque ricondurre lo studio degli edifici riducibili a quello degli edifici irriducibili, concentrando l'attenzione su questi. A rigore, tale conclusione non è del tutto corretta, in quanto la definizione di somma diretta (debole) di edifici non permette di ricostruire univocamente le somme dirette sugli edifici 'addendi'. Per inciso, a fatti come questo (e ad altri simili) pensavo quando, alla fine del precedente capitolo, affermavo che il concetto di morfismo tra edifici abbisogna di chiarificazione. Infatti, qui, la definizione utile è quella di somma diretta debole. Mentre un minimo di familiarità con categorie suggerisce che quella 'categorialmente giusta' abbia da essere semai quella di somma diretta forte. Ad ogni modo, se ci limitiamo alla considerazione di edifici di tipo finito (cfr. sotto); queste difficoltà cadono. Su essi infatti somme dirette forti o deboli sono la stessa cosa. Ciò segue dal fatto che (come vedremo più avanti) un complesso che sostenga un edificio di tipo finito ammette un'unica strutturazione in appartamenti. Che poi la somma diretta forte di due edifici (di tipo finito) sia un edificio (di tipo finito) è pressoché ovvio.

Nota - Tutto quanto fin qui detto non usa l'assunzione che gli edifici siano complessi grassi.

Un edificio si dice di *tipo finito* se il suo gruppo di Weyl è finito. Un edificio di tipo finito e irriducibile si dice di *tipo sferico*. Analoga terminologia si stabilisce su complessi di Coxeter e gruppi di Coxeter. Il termine "sferico" è motivato dal fatto che i complessi di Coxeter irriducibili finiti sono tutti producibili come tassellazioni di ipersfere. Rimando per ciò al Cap. VI di [4]. Per esempio

tetraedro ed ottaedro sono gli unici complessi di Coxeter di tipo sferico di rango 3. A questi potremmo aggiungere il cubo; ma è identico all'ottaedro: basta rappresentarne le faccie come vertici ed i vertici come faccie ("faccia" è inteso qui nel senso solito, ovviamente).

E' ben noto che i gruppi (i complessi) di Coxeter di tipo sferico sono tutti e soli quelli nei diagrammi:



Ovvio che $(G^3) = (A_2)$, $(G^4) = (C_2)$ e $(D_3) = (A_3)$. Non si usa dar senso a (G_1) .

Talvolta si usa (B_n) anziché (C_n) , come già ho avuto occasione di ricordare in precedenza.

Di qui in poi l'assunzione che gli edifici siano complessi grassi diventa essenziale. Elenco, senza dimostrazioni, alcuni importanti risultati, dovuti per lo più a Tits.

(b.7) Non esistono edifici di diagramma (H_3) od (H_4) .

(cfr. [26] , Addenda).

(b.8) Gli unici edifici finiti di diagramma (G^m) si ottengono per $m = 3,4,6,8$.

(Ciò risulta, per la parte negativa, da un noto teorema di Feit e Higman. (Cfr. [17])). Per la parte positiva: per $m=3,4$ è ovvia (basta considerare un piano proiettivo non degenere per $m=3$, e uno spazio polare grasso per $m=4$). Per $m=6$ si può considerare una BN-coppia in un gruppo di Chevalley di tipo G_2 su un campo finito. Per $m=8$, si consideri una BN-coppia nel gruppo di Ree 2F_4 .

(b.9) *Gli edifici finiti irriducibili di rango ≥ 3 sono tutti ottenibili da BN-coppie sui gruppi semplici finiti.*

(Cfr. [26], Cap. 11).

Si dirà *rango* di una BN-coppia il rango del suo gruppo di Weyl. La BN-coppia si dirà *irriducibile* se il suo gruppo di Weyl è irriducibile.

Si ha:

(bn.5) *I gruppi finiti semplici dotati di BN-coppie irriducibili di rango ≥ 3 sono gruppi di Chevalley su sistemi indecomponibili di radici o gruppi ottenuti per 'twisting' da questi.*

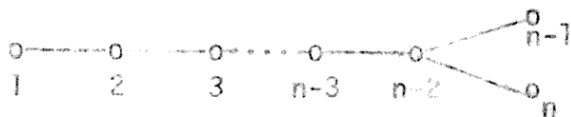
(Cfr. [26]). Viceversa: è ben noto che i gruppi di Chevalley su sistemi indecomponibili di radici e quelli ottenuti da questi per 'twisting' ammettono BN-coppie (si veda, per esempio, [16]).

GENERALIZZAZIONI DEL CONCETTO DI EDIFICIO

Gli ottimi risultati di questo capitolo, se mostrano la profondità della teoria delle BN, suggeriscono che edifici generalizzano anche i limiti in estensione: si direbbe che non sarebbe opportuno tentare di applicare la teoria a cose troppo distanti dai gruppi di Chevalley. E' dunque ragionevole studiare qualche indebolimento del concetto di edificio.

L'idea più ovvia è di lasciare cadere la richiesta che i complessi da considerare siano grassi. Intanto tale ipotesi raramente interviene in modo diretto nelle precedenti costruzioni e dimostrazioni. Interviene principalmente nella costruzione di $\Gamma_{B,N}^{con}$. Ma la si può evitare sostituendo $\Gamma_{B,N}^{con}$ con $\Gamma_{B,N}^{lat}$. Interviene bensì indirettamente, quasi ovunque, tramite la (b.2) del Cap. 1. Ma potremmo sempre assumere la (b.2) come assioma.

Ma, soprattutto, vi sono geometrie ricche di edifici, in tutto simili ad edifici, salvo che non sono grassi. Si è già visto un esempio: lo spazio polare \mathcal{Q}_ϕ di una forma bilineare simmetrica ϕ di rango n su uno spazio vettoriale di dimensione $2n$ su un campo di caratteristica $\neq 2$. Ma c'è di più. La classe degli spazi polari finiti non degeneri di rango n è strettamente legata alla classe degli edifici di tipo (D'_n) . Si è già visto che un complesso orifiamma $\mathcal{O}(\mathcal{Q})$ di uno spazio polare finito non degenero \mathcal{Q} di rango ≥ 3 è un edificio di tipo (D'_n) . Ma la costruzione può invertirsi. Sia dato un edificio \mathcal{O} di diagramma (D'_n) . Assumiamo di avere numerato da 1 a n i vertici del diagramma, come in figura:



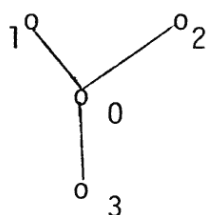
Mutiamo l'attribuzione dei tipi e assegnamo n come nuovo tipo alle varietà già di tipo n od $n-1$. Ma non assegniamo tipo alle altre varietà. Introduciamo poi come nuove varietà \mathcal{O} di tipo $\{n, n-1\}$ e \mathcal{O} di tipo $\{n, n-1\}$ in \mathcal{O} . A sinistra come l'incidenza tra varietà, a destra \mathcal{O} intesa come incidenza tra bandiere e varietà, quando occorre). Assumiamo che negli appartamenti il risultato di

questa costruzione sugli appartamenti di \mathcal{O} . Otteniamo un complesso di camere $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$, strutturato in appartamenti. Valgono le (B.2)-(B.4) su $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$, ma non la (B.1). Per di più, gli appartamenti di $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ sono complessi di Coxeter nel diagramma (C_n) (con l'usuale numerazione di vertici). Di fatto: $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ è (isomorfo a) uno spazio polare fine (non degenerare perché \mathcal{O} è grasso). Vedremo ciò più avanti. E' poi immediato verificare che:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\mathfrak{A}(\mathcal{O})) &\cong \mathcal{O} && \text{per ogni edificio } \mathcal{O} \text{ di tipo } (D_n). \\ \mathfrak{A}(\mathcal{O}(\mathfrak{A})) &\cong \mathfrak{A} && \text{per ogni spazio polare fine (non degenerare) } \mathfrak{A} \text{ di} \\ &&& \text{rango } \geq 3. \end{aligned}$$

(Noto che per dare queste costruzioni e per stabilire questi isomorfismi non c'è bisogno di sfruttare il fatto che \mathcal{O} è grasso e \mathfrak{A} è non degenerare).

V'è un altro esempio simile. Sia \mathcal{O} un edificio di tipo (D_4) , e numeriamo i vertici del diagramma come in figura:



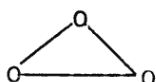
Mutiamo l'attribuzione dei tipi, assegnando alle varietà di \mathcal{O} di tipo $i > 0$ come nuovo tipo 3. Manteniamo il tipo 0 alle varietà di tipo 0. Introduciamo due nuove classi di varietà: le bandiere di \mathcal{O} di tipo $\{i,j\}$ per $1 \leq i < j \leq 3$, cui attribuiamo il tipo 2, e le bandiere di \mathcal{O} di tipo $\{1,2,3\}$, cui assegnamo 1 come tipo. Assumiamo come incidenza la vecchia incidenza di \mathcal{O} (ma solo tra facce o varietà corrispondenti a nuove varietà di tipi distinti). Assumiamo come nuovi appartamenti il risultato di questa costruzione sugli appartamenti di \mathcal{O} . Otteniamo un nuovo complesso $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ strutturato in appartamenti, cui manca solo la grassezza per essere un edificio. Gli appartamenti di $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ sono complessi di Coxeter nel diagramma (F_4) :



Potremo allora definire un *edificio debole* (cfr. [26], Cap. III) come struttura $\Gamma = (K, \mathcal{U})$, ove K è un complesso di camere e \mathcal{U} una famiglia di sottocomplessi di K , detti *appartamenti*, tale che valgano le (B.2)-(B.4).

Vi sono però difficoltà. Non è facile sviluppare molta teoria su questa definizione. Tutto quanto v'è di struttura in Γ è concentrato nel sistema degli appartamenti. Ma le (B.2)-(B.4) da sole non implicano che gli appartamenti siano complessi di Coxeter. Sicché sulla loro struttura sappiamo solo che sono complessi di camere magri. E ciò è troppo poco. Per esempio, vorremmo ancora poter definire il diagramma di Γ , e dovremmo poterlo ricostruire dagli appartamenti, esaminando in essi i residui di bandiere cui manchino due varietà per essere camere, come per i complessi di Coxeter. E potremmo ora pretendere che il diagramma a sua volta individuasse gli appartamenti a meno di isomorfismi (*). Il che comporterebbe che, ogni qual volta si abbiano diagrammi associabili a complessi di Coxeter, gli appartamenti siano appunto complessi di Coxeter. Il ché, caduta la (B.1), non accade. Il controesempio è banale. Ogni complesso di camere magro, strutturato con sé stesso come unico appartamento, è un edificio debole nel senso ora definito. Ma in uno stesso diagramma di Coxeter vi possono essere molti complessi di camere magri che non sono di Coxeter, e ciò basta.

Come esempio, consideriamo il diagramma:



Sappiamo dalla classificazione dei complessi di Coxeter finiti che il complesso di Coxeter in questo diagramma è infinito. Vi sono tuttavia complessi di camere magri finiti che producono questo diagramma. Basta considerare una triangolazione T di un toro o di una bottiglia di Klein tale che per ogni vertice di T escano esattamente 6 triangoli e i triangoli di T siano colorabili in bianco e in nero in modo che triangoli adiacenti abbiano colori opposti. Scegliamo allora i vertici di T come varietà di tipo 0, i triangoli bianchi come varietà di tipo 1 e quelli neri come varietà di tipo 2. Definiamo poi una incidenza tra

(*) Ammetto però che si tratta di una richiesta molto esigente, forse più del dovuto.

tali varietà stabilendo che un vertice e un triangolo siano incidenti se sono incidenti nel senso solito, e che due triangoli si dicano incidenti se sono adiacenti. E' presto visto che si ottiene così un complesso di camere magro, e che il residuo di ogni varietà è un triangolo. Come appunto volevamo. A titolo di notizia: si possono costruire triangolazioni T , verificanti le ipotesi date, con 7,8,9,10,12 vertici, e anche N vertici, per ogni N della forma UV con $u,v \geq 3$, e forse per ogni N . In definitiva, siamo condotti alla seguente definizione: Un *edificio generalizzato* è una struttura $\Gamma = (K, \mathcal{U})$ ove K è un complesso di camere e \mathcal{U} una famiglia di sottocomplessi di K , detti *appartamenti*, tale che: gli appartamenti sono complessi di Coxeter, e valgono le condizioni (B.3) e (B.4) del Cap. I.

Nota - Gli edifici deboli detti qui sopra "generalizzati" non ricevono in [26] alcuna denominazione particolare che li evidenzi tra gli altri edifici deboli. Nell'articolo di Tits [28] vengono invece chiamati addirittura edifici; e con buone ragioni, perché c'è poco della teoria degli edifici che non si estenda agli edifici deboli qui sopra detti edifici generalizzati. La terminologia che qui adotto è solo una banale via di mezzo tra queste due opzioni.

Più o meno tutto di quanto sin qui detto sugli edifici resta valido per gli edifici generalizzati. In particolare restano valide le (b.1)-(b.6) (la (b.2) divenendo parte della definizione). Possiamo parlare di diagramma, funzioni di tipo, automorfismi speciali. Sia poi dato un gruppo G di automorfismi speciali di un edificio generalizzato, transitivo sull'insieme delle coordinatizzazioni. Possiamo scegliere una coordinatizzazione (C, Σ) , e considerarne la coppia stabilizzatrice (B, N) . Come nel primo esempio del Cap. I, possiamo dimostrare che valgono su (B, N) le condizioni (BN.1), (BN.2), (bn.1) e (BN.3.a). Ciò suggerisce di definire una *BN-coppia generalizzata* come una coppia (B, N) di sottogruppi di un gruppo G , tale che: $\langle B, N \rangle = G$, posto $T = B \cap N$ è $T \triangleleft N$ e posto, $W = N/T$, il gruppo W è un gruppo di Coxeter e, detto R un sistema di riflessioni per W , vale la condizione (BN.3.a).

Tutto quanto detto sui nessi tra edifici e BN-coppie si trasporta ad edifici generalizzati e BN-coppie generalizzate, salvo rinunciare alla costruzione

$\Gamma_{B,N}^{con.}$, sostituendola con $\Gamma_{B,N}^{lat.}$. Dato però un edificio generalizzato coordinatizzato (Γ, Σ, C) , e un gruppo G che agisca su Γ come gruppo di automorfismi speciali transitivo sull'insieme delle coordinatizzazioni di Γ , e indicata con (B, N) la BN-coppia generalizzata stabilizzatrice di (C, Σ) , non possiamo esibire l'isomorfismo tra (Σ, Γ, C) e $(\Gamma_{B,N}^{lat.}, \Sigma_0^{lat.}, B)$ considerando gli stabilizzatori in G di faccie di Γ . La costruzione dell'isomorfismo è più indiretta, mediata dal complesso di Coxeter $K(W)$ di W . Come nell'esempio 1 del Cap. 1, si mostra che $\Sigma \cong K(W)$. Come nel Cap. 2, si mostra che $\Sigma_0^{lat.} \cong K(W)$. In tali isomorfismi, il semplice delle faccie di Σ incluse in C (brevemente: delle faccie di C) corrisponde al semplice costituito dai sottogruppi di W del tipo $W_J (J \subseteq R)$ (ovvero: al semplice delle faccie della camera 1 di $K(W)$), e questo corrisponde al semplice dei parabolici fondamentali (ovvero: al semplice delle faccie della camera B di $\Sigma_0^{lat.}$). Con ciò, è poi facile costruire l'isomorfismo desiderato, estendendo la corrispondenza contemporaneamente su $\Gamma_{B,N}^{lat.}$ per moltiplicazione a sinistra e su Γ mediante l'azione di G . Tralascio i dettagli, ormai facili. Qui mi limito ad osservare come questa costruzione poggi in modo essenziale sul gruppo di Weyl W , e quindi sul fatto che gli appartamenti (ci sono e) possono prodursi come complessi su opportuni gruppi (qui, di Coxeter).

Ignoro se il termine "BN-coppia generalizzata" ora introdotto sia reperibile nella letteratura. Ad ogni modo, qui torna comodo. Do alcuni esempi di BN-coppie generalizzate.

Intanto, un esempio banale: sia G estensione di un sottogruppo normale B mediante un gruppo di Coxeter W . E sia N un qualunque sottogruppo di G tale che $N/(B \cap N) \cong W$. Allora (B, N) dà una BN-coppia generalizzata che non è una BN-coppia. La saturazione di (B, N) è (B, G) . Tale esempio è meno artificiale di quel che sembri. Sia infatti (B, N) una BN-coppia di diagramma (A_n) , in un gruppo G . Vedremo più oltre che $\Gamma_{B,N}^{lat.}$ è una geometria proiettiva, eventualmente degenera. E siccome G è transitivo sull'insieme delle camere di $\Gamma_{B,N}^{lat.}$, allora $\Gamma_{B,N}^{lat.}$ o è una geometria proiettiva ordinaria o è la geometria proiettiva discreta. Nel

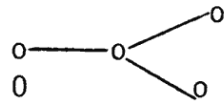
primo caso, $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$ è grasso, sicché (B,N) è una BN-coppia. Nel secondo caso è $B \triangleleft G$, e G/B è il gruppo di Coxeter di diagramma (A_n) .

Sia invece data in un gruppo G una BN-coppia generalizzata (B,N) di diagramma (C_n) . Allora, come vedremo nel seguito, $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$ è uno spazio polare. E per la transitività di G sull'insieme delle camere di $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$, una delle seguenti condizioni vale su $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}}$:

- 1) E' lo spazio polare magro.
- 2) E' uno spazio polare grasso.
- 3) E' uno spazio polare fine non degenerare.
- 4) I sottospazi massimali individuano geometrie proiettive discrete, ma da ogni sottospazio di codimensione 1 escono più di due sottospazi massimali.

Nel primo caso è $B \triangleleft G$, e G/B è il gruppo di Coxeter di diagramma (C_n) . Nel secondo caso (B,N) è addirittura una BN-coppia. Passiamo al terzo caso. Se $n=2$, è difficile dire in generale qualcosa su (B,N) . Supponiamo ora $n \geq 3$. La corrispondenza tra spazi polari fini non degeneri ed edifici di diagramma (D_n) mostra che $\Gamma_{B,N}^{\text{lat.}} = \mathcal{L}(\mathcal{O})$ per un opportuno edificio \mathcal{O} di diagramma (D_n) . E' poi presto visto che ogni automorfismo di \mathcal{O} induce sul diagramma di \mathcal{O} un automorfismo, di modo che il gruppo \bar{G} di tutti gli automorfismi di \mathcal{O} può rappresentarsi sul diagramma come un sottogruppo del gruppo G_{dg} degli automorfismi del diagramma. Il nucleo di tale rappresentazione è il gruppo G_{sp} degli automorfismi speciali di \mathcal{O} , che ovviamente è normale in \bar{G} . Usando i risultati del Cap. IV di [26] si può provare, con un po' di pazienza, che \bar{G} induce sul diagramma il gruppo G_{dg} . Sicché \bar{G} è estensione di G_{sp} mediante G_{dg} . Supponiamo ora $n \neq 4$. In tal caso G_{dg} ha ordine 2. E' poi presto visto che \bar{G} restituisce su $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ il gruppo di tutti gli automorfismi (ora necessariamente speciali, perché (C_n) non ha automorfismi propri), e che \bar{G} è transitivo sull'insieme delle coordinatizzazioni di $\mathcal{L}(\mathcal{O})$. La stabilizzatrice in \bar{G} di una coordinatizzazione di $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ è una BN-coppia generalizzata, che non è una BN-coppia perché $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ non è grasso. La BN-coppia generalizzata di partenza (B,N) dovrà essere rappre-

sentabile su una sotto-BN-coppia (generalizzata) opportuna di una di quelle ora individuate in \bar{G} . Nel caso di $n=4$, invece, G_{dg} è il gruppo simmetrico S_3 . Mettiamo allora in evidenza un vertice esterno del diagramma (D_4) , marcandolo con 0 come in figura:



con l'intesa che nella costruzione di $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ le varietà di tipo 0 saranno poste in ruolo di punti. Sia G_0 lo stabilizzatore di 0 in G_{dg} , e consideriamo l'estensione \bar{G}_0 di G_{sp} mediante G_0 . Il gruppo \bar{G}_0 restituisce su $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ il gruppo di tutti gli automorfismi. E ora tutto è come prima. E' utile confrontare queste costruzioni con concetti più consueti, nel caso di $n=3$. Siccome (D_3) è lo stesso che (A_3) , l'edificio \mathcal{O} è ora una geometria proiettiva non degenera di dimensione 3 (anche ciò risulterà da quanto dirò più avanti). Lo spazio polare $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ si ottiene prendendo come nuovi piani le reti di rette di \mathcal{O} su un piano di \mathcal{O} e le stelle di rette di \mathcal{O} per un punto di \mathcal{O} (ovvero: i punti e i piani di \mathcal{O} sono i piani di $\mathcal{L}(\mathcal{O})$), come rette di $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ i fasci di rette di \mathcal{O} su un piano di \mathcal{O} per un suo punto (ovvero: le rette di $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ sono le coppie costituite da un piano di \mathcal{O} e da un punto di \mathcal{O} incidenti), e come punti di $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ le rette di \mathcal{O} . Si vede facilmente che gli appartamenti di $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ corrispondono ai tetraedri di \mathcal{O} . Il gruppo \bar{G} di tutti gli automorfismi di \mathcal{O} (ovvero: il gruppo degli automorfismi di $\mathcal{L}(\mathcal{O})$) è il gruppo costituito da tutte le collineazioni e tutte le 'polarità' di \mathcal{O} (intendo ora polarità come collineazione da \mathcal{O} al suo duale). Do ora pochi cenni sul caso in cui $n \geq 4$. In tal caso dal num. 8.4.3 di [26] si ha che $\mathcal{L}(\mathcal{O})$ può pensarsi come lo spazio polare \mathcal{L}_ϕ di una forma bilineare simmetrica non degenera ϕ di indice di Witt n in uno spazio vettoriale V di dimensione $2n$. Mi limito a notare che il gruppo delle collineazioni di V_∞ che conservano l'ortogonalità $\frac{1}{\phi}$ non è transitivo sull'insieme delle coordinatizzazioni di $\mathcal{L}(\mathcal{O})$. Infatti possiamo sempre prendere una opportuna base u_1, \dots, u_{2n} di V in modo da portare la matrice di ϕ nella forma:

edifici, di diagramma (A_n) e (C_n) rispettivamente. Gli edifici di diagramma (D_n) sono i complessi orifiamma di spazi polari fini non degeneri di rango n .

Che gli spazi proiettivi siano edifici generalizzati di diagramma (A_n) si è già visto, in sostanza, nell'esempio 1 del Cap. I: lo studio ivi svolto su V_∞ è infatti facilmente generalizzabile a geometrie proiettive arbitrarie, anche degeneri (purché di dimensione finita). Che gli spazi polari diano luogo ad edifici generalizzati di diagramma (C_n) si è già visto nell'esempio 2 del Cap. I. Rimando ai Cap. VI e VII di [26] per una dimostrazione del fatto che gli edifici di diagramma (A_n) e (C_n) sono geometrie proiettive e spazi polari, rispettivamente. Riporterò più oltre una versione leggermente diversa di tale dimostrazione. In ogni caso, supposto di avere numerati i tipi da 0 ad $n-1$ in modo naturale, da sinistra a destra nel diagramma, si assumeranno le varietà di tipo d come sottospazi d -dimensionali, e si identificheranno con gli insiemi delle varietà di tipo 0 (punti) ad esse incidenti. La parte della (b.10) che riguarda (D_n) si è praticamente già vista nell'inizio di questo capitolo (non v'era alcun bisogno della grassezza, infatti). La parte della (b.10) che riguarda edifici e casi non degeneri è ovvia.

Rimando al num. 10.13 di [26] e all'articolo di A.M.Cohen [11] per gli edifici generalizzati di diagramma (F_4) . Non mi è nota una caratterizzazione elementare per gli edifici generalizzati nei diagrammi $(E_6), (E_7), (E_8)$ ed $(H_3), (H_4)$, ove si intende elementare' una caratterizzazione che faccia riferimento solo a classiche proprietà di incidenza su punti, sottospazi, ... o a costruzioni esprimibili in questo linguaggio, senza dover fare riferimento a diagrammi e, tantomeno, ad appartamenti. Per una caratterizzazione parzialmente elementare degli edifici generalizzati nei diagrammi $(E_6), (E_7)$ ed (E_8) rimando alla parte finale dell'articolo di Tits [28], citato poco più sopra. In tale articolo si forniscono anche caratterizzazioni simili per gli edifici generalizzati negli altri diagrammi di tipo sferico, ad eccezione dei diagrammi (H_3) ed (H_4) , che anche per questo aspetto si rivelano dunque eccezionali (cfr. (b.7) del Cap. III). Sugli edifici generalizzati nei diagrammi $(E_6), (E_7)$ ed (E_8)

$$\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

(0_n ed I_n sono le matrici nulla ed identica, $n \times n$). Poniamo poi $v_i = u_i$ per $i \neq n+1, 2n$; e $v_{n+1} = u_{n+1} - u_n$ e $v_{2n} = u_{2n} + u_1$. Le sequenze (u_1, \dots, u_{2n}) e (v_1, \dots, v_{2n}) individuano le armature di due appartamenti Σ e Σ' di \mathbb{P}^1_ϕ , contenenti entrambi la camera $C = \{ \langle u_1 \rangle, \langle u_1, u_2 \rangle, \dots, \langle u_1, \dots, u_n \rangle \}$. Non v'è alcuna collineazione di V_∞ che porti Σ in Σ' tenendo fissa C e conservando l'ortogonalità (ciò si vede con un po' di calcoli).

Tralascio di discutere il quarto caso. Vediamo piuttosto un altro esempio.

Sia \mathcal{O} un edificio di tipo (D_4) , e \bar{G} il gruppo dei suoi automorfismi. Dalla costruzione dell'edificio generalizzato $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ si vede facilmente che \bar{G} dà un gruppo di automorfismi speciali di $\mathcal{M}(\mathcal{O})$, transitivo sulle coordinatizzazioni di $\mathcal{M}(\mathcal{O})$. La stabilizzatrice di una tale coordinatizzazione dà in \bar{G} una BN-coppia generalizzata di diagramma (F_4) , che non è una BN-coppia perché $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ non è grasso.

Gli esempi precedenti non autorizzano certo conclusioni. Resta comunque l'impressione che le BN-coppie generalizzate, quando non siano banali, siano in qualche modo imparentate ad edifici; quindi non ci saremmo allontanati molto dalle BN-coppie. Pur con tutte le dovute cautele, analoga impressione può trarsi dai seguenti risultati.

Come ho fatto finora, col termine *geometria proiettiva (o spazio proiettivo)* mi riferisco anche alle geometrie proiettive degeneri (in cui cioè vi sono rette con due soli punti). Si ha:

(b.10) Gli edifici generalizzati di diagramma (A_n) sono le geometrie proiettive di dimensione n . Gli edifici generalizzati di diagramma (C_n) sono gli spazi polari di rango n . Gli edifici generalizzati di diagramma (D_n) sono i complessi orifiamma di spazi polari fini di rango n . Le geometrie proiettive non degeneri e gli spazi polari grassi corrispondono agli

tornerò più oltre. Qui voglio invece fare notare come, nel caso degli edifici, la forma dei diagrammi (E_6) , (E_7) , (E_8) e (D_n) (quando $n \geq 4$) racchiuda un'informazione insospettatamente ricca; essenzialmente per la presenza nel diagramma di un vertice da cui escono tre lati. Illustrerò qui il succo della questione. Occorrono però alcune definizioni preliminari.

Intanto è ovvio cosa si intenderà per *residuo* di una faccia F in un complesso di camere K ; generalizzando quanto stabilito su complessi di Coxeter, diremo residuo di F in K la stella delle facce di K contenenti F . Nel caso che K sia un complesso di bandiere (in particolare: se K sostiene un edificio generalizzato di rango finito) possiamo identificare il residuo di F con il sistema delle varietà incidenti ad F e non appartenenti ad F , munito della relazione di incidenza indotta su esso dall'incidenza definita su K . Indicheremo il residuo di F con $St_K(F)$ (oppure con $R_K(F)$ o anche con K_F ; usando di preferenza queste ultime due notazioni quando, sempre che sia possibile, vogliamo vedere il residuo di F come sistema di varietà). Si ha che:

(b.11) Il residuo di una faccia F in un edificio generalizzato $\Gamma = (K, \mathcal{U})$ sostiene un edificio generalizzato $\Gamma_F = (St_K(F), \mathcal{U}_F)$ ove è $\mathcal{U}_F = \{St_\Sigma(F) \mid \Sigma \in \mathcal{U} \text{ e } F \in \Sigma\}$. Data una funzione di tipo τ su Γ , il diagramma di Γ_F si ottiene dal diagramma $D(\Gamma)$ di Γ cancellando i vertici in $\tau(F)$. Le funzioni di tipo di Γ_F sono le restrizioni a Γ_F delle funzioni di tipo di Γ .

(Rimando per la dimostrazione al cap. III di [26]). La (b.11) ha importanza notevole. Su di essa si appoggia ogni argomentazione per induzione sul rango quando si abbia a che fare con edifici generalizzati di rango finito).

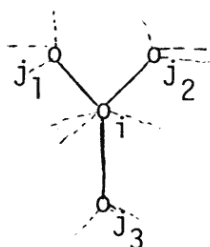
Ciò premesso, dalle (b.10) e (b.11) si ha subito che, se i e j sono congiunti in $D(\Gamma)$ da un lato semplice, il residuo di una faccia F di cotipo $\{i, j\}$ è un piano proiettivo (non degenerare se Γ è un edificio). E dati tre vertici i, j, k in $D(\Gamma)$ tali che i e j e k siano congiunti da lati semplici in $D(\Gamma)$, ma i e k non siano congiunti da alcun lato in $D(\Gamma)$, il residuo di una bandiera F di cotipo $\{i, j, k\}$ è (sempre per (b.10) a (b.11)) uno spazio proiettivo 3-dimensionale (desarguesiano se Γ è un edificio).

Assumiamo ora che Γ sia un edificio di rango finito $n \geq 3$, irriducibile, e tale che tutti i lati di $D(\Gamma)$ siano semplici e non vi siano 3-cicli in $D(\Gamma)$ (come appunto accade per i diagrammi $(E_6), (E_7), (E_8), (D_n)$ ed (A_n)). [curiosamente questa ipotesi compare altrove : cfr. (gd.19) del cap. 7].

Per ogni scelta dei tipi i, j congiunti in $D(\Gamma)$, per ogni bandiera F di cotype $\{i, j\}$, Γ_F è un piano proiettivo desarguesiano. Infatti, sia k un tipo $\neq i, j$ e congiunto ad i o a j in $D(\Gamma)$. Un tal k esiste perché $n \geq 3$ e $D(\Gamma)$ è irriducibile. Inoltre k è congiunto ad uno solo dei due tipi i e j , perché $D(\Gamma)$ non contiene 3-cicli. Poniamo che k sia congiunto a j . Allora non è congiunto ad i , perché $D(\Gamma)$ non contiene 3-cicli. Sicché, se x è la varietà in F di tipo k , $\Gamma_{F-\{x\}}$ è uno spazio proiettivo 3-dimensionale, non degenere (e perciò desarguesiano) perché Γ è un edificio. Ma Γ_F è un piano di tale spazio. Sicché Γ_F è desarguesiano. Indichiamo ora con K_{ij}^F il corpo che coordinatizza Γ_F , quando si pongano le varietà di tipo i in ruolo di punti. Proviamo ora che il corpo K_{ij}^F non dipende da F , ma solo da i e j . La cosa si prova per induzione su n . Se $n = 3$ è ovvia, perché le ipotesi assunte su $D(\Gamma)$ mostrano che è, in tal caso, $D(\Gamma) = (A_3)$. Sia dunque $n > 3$. Sia k un tipo distinto da i e j e congiunto in $D(\Gamma)$ ad i o j . Supponiamo che k sia congiunto a j (e quindi non ad i). Siano F ed F' due bandiere di cotype $\{i, j\}$, e siano x, x' le varietà di tipo k in F ed F' , rispettivamente. Con lo stesso ragionamento impiegato per ricavare la (p.5) del Cap. I, si prova che esiste una sequenza $x = x_0, y_0, x_1, \dots, x_{m-1}, y_m, x_m = x'$ di varietà, di tipo k ed h alternativamente, ciascuna incidente alla successiva. Per ogni $t = 0, 1, \dots, m-1$, scegliamo due bandiere G_t e \bar{G}_t di cotype $\{h, k, i, j\}$, incidenti alle bandiere $\{x_t, y_t\}$ e $\{y_t, x_{t+1}\}$, rispettivamente, e scegliamo una bandiera G_m di cotype $\{h, k, i, j\}$ incidente a $\{y_m, x_m\}$. Poniamo poi $F_t = G_t \cup \{x_t, y_t\}$ ed $\bar{F}_t = \bar{G}_t \cup \{y_t, x_{t+1}\}$. Per quanto visto sopra, passando al residuo di $G_t \cup \{y_t\}$ si ottiene che è $K_{ij}^{\bar{F}_t} = K_{ij}^{\bar{F}_t}$. Passando al residuo di x_t e applicando l'ipotesi induttiva se $D(\Gamma) - \{k\}$ è connesso, altrimenti applicando la (b.6) del Cap. III, si ha che $K_{ij}^F = K_{ij}^{F_0}$, $K_{ij}^{\bar{F}_t} = K_{ij}^{F_{t+1}}$ e $K_{ij}^{F_m} = K_{ij}^{F'}$. In definitiva: $K_{ij}^F = K_{ij}^{F'}$.
 Scriveremo dunque K_{ij} anziché K_{ij}^F .

Nota - Ho riportato tutto il ragionamento per esteso, in quanto mostra uno stile di argomentazione che diviene assai frequente quando si passi dalla teoria degli edifici alle geometrie di Buekenhout (o di Tits-Buekenhout, o di Tits, come sono talvolta chiamate).

E' ora immediato verificare che, ferme le ipotesi precedenti, dati tre tipi i, j, k in $D(\Gamma)$, con i congiunto a j e j congiunto a k , risulta $K_{ij} = K_{jk}$. Ora, se per ogni vertice di $D(\Gamma)$ escono al più due lati, nelle ipotesi assunte risulta $D(\Gamma) = (A_n)$ (ed allora r è una geometria-proiettiva ordinaria) oppure $D(\Gamma)$ è un ciclo di lunghezza almeno 4. In entrambi i casi, è possibile stabilire un verso di percorrenza su $D(\Gamma)$, e K_{ij} dipende solo dal verso individuato dalla coppia ordinata (i, j) . Supponiamo invece che $\forall i$ siano in $D(\Gamma)$ vertici da cui escano più di due lati. E sia i un tal vertice, congiunto con j_0, \dots, j_m , ove $m \geq 2$. Risulta $K_{j_0, i} = K_{i, j_t}$ e $K_{j_t, i} = K_{j_0, i}$ per ogni $i=1, \dots, m$. Ma è anche $K_{j_h, i} = K_{i, j_k}$ per $h, k = 1, \dots, m$, con $h \neq k$. Infine $K_{j_0, i} = K_{i, j_0}$. Da ciò si ha subito che K_{ij} non dipende da i e da j , nemmeno dall'ordine in cui sono presi. In conclusione: i piani che si rinvengono sui lati di $D(\Gamma)$ (ovvero: che sono residui di bandiere di cotipo $\{i, j\}$ con i e j congiunti in $D(\Gamma)$) sono tutti coordinatizzati da uno stesso corpo K , che coordinatizza sia il piano che il suo duale. Da ciò, con un po' di pazienza, si prova che K è un campo. Nei fatti, basta provare la cosa per $D(\Gamma) = (D_4)$ (e per ciò rimando al num. 6.12 di [26]). Do podiché: basterà scegliere in $D(\Gamma)$ un nodo del tipo:



e passare al residuo di una bandiera di cotipo $\{i, j_1, j_2, j_3\}$.

In definitiva: ferme le ipotesi precedenti su r , se $D(\Gamma) \neq (A_3)$ e se $D(\Gamma)$ non è un ciclo, allora i piani che si rinvengono ai lati di $D(\Gamma)$ sono piani pa

scaliani. (In particolare: se $D(\Gamma) = (E_6), (E_7), (E_8), (D_n)$ con $n \geq 4, \dots$).

Nota - Vi sono dunque casi in cui il diagramma racchiude informazioni molto ricche. Vedremo in seguito altri casi simili. Naturalmente, non è sempre così.

Se conveniamo di dare senso anche al simbolo (G^2) , indichiamo con esso il diagramma (riducibile):

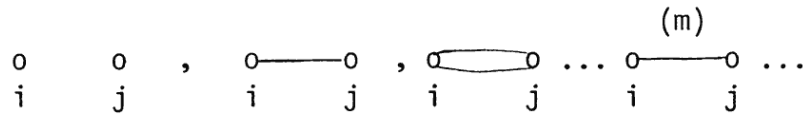
o o

la (b.11) mostra che i residui di faccie di cotipo $\{i, j\}$ ($i, j \in D(\Gamma)$, $i \neq j$) in un edificio generalizzato sono edifici generalizzati in diagrammi (G^m) ($m \geq 2$) (cioè, poi: edifici generalizzati di rango 2). Conviene dunque esaminare il caso di rango 2 con un po' di cura.

Cominciamo col definire *spazio parziale lineare* uno spazio di punti e rette tale che per due punti passa al più una retta, due rette si intersecano su al più un punto, ogni retta ha almeno due punti e da ogni punto escono almeno due rette, e due punti possono sempre congiungersi con un'opportuna spezzata (equivalentemente: due rette possono sempre ...).

E' ovvio che uno spazio parziale lineare può essere visto come un complesso di camere di rango 2. (Le varietà sono i punti e le rette, l'incidenza è quella usuale). I sottocomplessi magri sono allora gli m -agoni ordinari ("ordinari" qui intende: che non presentano ripetizioni di lati o vertici). Se $m \geq 3$, diciamo *m -agone generalizzato* uno spazio parziale lineare che non contenga r -agoni ordinari per $r < m$, e tale che per ogni coppia di camere C, C' esista un m -agone ordinario che contenga C e C' . Diciamo poi *2-agone generalizzato*, o *digone generalizzato*, uno spazio di punti e rette, con almeno due punti e due rette, in cui tutti i punti sono incidenti a tutte le rette. Se si rammenta che i complessi di Coxeter di rango 2 sono gli m -agoni ordinari, è quasi immediato verificare che gli edifici generalizzati di rango 2 sono gli m -goni generalizzati.

E si comprende ora come il diagramma $D(\Gamma)$ di un edificio generalizzato Γ possa definirsi anche mediante i residui in Γ di bandiere di cotipo $\{i, j\}$, pur che la ripartizione in tipi sia già stata assegnata, in qualche modo. Precisamente, con notazioni quali:



intenderemo che i residui in Γ di bandiere di cotipo $\{i,j\}$ sono, rispettivamente digoni generalizzati, piani proiettivi, spazi polari di rango 2, ... m-agoni generalizzati, ...

La (b.11) garantisce la coerenza di queste convenzioni con quelle precedentemente stabilite.

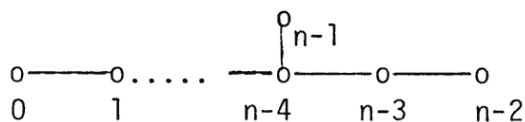
CAPITOLO 5

GEOMETRIE DI TITS-BUEKENHOUT (DEFINIZIONI)

Si è dunque visto che, volendo fondare tutta la teoria sul concetto di appartamento, si è portati ad imporre, nel caso dei diagrammi di Coxeter, che gli appartamenti siano appunto complessi di Coxeter; e ciò sembra non poter condurre molto lontano dagli edifici. Le difficoltà sono altre, naturalmente, se si considerano strutture in diagrammi non di Coxeter. Dò due esempi.

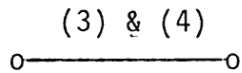
Esempio 1) - Possiamo imitare su edifici generalizzati nei diagrammi $(E_6), (E_7)$ ed (E_8) la costruzione dello spazio polare $\mathfrak{P}(\mathcal{O})$ da un edificio generalizzato σ di diagramma (D_n) e la costruzione dello spazio metasimplettico $\mathcal{N}(\mathcal{O})$ da un edificio generalizzato \mathcal{O} nel diagramma (D_4) . Avverto preventivamente che vi sono buone ragioni per vedere nella costruzione seguente un'buon' adattamento al caso di (E_n) delle due costruzioni ora rammentate (rimando per ciò a [22]; si veda anche, qui, il cap. 7).

Consideriamo un edificio generalizzato Γ di diagramma (E_n) ($n=6,7,8$; ma n potrebbe anche avere qualunque valore; non cambierebbe nulla). Numeriamo i vertici dei diagrammi come in figura:

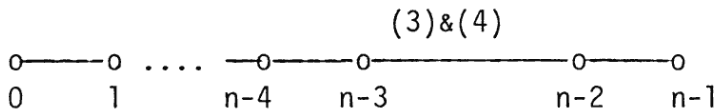


Diamo alle varietà di tipo $n-1$ o $n-2$ un nuovo tipo: $n-1$. Assegnamo come nuovo tipo $n-2$ alle varietà di tipo $n-3$ in Γ , e aggiungiamo nuove varietà cui assegnamo ancora il tipo $n-2$, scegliendo a tale scopo le bandiere di tipo $\{n-1, n-2\}$ in Γ . Manteniamo il vecchio tipo a tutte le altre varietà, ma aggiungiamo un nuovo tipo di varietà, che contrassegnamo con $n-3$, scegliendo a tale scopo le bandiere di tipo $\{n-1, n-3\}$ in Γ . Otteniamo così un nuovo insieme di varietà, ripartito in tipi. Definiamo su esse un'incidenza, stabilendo che varietà distinte di tipo distinto abbiano a dirsi incidenti se sono incidenti in Γ , come bandiere e/o varietà, eccettuato il caso in cui le varietà corrispondono l'una a una bandiera di Γ di tipo $\{n-1, n-2\}$ o a una vecchia varietà di Γ di tipo $n-1$, e l'altra a una vec-

chia varietà di tipo $n=3$ in Γ . Si può verificare facilmente che otteniamo un nuovo complesso di camere, di rango n , che possiamo dotare di appartamenti, scegliendo a tale scopo i risultati della stessa costruzione eseguita sugli appartamenti di Γ . Non è difficile verificare che otteniamo così un edificio debole, che indicheremo con $\mathcal{L}(\Gamma)$. Non però un edificio generalizzato. Infatti, quando esaminiamo in un appartamento Σ di $\mathcal{L}(\Gamma)$ il residuo di una bandiera F di cotipo $\{n-3, n-2\}$, possiamo trovare o un triangolo o un quadrangolo, a seconda che F , vista in Γ , abbia ivi cotipo $\{n-3, n-2\}$ o $\{n-3, n-1\}$. Per disegnare il diagramma dovremmo dunque introdurre una nuova convenzione grafica. Questo non è un problema: qualcosa come



potrebbe andare bene. Il diagramma sarebbe allora:



Ma ignoro se esso, assieme alla (B.2), basti ad individuare la struttura degli appartamenti. Se poi ricostruissimo il diagramma calcolando i residui in $\mathcal{L}(\Gamma)$, vedremmo che quando negli appartamenti troviamo quadrangoli, in $\mathcal{L}(\Gamma)$ troviamo quadrangoli generalizzati molto particolari: quelli ottenuti da grafi bipartiti completi con almeno due vertici in ogni classe, facendo corrispondere i vertici a varietà di $\mathcal{L}(\Gamma)$ di tipo $n-2$ e i lati a varietà di tipo $n-3$. Per di più, i residui di bandiere di $\mathcal{L}(\Gamma)$ di cotipo $\{n-2, n-1\}$ sono tutti piani proiettivi degeneri. Serenissimo questi fatti degni di nota tanto da meritare il conio di opportuni contrasegni da apporre sui lati del diagramma, allora l'informazione direttamente ricavabile dal diagramma calcolato negli appartamenti sarebbe qui molto più povera di quella fornita dal diagramma calcolato su tutto $\mathcal{L}(\Gamma)$.

Prima di passare al secondo esempio, voglio aggiungere ancora qualcosa su questo. Non è difficile vedere che la (b.11) vale ancora su $\mathcal{L}(\Gamma)$ (in sostanza: perché vale su Γ). Da ciò, usando la (b.10) si ha che:

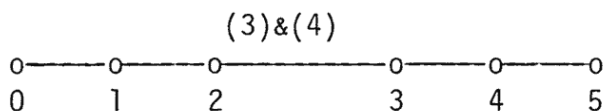
- i) Le varietà di $\mathcal{L}(\Gamma)$ di tipo $n-1$ si distribuiscono in due insiemi disgiunti, V_{pr} e V_{pl} , a seconda che il loro residuo in $\mathcal{L}(\Gamma)$ sia uno spazio proiettivo o uno spazio polare.
- ii) Le varietà di $\mathcal{L}(\Gamma)$ di tipo $n-2$ si distribuiscono in due insiemi, U e U' , a seconda che siano incidenti ad esattamente due varietà di tipo $n-1$, una in V_{pr} e una in V_{pl} , o che tutte le varietà di tipo $n-1$ ad esse incidenti stiano in V_{pl} .
- iii) Ogni varietà di $\mathcal{L}(\Gamma)$ di tipo $n-3$ è incidente ad esattamente una varietà in V_{pr} ed esattamente una varietà in U' .

Le varietà in V_{pr} provengono dalle varietà di Γ di tipo $n-1$, quelle in V_{pl} provengono da quelle di tipo $n-2$, quelle in U' provengono dalle varietà di Γ di tipo $n-3$, quelle in U dalle bandiere di Γ di tipo $\{n-1, n-2\}$ Sicché le i)-iii) dicono che la costruzione può invertirsi. Per quanto vedremo più oltre, possiamo identificare ogni varietà di $\mathcal{L}(\Gamma)$ con l'insieme delle varietà di tipo 0 ad essa incidenti. La costruzione di $\mathcal{L}(\Gamma)$ mostra allora l'aspetto che assume Γ quando lo si voglia vedere come uno spazio di punti, rette, sottospazi ... , assegnando alle varietà di tipo 0 il ruolo di punti. Ignoro se le i)-iii), unitamente ad opportune proprietà generali su spazi di punti, rette, sottospazi ... , bastino a caratterizzare gli edifici deboli del genere di $\mathcal{L}(\Gamma)$ con Γ in (E_n) (bisognerebbe comunque utilizzare i risultati della parte finale [28]). Se si, avremmo ottenuto una caratterizzazione elementare degli edifici generalizzati di diagramma (E_n) .

Naturalmente possiamo decidere di collocare in ruolo di punti le varietà di un qualunque altro tipo. Il risultato della costruzione cambia, ma i problemi restano gli stessi. E' facile spiegare in breve la regola generale cui obbedisce la costruzione. Dato un grafo \mathcal{G}_y , un suo vertice x_0 e due insiemi di vertici X, Y , diciamo che Y separa X da x_0 se $\{x_0\} - Y$ e $X - Y$, qualora siano entrambi non vuoti, stanno in due distinte componenti connesse di $\mathcal{G}_y - Y$. Un insieme X di vertici di \mathcal{G}_y si dice x_0 -ridotto se, per ogni $x \in X$, si ha che $X - \{x\}$ non separa x da x_0 . La costruzione prima descritta obbedisce alla seguente regola: si

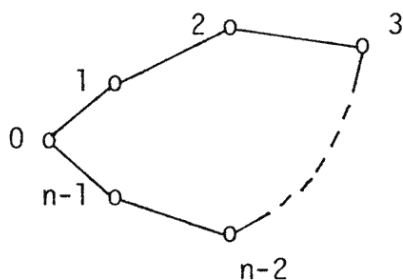
sceglie un tipo i in $D(\Gamma)$ con l'intenzione di collocare in ruolo di punti le varietà di tipo i . Si prendono poi come nuove varietà le faccie F di tipo i - r_i ridotto $\tau(F)$, assegnando ad esse come nuovo tipo il numero di vertici nella componente connessa di i in $D(\Gamma) - \tau(F)$ se $i \notin \tau(F)$, e 0 se $i \in \tau(F)$ (nel qual caso F è addirittura una varietà di tipo i). Due tali nuove varietà F ed F' si dicono poi incidenti se sono incidenti come bandiere e/o varietà in Γ , e se $\tau(F)$ separa $\tau(F')$ da i in $D(\Gamma)$, o viceversa.

Per esempio: quando si applichi questa costruzione ad un edificio generalizzato di diagramma (E_6) , numerato come detto all'inizio e assegnando il ruolo di punti alla varietà di tipo 5, si ottiene un edificio debole $\mathcal{L}'(\Gamma)$ di diagramma:

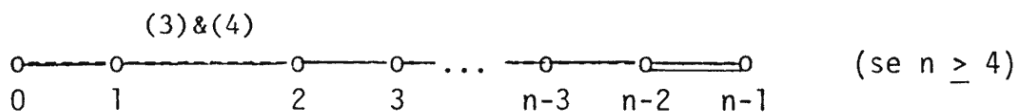


se il diagramma è calcolato negli appartamenti. Calcolando invece il diagramma in tutto $\mathcal{L}'(\Pi)$, vediamo che ai quadrangoli corrispondono particolari spazi polari, del genere già descritto in precedenza, e sugli ultimi due lati troviamo piani proiettivi degeneri.

La stessa costruzione su edifici generalizzati Γ di diagramma:

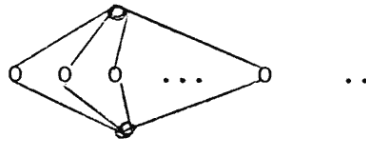


produce edifici deboli $\mathcal{L}(\Gamma)$ di diagramma:



se calcoliamo i diagrammi negli appartamenti. Se li calcolassimo in $\mathcal{L}(\Gamma)$ trove-

remmo nel caso di $n=3$ che agli esagoni corrispondono particolari esagoni generalizzati: quelli ottenuti dal grafo di incidenza di un piano proiettivo (i vertici del grafo corrispondono alle varietà di tipo 2, e i lati a quelle di tipo 1). Nel caso di $n \geq 4$, ai quadrangoli sul lato da 1 a 2 e sull'ultimo lato del diagramma corrispondono spazi polari particolari, del solito genere descritto in precedenza. Gli spazi polari sull'ultimo lato possono anzi ottenersi da grafi del tipo:

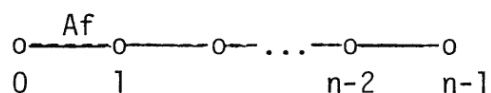


Sempre se $n \geq 4$, usando la (b.11) (che ancora vale su $\mathcal{L}(F)$) e la (b.10) si vede che i residui di bandiere di $\mathcal{L}(F)$ di tipo $\{0,1\}$ sono spazi polari. Per di più, di un genere affatto speciale (rimando per questo all'articolo [22] già citato).

Traggo qualche conclusione. Quando si abbia a che fare con edifici deboli che, pur senza essere edifici generalizzati, siano ugualmente muniti di una funzione di tipo, sembra più chiarificante colcolarne il diagramma nella struttura presa nel suo complesso piuttosto che negli appartamenti. In tal caso la struttura interna degli appartamenti può non bastare a ricostruire il diagramma. E, viceversa, non è detto che il diagramma, calcolato ora negli appartamenti, individui la struttura degli appartamenti. Per di più, in tutti gli esempi ora trattati, quanto risulta utile in pratica è, non tanto la struttura degli appartamenti, quanto piuttosto proprietà come le i)-iii). Sicché, se possiamo ricavare siffatte proprietà prescindendo dal sistema di appartamenti (e nei fatti ciò è possibile, spesso), gli appartamenti finiscono per apparire qui poco più che un accessorio. Naturalmente, queste conclusioni vanno prese con la dovuta cautela.

Esempio 2) - Dò ora un esempio 'esterno' per così dire. Consideriamo uno spazio affine \mathcal{A} . Se \mathcal{A} ha dimensione finita n , è immediato considerarlo come complesso di camere, scegliendo come varietà i sottospazi propri non vuoti, e prendendo come camere le bandiere massimali (se \mathcal{A} avesse dimensione infinita, potremmo considerare la geometria all'infinito \mathcal{A}_∞ di \mathcal{A} , vederla come edificio, generalizzato se \mathcal{A} è degenere, e assumere come faccie di \mathcal{A} le traslazioni di faccia di \mathcal{A}_∞ eventualmente completate con l'aggiunta di un punto). Possiamo allora ripartire i sottospazi propri e non vuoti di \mathcal{A} in tipi, assegnando a ciascun sotto-

spazio, come tipo, la sua dimensione. E possiamo ora disegnare il diagramma di \mathcal{A} , esaminando i residui in \mathcal{A} di bandiere di cotipo $\{i, j\}$ (con $i \neq j$). Se conveniamo di indicare col simbolo $\overset{Af}{\underset{j}{\overset{i}{\text{---}}}}$ il fatto che residui di bandiere di cotipo $\{i, j\}$ risultano piani affini (con le varietà di tipo i in ruolo di punti), il diagramma di \mathcal{A} è:



Da ciò si ha subito che \mathcal{A} non è strutturabile in appartamenti (almeno finché si tiene fermo che un appartamento abbia da essere un complesso di camere magro). Infatti non esiste alcun complesso di camere magro che dia luogo ad un diagramma come sopra. Infatti tale diagramma dice che il residuo di una bandiera di cotipo $\{0, 1\}$ deve essere un piano affine. E, per quanto un piano affine sia povero di punti e rette, almeno tre rette per ogni punto le deve avere. Non è dunque magro.

Quanto sin qui visto, suggerisce di ridimensionare l'importanza degli appartamenti. E v'è qualche ragione per sperare che ciò sia possibile senza gravi perdite. Vedremo, in primo luogo, che è possibile caratterizzare gli edifici generalizzati di tipo sferico (ad eccezione di quelli di diagramma (H_3) e (H_4)) con proprietà che non fanno menzione di appartamenti. Ma vi sono anche altre ragioni, che ora illustrerò.

Indicata con $d(C, C')$ la distanza tra due camere C e C' , il *diametro* $d(\Gamma)$ di un edificio debole Γ (in generale: di un complesso di camere) è l'estremo superiore di $\{d(C, C') \mid C, C' \text{ camere di } \Gamma\}$. È ovvio, per la (B.3) e le (b.1) e (b.3) del Cap. I, che il diametro di Γ è uguale al diametro dei suoi appartamenti. Posto ora che Γ abbia diametro finito, due sue camere si diranno *opposte* se la loro distanza è uguale al diametro di Γ (è ovvio che due camere opposte sono opposte in ogni appartamento che le contenga). Un insieme \mathcal{C} di camere di Γ si dirà poi *convesso* se contiene tutte le gallerie minimali tra due sue camere (dalla (b.3) del Cap. I si ha subito che gli appartamenti sono convessi). È poi ovvio che intersezioni di insiemi convessi restituiscono insiemi convessi. Sicché possiamo parlare della *chiusura convessa* di un insieme di camere. Si ha, poi (cfr. [26] Cap.II):

(b.12) Sia \mathcal{K} un complesso di Coxeter di diametro finito, e C, C' siano due camere opposte in \mathcal{K} . Allora per ogni altra camera C'' di \mathcal{K} risulta $d(C, C') = d(C, C'') + d(C'', C')$.

Allora:

(b.13) Sia Γ un edificio generalizzato di diametro finito. Gli appartamenti di Γ sono le chiusure convesse in Γ di coppie di camere opposte.

Intanto, ogni coppia di camere opposte sta in qualche appartamento, per (B.3), e dunque ogni appartamento contiene una coppia di camere opposte in Γ , per (b.3). Per di più, gli appartamenti sono convessi in Γ , per (b.1). Sia ora Σ un appartamento e C, C' una coppia di camere di Σ , opposte. Sia C'' una terza camera di Σ . Per la (b.1), $d(C, C'')$ e $d(C'', C')$ non variano, quando siano calcolate in Σ anziché in Γ . Per la (b.12), allora, è $d(C, C'') + d(C'', C') = d(C, C')$. Sicché, date due gallerie minimali γ da C a C'' e γ' da C'' a C' , la giustapposizione di γ e γ' dà una galleria minimale $\bar{\gamma}$ da C a C' . Ma $\bar{\gamma}$ appartiene alla chiusura convessa della coppia $\{C, C'\}$. Sicché C'' sta nella chiusura convessa di $\{C, C'\}$. E la (b.13) segue.

Ancora:

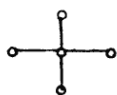
(b.14) Sia Γ un edificio generalizzato di diametro finito. La corrispondenza che alla coppia ordinata (C, C') di camere opposte di Γ associa la coppia (C, Σ) , ove Σ è la chiusura convessa di $\{C, C'\}$, realizza una biezione dall'insieme delle coppie ordinate di camere opposte di Γ all'insieme delle coordinatizzazioni di Γ .

Per la (b.13), c'è da provare solo biiettività della corrispondenza. E questa segue dal fatto che ogni camera ha esattamente un'opposta in ogni appartamento che la contenga. Siano infatti C, C' e C'' camere di un appartamento Σ , con C' e C'' opposte a C . Dalla (b.12) si ha subito che $d(C', C'') = 0$. Sicché $C' = C''$. Sia poi Σ un appartamento e C una sua camera. Per la (b.13), c'è una coppia C', C'' di camere opposte in Σ . Ma Σ è un complesso di Coxeter, e pertanto il gruppo degli automorfismi di Σ è transitivo sull'insieme delle camere. V'è dunque un automorfismo α di Σ che porta C' su C . Sicché $\alpha(C'')$ è op-

Otteniamo uno spazio polare fine non degenera di rango 2.

Con un po' di pazienza si mostra che il gruppo degli automorfismi speciali di tale spazio è transitivo sull'insieme delle camere, ma non sull'insieme delle coor
dinatizzazioni.

Nondimeno, vi sono risultati che sembrano indicare che la transitività sull'in
sieme delle camere sia ancora una condizione piuttosto forte. E' noto, per esempio, che un gruppo di automorfismi di un edificio finito irriducibile Γ di rango ≥ 3 è un gruppo di Chevalley, o ottenuto per 'twisting' da un gruppo di Chevalley, se è transitivo sull'insieme delle camere di Γ (cfr. [18], per il caso (A_n) ; e [24], per il caso generale). Ancora: un recente risultato di Timmesfeld, non ancora pubblicato, asserisce quanto segue: sia Γ una geometria di Tits-Buekenhout (cfr. più avanti), irriducibile e finita. Assumiamo che, per ogni scelta dei tipi distinti i e j , i residui delle bandiere di cotipo $\{i, j\}$ o sono tutti piani proiettivi desarguesiani di ordine $\neq 3$ o tutti digoni generalizzati (brevemente: *sui lati del diagramma troviamo solo piani desarguesiani*). Supponiamo infine che il gruppo degli automorfismi speciali di Γ sia transitivo sulle camere. Allora o Γ è un edificio in uno dei diagrammi (A_n) , (D_n) , (E_6) , (E_7) , (E_8) , oppure ha uno dei tre seguenti diagrammi:



(e i piani proiettivi sui lati del diagramma hanno ordine 2)



(e i piani proiettivi sui lati del diagramma hanno ordine 2)



(e sui lati del diagramma troviamo solo piani di ordine 2 oppure solo piani di ordine 8)

Pur con cautela, potremmo dunque concludere che, almeno su certi diagrammi o sotto opportune ipotesi (grassezza, finitezza,...), la transitività sulle camere risulta una condizione forte. Abbandoniamo dunque gli appartamenti.

Per semplicità, riassumiamo come punto di partenza il concetto di complesso di bandiere.

Gli esempi con cui ho aperto questo capitolo mostrano già quale dovrà essere il surrogato degli appartamenti: *il* (meglio: un) *diagramma*, calcolato su tutta la struttura. Ma il diagramma si deve appoggiare ora su una ripartizione delle varietà in tipi (si veda l'esempio 2) di questo capitolo). Sennonché, nel caso degli edifici generalizzati, questa viene prodotta, come il diagramma, dagli appartamenti.

Avendo rinunciato agli appartamenti, possiamo assumere la partizione in tipi come un 'datum'; questa è la via seguita da Buekenhout nei due articoli [7], [8] e da Tits nell'articolo [28], già citato.

Ma qui preferisco produrre la partizione in tipi come risultato univoco di una costruzione elementare. Sia dato un complesso di bandiere K definito su un insieme di vertici V da un'incidenza I . Quanto si è visto negli edifici generalizzati (Cap. III) mostra che, in quel caso, la partizione in tipi può prodursi dalla seguente relazione T , che diremo *trasversale* di I ; due varietà x, y si corrispondono in T e scriveremo xTy se esistono due camere C, C' tali che $\{x, y\} = (C - C') \cup (C' - C)$. Sia ora θ_I la relazione di equivalenza generata su V da T . Nel caso degli edifici generalizzati, θ_I è appunto la partizione in tipi; per di più, la (b.11) mostra che in tal caso, presa una faccia F , la relazione θ_I^F indotta da θ_I sul residuo K_F di F coincide con la relazione $\theta_{I,F}$ definita su K_F dalla trasversale T_F dell'incidenza I_F indotta da I su K_F . Diremo allora in generale che θ_I è *residuale* se $\theta_I^F = \theta_{I,F}$ per ogni bandiera F . Sempre nel caso degli edifici generalizzati, si ha che una camera prende una varietà da ogni tipo. In generale, diremo che θ_I è *ben posta* se I induce la relazione identica su ogni classe di equivalenza di θ_I , e che θ_I è *regolare* se ogni camera interseca tutte le classi di equivalenza di θ_I . Infine θ_I si dirà *trasversale* se è regolare e ben posta.

E' presto visto che se θ_I è ben posta allora, per ogni bandiera F , $\theta_{I,F}$ è ben posta. Si ha:

(t.1) Sia θ_I trasversale. Allora θ_I è residuale se e solo se per ogni bandiera F l'equivalenza $\theta_{I,F}$ è regolare (perciò trasversale, poiché tale è θ_I).

Sia infatti θ_I residuale. Sia F una bandiera di K e G ed x siano una camera e una varietà di K_F . La bandiera $F \cup G$ è una camera in K . Sicché, siccome θ_I è regolare, esiste $y \in F \cup G$ con $x \equiv y(\theta_I)$; e siccome θ_I è ben posta, è $y \in G$. Infine $y \equiv x(\theta_{I,F})$ perché θ_I è residuale. Il "solo se" è così provato.

Proviamo il "se". Sia F una bandiera e siano x, y varietà in K_F con $x \not\equiv y(\theta_{I,F})$. Sia G una camera di K_F contenente x . Siccome $\theta_{I,F}$ è regolare, esiste $z \in G$ tale che $z \equiv y(\theta_{I,F})$. Sicché $z \equiv y(\theta_I)$; pertanto $x \not\equiv y(\theta_I)$, perché è $z \equiv x$ e θ_I è ben posta. Infine: $\theta_I^F = \theta_{I,F}$. E l'asserto è provato.

Il quoziente $\Delta_I = V/\theta_I$ verrà detto *insieme naturale dei tipi* di K , o anche *partizione naturale di K in tipi*. Nel seguito, con un innocuo abuso di linguaggio, ci riferiremo spesso a θ_I come alla *partizione naturale in tipi* di K . La proiezione canonica di V su Δ_I sarà detta *funzione naturale di tipo*, e sarà indicata con t_I . Con un innocuo abuso di linguaggio, quando θ_I sia residuale identificheremo la restrizione di t_I al residuo di una bandiera F con la funzione naturale di tipo $t_{I,F}$ di K_F e considereremo l'insieme naturale $\Delta_{I,F}$ dei tipi di K_F come sottoinsieme di Δ_I . Intendiamo per *rango di incidenza* di K la cardinalità di Δ_I . Il rango di incidenza non va confuso col rango di K in quanto complesso di camere, per la banale ragione che non è detto che K sia un complesso di camere. Però:

(t.2) Sia θ_I ben posta. Allora le due seguenti condizioni si equivalgono:

- (i) il rango di incidenza di K è finito e θ_I è regolare e residuale.
- (ii) Per ogni bandiera F di K , il residuo di F è un complesso di camere. E il rango di K in quanto complesso di camere (rammento che è $K=K_\emptyset$) è finito.

Per di più, valendo la (i) (equiv: la (ii)) il rango di incidenza di \mathcal{K} è uguale al rango di \mathcal{K} in quanto complesso di camere. In tal caso parleremo semplicemente del rango di \mathcal{K} .

Valga la (i). Sia n il rango di incidenza di \mathcal{K} . Allora ogni camera di \mathcal{K} contiene esattamente n varietà, perché θ_I è trasversale. La (ii) segue per induzione su n . Se $n = 1$ non v'è nulla da provare. Sia $n > 1$. Siano C e C' due camere distinte; per la trasversalità di θ_I vi sono due varietà, x, x' di C e C' rispettivamente, con $x \equiv x'(\theta_I)$ e $x = x'$. Sicché per definizione di θ_I esiste una sequenza di varietà $x = x_0, x_1, \dots, x_m = x'$ tale che $x_{i-1}Tx_i$ per $i=1, \dots, m$. Per provare che esiste una galleria da C a C' possiamo sempre ricondurci al caso che sia $m=1$. In tal caso esistono due camere adiacenti C_1 e C_2 con $x \in C_1$ e $x' \in C_2$, per definizione di T . Per ipotesi induttiva, esiste nel residuo \mathcal{K}_x di x una galleria da $C - \{x\}$ a $C_1 - \{x\}$, e una galleria in \mathcal{K}_x da $C_2 - \{x'\}$ a $C' - \{x'\}$. Sicché v'è una galleria in \mathcal{K} da C a C' . La (ii) è provata.

Valga ora la (ii). Data una camera C e una classe di equivalenza X di θ_I , sia $n(C, X)$ la cardinalità di $C \cap X$. Siccome θ_I è ben posta, è $n(C, X) = 0$ oppure 1. Inoltre, se C e C' sono camere adiacenti, è $n(C, X) = n(C', X)$ per ogni classe di equivalenza X di θ_I . Sicché, per ogni classe di equivalenza X di θ_I , il numero $n(C, X)$ non dipende dalla camera C , poiché \mathcal{K} è un complesso di camere. Del resto: ogni varietà appartiene ad almeno una camera. Sicché $n(C, X) = 1$ sempre. Pertanto θ_I è trasversale.

Similmente, $\theta_{I,F}$ è trasversale per ogni bandiera F ; perché $\theta_{I,F}$ è ben posta, essendo $\theta_{I,F} \leq \theta_I^F$. In definitiva: θ_I è residuale, per la (t.1).

Definiamo dunque *provvisoriamente* geometria di rango n un complesso di bandiere \mathcal{K} definito da una relazione di incidenza I tale che θ_I sia trasversale e residuale e il rango di incidenza di \mathcal{K} sia finito (e uguale ad n).

E' immediato obiettare che ora, diversamente che negli edifici generalizzati, otteniamo un'unica funzione di tipo. Ma la differenza è solo apparente. La partizione in tipi era comunque anche negli edifici generalizzati. Ed era proprio quella che si è qui costruita. La molteplicità delle funzioni di tipo vi derivava dal venire

queste costruite sul diagramma, determinato questo, a sua volta, dagli appartamenti, mediante un sistema di convenzioni date una volta per tutte, e mutuamente esclusive (nel senso che il sistema delle marche per i lati era tale che l'una escludeva l'altra). Qui invece dobbiamo prima dare la partizione in tipi, e su questa poi costruiamo il diagramma. E siccome è ora avventato fissare un sistema definitivo di marche mutuamente esclusive per disegnare i diagrammi, perde di interesse diversificare a posteriori le funzioni di tipo componendole con automorfismi di diagrammi: il diagramma non dipenderà solo dalla geometria, ma anche da ciò che ci premerà di dire su di essa, sicché.....

V'è invece un altro dettaglio da sistemare. Nella pratica capita spesso di voler considerare in blocco più geometrie su un dato sistema di tipi. Ciò trova qui un ostacolo nell'essere i tipi prodotti all'interno delle singole geometrie. Ma vi si pone riparo con qualche marginale correzione:

DEFINIZIONE DI GEOMETRIA - Intenderemo (definitivamente) per *geometria su un insieme (finito) di tipi* Δ un complesso di bandiere \mathcal{K} munito di una applicazione t , detta *funzione di tipo*, dall'insieme V delle varietà di \mathcal{K} sull'insieme Δ dei tipi, tale che la partizione Θ_t individuata da t su V restituisce la partizione naturale in tipi di \mathcal{K} , e Θ_t è trasversale e residuale.

Useremo identificare una geometria con la terna $\Gamma = (V, I, t)$ ove V è l'insieme delle varietà, I è l'incidenza che definisce il complesso di bandiere che sostiene la geometria, e t la funzione di tipo. Ovvio il senso che resta fissato su termini quali *rango* (di Γ), *tipo* (di una varietà o una bandiera), *cotipo* (di una bandiera), *rango* di una bandiera... . Abbreviamo la locuzione "varietà di tipo i " in *i-varietà*. Manteniamo la convenzione di scrivere $FIG(Fix, xIy, \dots)$ per intendere che le bandiere F e G sono incidenti (che la bandiera F è incidente alla varietà x , che la varietà x e y sono incidenti ...). E' ovvio che il *residuo* di una bandiera F è identificabile con la geometria $\Gamma_F = (V_F, I_F, t_F)$, ove V_F è l'insieme delle varietà incidenti ad F ma non appartenenti ad F , e t_F ed I_F sono le restrizioni di t ed I a V_F . (Che Γ_F sia una geometria segue dalla (t, I)).

Si ha che:

(t.3) La funzione di tipo induce su ogni camera una biezione sull'insieme Δ dei tipi.

(Per la (t.2), la (t.3) è conseguenza immediata della definizione di geometria qui data). Dalla definizione di Θ_I , dal fatto che Θ_I è assunta residuale e trasversale (e che $\Theta_t = \Theta_I$), e dalle (t.1) e (t.2), si ha subito:

(t.4) Per ogni bandiera F di corango almeno 2, il grafo definito da I_F su V_F è connesso.

Dalle (t.3) e (t.4) e dal fatto che operiamo su strutture di rango finito, si ottiene:

(t.5) Per ogni bandiera F , per ogni scelta dei tipi distinti i, j nel cotipo di F , il grafo indotto da I_F su $t_F^{-1}(\{i, j\})$ è connesso.

(Cfr. la (p.5) del Cap. 1). La cosa si prova per induzione sul rango n . Se $n=1$ non v'è nulla da provare. Sia $n > 1$. La (t.5) vale su Γ_F per ogni bandiera $F \neq \emptyset$ per ipotesi induttiva. Siano ora i, j due tipi distinti e siano x, y varietà di tipo i o j (senza escludere che $t(x) = t(y)$). Ragioniamo per induzione sulla distanza $\ell(x, y)$ di x da y nel grafo \mathcal{G}_I definito da I su V (la cosa è possibile per la (t.4)). Se $\ell(x, y) \leq 1$ non v'è nulla da provare. Sia $\ell(x, y) = M > 1$. Sia $X = x_0, x_1, \dots, x_m = y$ un cammino in \mathcal{G}_I da x ad y . Se $t(x_{m-1}) = i$ o j allora l'asserto della (t.5) segue per ipotesi induttiva su x e x_{m-1} , poiché $\ell(x, x_{m-1}) = m-1$. Sia $t(x_{m-1}) \neq i, j$. Sia y' una varietà di tipo j in $\Gamma_{x_{m-1}}$, incidente a x_{m-2} (una tale y' esiste per la (t.3)). L'asserto della (t.5) segue allora per ipotesi induttiva su x e y' (perché $\ell(x, y') \leq m-1$) e per ipotesi induttiva su $\Gamma_{x_{m-1}}$, applicata ad y' e y (perché $\Gamma_{x_{m-1}}$ ha rango minore di Γ).

In [8] la (t.3) entra nella definizione di geometria, col nome di *Proprietà di Trasversalità*. La (t.5) vi è detta *Connessione Forte*. In [28] la (t.4) compare col nome di *Connessione Residuale*. Mentre le geometrie vi sono definite mediante una proprietà leggermente più debole della Proprietà di Trasversalità, che però, assunta la Connessione Residuale e supposto che il rango della geometria sia finito, riesce equivalente alla Proprietà di Trasversalità. Sicché, per quanto ora visto,

e siccome banalmente la (t.5) implica la (t.4), nei casi di rango finito le geometrie residualmente connesse nel senso di Tits sono le geometrie fortemente connesse nel senso di Buekenhout. Diciamole, per fissare le idee, *geometrie di Tits-Buekenhout*: la loro definizione si ottiene semplicemente dalla definizione di geometrie data qui in precedenza, abolendo in essa le ipotesi che $\theta_t = \theta_I$ e che θ_I sia residuale e trasversale, e sostituendole con le (t.3) e (t.5). (Cfr. [8]).

Nota - Avverto che sulla denominazione "geometrie di Tits-Buekenhout" non è stabilito un senso fisso nella letteratura. Il senso qui fissato, se è più restrittivo delle definizioni di "geometria" stabilite nei due articoli di Tits e di Buekenhout sopra citati, è però assai più ampio della definizione stabilita da Buekenhout [7], ed è comunque accettabilmente ampio nei fatti: la connessione forte è il minimo che si possa chiedere per sviluppare un po' di teoria, e limitarsi al caso di rango finito è giustificato dal fatto che in questo campo il più delle dimostrazioni vengono costruite per induzione sul rango.

Le (t.3)-(t.5) mostrano che la definizione di geometria data in precedenza individua geometrie di Tits-Buekenhout. Viceversa:

(t.6) In una geometria di Tits-Buekenhout è $\theta_t = \theta_I$, e θ_I è trasversale e residuale.

E' intanto ovvio che la (t.3) implica che $\theta_I \leq \theta_t$. La disuguaglianza $\theta_t \leq \theta_I$ segue per induzione sul rango n della geometria. Se $n = 1$ non c'è nulla da provare. Se $n=2$ la $\theta_t \leq \theta_I$ non dice nulla di più della (t.5). Sia $n > 2$. Siano x, y varietà distinte di ugual tipo i e sia j un tipo diverso da i . Per la (t.5), esiste un cammino da x a y nel grafo definito da I su $t^{-1}(\{i, j\})$. Siccome per la (t.3) varietà distinte di ugual tipo non sono mai incidenti, possiamo sempre ricondurci al caso che esista una j -varietà z con $xIzIy$. Per ipotesi induttiva sul residuo di z , abbiamo $x \equiv y (\theta_{I, \{z\}})$. Sicché $x \equiv y (\theta_I)$. E la $\theta_t \leq \theta_I$ è provata. Che poi θ_I sia trasversale e residuale segue immediatamente dalla (t.3).

Sicché: *le geometrie individuate dalla definizione data in precedenza sono esat-*

tamente le geometrie di Tits-Buekenhout. Nel seguito dunque userò semplicemente il termine "geometrie", lasciando cadere la specificazione "di Tits-Buekenhout"; sappiamo ormai, infatti, che ciò non ci porta ad equivoci.

Nota - Osservo che non è possibile ritrovare contropartite separate per le (t.3) e (t.5) in proprietà elementari di Θ_I .

Passiamo ora ai diagrammi. Questi si disegneranno assumendo come vertici i tipi, e contrassegnando il lato da un vertice i ad un vertice j con una marca che indichi quali spazi compaiono tra i residui di bandiere di cotipo $\{i,j\}$. L'aspetto che il diagramma assume (e la possibilità di disegnarlo) dipende dal repertorio di marche che si decide di adottare. E' buona consuetudine mantenere alle notazioni $\underset{i}{o} \text{---} \underset{j}{o}, \overset{i}{o} \text{---} \overset{j}{o}, \dots \overset{(m)}{o} \text{---} \overset{j}{o}, \dots$ il senso già fissato su edifici generalizzati (cfr. Cap. IV, ultime righe), e continuare ad indicare il fatto che i residui di bandiere di cotipo $\{i,j\}$ sono digoni generalizzati col non tracciare alcun lato tra i e j . E' poi frequente l'impiego della marca $\underset{i}{o} \text{---} \overset{\pi}{o} \text{---} \overset{j}{o}$ quando si voglia solo dire che i residui di bandiere di cotipo $\{i,j\}$ sono spazi parziali lineari. L'esempio 2) dell'inizio di questo capitolo mostra che può darsi il caso che ^{si} necessiti di marche orientate. Rammento qui le più frequenti.

1) Diciamo *spazio lineare* uno spazio parziale lineare tale che per due punti passa sempre una retta. Col simbolo:

$\underset{i}{o} \text{---} \overset{L}{o} \text{---} \overset{j}{o}$ (equivalentemente $\overset{j}{o} \text{---} \overset{L}{o} \text{---} \underset{i}{o}$) si indica che i residui di bandiere di cotipo $\{i,j\}$ sono spazi lineari, con le i -varietà in ruolo di punti.

2) Diciamo *circolo* uno spazio lineare in cui tutte le rette hanno esattamente due punti (cioè: spazi lineari definiti da grafi completi).

Col simbolo:

$\underset{i}{o} \text{---} \overset{C}{o} \text{---} \overset{j}{o}$ (equivalentemente: $\overset{j}{o} \text{---} \overset{C}{o} \text{---} \underset{i}{o}$)

intendiamo che i residui di bandiere di cotipo $\{i,j\}$ sono circoli, con le i -varie

tà in ruolo di punti.

2) Con $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1} \xrightarrow{Af} \mathcal{O}$ intendiamo che i residui di bandiere di cotipo i, j sono spazi affini, con le i -varietà in ruolo di punti.

Rimando per altre marche notevoli (ovvero: classi notevoli di geometrie di rango 2) all'articolo di Buekenout [9].

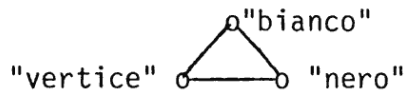
Accanto ai diagrammi ora considerati (*diagrammi speciali*) è utile definire il *diagramma di base* $\Delta(\Gamma)$ di una geometria Γ su un insieme di tipi Δ (cfr. [8]); $\Delta(\Gamma)$ è il grafo (semplice, non marcato) tracciato su Δ congiungendo due tipi i, j con un lato se, per qualche bandiera F di cotipo $\{i, j\}$, Γ_F non è un digono generalizzato (concedendo ora, con una leggera modifica terminologica, che un digono generalizzato possa anche avere un solopunto e/o una sola retta).

Nota - Il diagramma di base non è un caso limite di diagramma speciale.

Data una bandiera F , il diagramma di base $\Delta(\Gamma_F)$ del residuo di F , è un sottografo del grafo indotto da $\Delta(\Gamma)$ sul cotipo $\Delta-t(F)$ di F .

Nota - A differenza di quanto accade per i diagrammi speciali, il diagramma di base $\Delta(\Gamma_F)$ può essere un sottografo proprio del grafo indotto su $\Delta-t(F)$ da $\Delta(\Gamma)$. Si consideri infatti su una sfera una triangolazione T tale che i triangoli di T siano colorati in bianco e in nero in modo che triangoli adiacenti abbiano colori opposti. Un calcolo sulla caratteristica di Eulero mostra che c'è almeno un vertice di T da cui escono quattro triangoli. Se per ogni vertice di T escono quattro triangoli, allora T dà lo spazio polare magro di rango 3. In tal caso la costruzione del complesso orifiamma si riduce a scegliere i triangoli e i vertici come nuove varietà, ripartire i triangoli in due tipi diversi a seconda del loro colore, e definire l'incidenza tra triangoli di colore opposto mediante l'adiacenza (si è già vista questa costruzione all'inizio del cap. 4).

Supponiamo ora che T abbia più di 8 triangoli. In tal caso v'è almeno un vertice da cui escono più di quattro triangoli (anche ciò si ottiene da un facile computo sulla caratteristica di Eulero). Sicché, se ripetiamo su T la costruzione ora descritta, otteniamo una geometria Γ di diagramma di base:



(ove si assuma come insieme di tipi Δ la terna di parole "vertice", "bianco", "nero" secondo ovvie convenzioni). Tuttavia vi sono sempre vertici di T da cui escono quattro triangoli. Se x è un tal vertice, il residuo Γ_x di x in Γ è un digono: sicché $\Delta(\Gamma_x)$ non è il grafo indotto da $\Delta(\Gamma)$ sulla coppia di parole "bianco" e "nero" (cotipo di x). Si noti che le modalità di definizione dei diagrammi speciali escludono il verificarsi su essi di patologie analoghe a questa.

Ovvio in che senso si parlerà di *somma diretta* di geometrie, di *geometrie riducibili* o *irriducibili* (rimando a quanto stabilito nel Cap. III su complessi di vertici e faccie). Dato poi un sottoinsieme D di Δ , indichiamo con $\Gamma^D = (t^{-1}(D), I^D, t^D)$ la geometria indotta da Γ su $t^{-1}(D)$ (I^D e t^D sono l'incidenza e la funzione di tipo indotto su $t^{-1}(D)$ dall'incidenza e dalla funzione di tipo t di Γ ; che Γ^D sia una geometria è presto visto). Il diagramma di base $\Delta(\Gamma^D)$ di Γ^D è un sovragrafo del grafo indotto da $\Delta(\Gamma)$ su D .

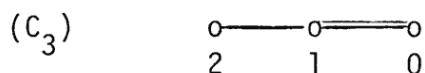
Nota - Non è detto che $\Delta(\Gamma^D)$ coincida col grafo indotto da $\Delta(\Gamma)$ su D . Sia infatti Γ uno spazio proiettivo tridimensionale e assumiamo, come di consueto, le dimensioni come tipi. Piniamo $D = \{0, 2\}$. Allora $\Delta(\Gamma)$ induce su D il grafo discreto. Ma Γ^D non è un digono generalizzato. Sicché $\Delta(\Gamma^D)$ ha (anzi: è) un lato.

Similmente a quanto accadeva per gli edifici generalizzati (cfr. la (b.6) del Cap. 3):

(gd.1) Sia Γ una geometria su Δ . Allora $\Delta(\Gamma)$ è connesso se e solo se Γ è irriducibile. Sia $\Delta(\Gamma)$ non connesso, e $\{D_i | i \in J\}$ sia l'insieme delle sue componenti connesse. Allora è $\Gamma = \bigoplus_{i \in J} \Gamma^{D_i}$.

Rimando a [8] per una dimostrazione. Qui mi limito a notare che la dimostrazione, per induzione sul rango, fa uso essenziale dell'assunzione che le geometrie siano date su insiemi finiti di tipi. Sicché si discosta da quella data nel cap.3 per la (b.6). Rammento anzi che la (b.6) vale anche nel caso di rango infinito. Se invece si ammettono geometrie su insiemi infiniti di tipi, la (gd.1) cade, anche se sulle geometrie si assumono ipotesi apparentemente non deboli: sono noti controesempi. Ignoro se la ragione di ciò stia nel continuare a considerare le geometrie di rango infinito come complessi di bandiere. Su ciò comunque non insisto. Avverto invece che la (gd.1) fa uso essenziale anche dalla (t.5).

Nota - Avverto che la reciproca della (gd.1) è falsa. Ovvero: non è detto che, dati due tipi i e j , se tutte le i -varietà sono incidenti a tutte le j -varietà, allora i e j stiano in due distinte componenti connesse del diagramma di base. Si consideri infatti un grafo completo su quattro punti. Si assumano come tipi i numeri 0,1 e 2, si assumano come 0-varietà i vertici del grafo, come 1-varietà le rette e come 2-varietà i quadrangoli estraibili dal grafo. Le incidenze siano definite nel modo ovvio. Si ottiene una geometria nel diagramma speciale



(non è però uno spazio polare). Il diagramma di base di tale geometria è dunque:
 $\begin{array}{ccc} \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ 0 & & 1 & & 2 \end{array}$. Nondimeno, tutte le 0-varietà sono incidenti a tutte le 2-varietà.

Chiudo questo capitolo con alcuni risultati, ormai classici.

Rimando a H.H.Crapo e G.C.Rota "Combinatorial Geometries" (1971) per la definizione di geometria combinatoriale. Qui, per evitare equivoci, userò la dizione *geometria di chiusura* anziché "geometria combinatoriale". Diciamo *dimensione* di un sottospazio X in una geometria di chiusura la cardinalità, diminuita di 1, di un insieme di generatori indipendenti di X . La dimensione del sottospazio improprio è detta *dimensione* della geometria. Si ha:

(gd.2) Le geometrie di chiusura n -dimensionali sono le geometrie (di Tits-Buekenhout) di diagramma:

$$(L_n) \quad \begin{array}{ccccccc} & & L & & L & & \dots & & L & & \\ & & \text{---} & & \text{---} & & & & \text{---} & & \\ 0 & & 1 & & 2 & & & & n-2 & & n-1 \end{array}$$

(La (gd.1) è essenzialmente il Teorema 7 di [7]). Dò questa dimostrazione per esteso, come esempio.

Che le geometrie di chiusura siano geometrie in (L_n) è ovvio: si scartino i sottospazi vuoto e improprio, e si assumano le dimensioni come tipi e si definiscono le incidenze nel modo ovvio, mediante le inclusioni. Le (t.3) e (t.5) sono di immediata verifica. Viceversa, sia $\Gamma = (V, I, t)$ una geometria nel diagramma (L_n) . Possiamo sempre identificare l'insieme dei tipi Δ con l'insieme degli indici dei vertici del diagramma. La dimostrazione è per induzione su n . Se $n \leq 2$ non c'è nulla da provare (se $n=2$ basterà definire uguale a V la chiusura di una terna di punti non allineati; il resto viene dalla definizione di spazio lineare: se $n=1$ le cose sono ancor più banali). Sia $n > 2$. Diciamo punti le varietà di tipo 0 e rette quelle di tipo 1.

Cominciamo col provare che:

i) Per due punti passa sempre almeno una retta.

Per la (t.5) possiamo ricondurci a dimostrare che, dati tre punti x, y, z tali che vi sia una retta u per x, y e una retta v per y e z , esiste una retta w per x e z . Ciò si prova passando al residuo di y . Qui u e v assumono il ruolo di punti, sicché, per ipotesi induttiva, c'è una varietà a di tipo 2 (una retta nel residuo di y) incidente sia ad u che a v . Sicché, passando ai residui delle rette (1-varietà) u e v e usando la (gd.1), si ha $x|a, y|a, z|a$. Si passi ora al residuo di a . In esso si ha subito che c'è una 1-varietà w incidente sia ad x che ad y . E siamo a posto.

Proviamo ora che:

ii) Per due punti passa al più una retta.

Per assurdo, siano u e v rette distinte incidenti a due distinti punti x e y . Passiamo al residuo di x . In esso, per ipotesi induttiva, esiste una 2-varietà z incidente sia ad u che a v . Passando poi al residuo di u e applicando

la (gd.1), si ha che $y \perp z$. Passando ora al residuo di z , si ha la contraddizione.

Indichiamo ora con $\sigma_0(x)$ l'insieme delle 0-varietà incidenti ad una data varietà x , ovvero la 0-ombra di x . Allora:

iii) Per ogni scelta delle varietà x, y si ha $\sigma_0(x) \subseteq \sigma_0(y)$ se e solo se $t(x) \leq t(y)$, e $x \perp y$.

Il "se" è ovvio (si passi al residuo di x e si applichi la (gd.1), se $t(x) \neq t(y)$; se $t(x) = t(y)$, si ha $y = x$ dalla (t.3)). Proviamo il "solo se". Per la (t.3), è $\sigma_0(x) \neq \emptyset$. Sia $u \in \sigma_0(x)$. È intanto $x \perp u$. Se $t(x) = 0$, è $x = u$, per la (t.3). E non v'è nulla da provare. Sia $t(x) > 0$. Allora, per (t.3), esiste una 2-varietà u' incidente ad x . Per definizione di spazio lineare, esistono almeno due varietà nel residuo di u' incidenti ad x . Sicché $\sigma_0(x)$ contiene almeno due elementi. Altrettanto dunque vale per $\sigma_0(y)$. Sicché $t(y) > 0$, per la (t.3). Pertanto sia x che y appartengono al residuo di u . Se $\sigma_1^u(x)$ e $\sigma_1^u(y)$ sono gli insiemi di 1-varietà nel residuo di u incidenti ad x e y , rispettivamente (1-ombre di x e y in Γ_u), allora risulta $\sigma_1^u(x) \subseteq \sigma_1^u(y)$.

Infatti, sia z un elemento di tipo 1 incidente ad u ed x . Per la (t.3) esiste una 2-varietà z' incidente a z , e, per definizione di spazio lineare, esistono nel residuo di z' almeno due 0-varietà incidenti a z . Ne segue che $\sigma_0(z)$ contiene almeno due elementi. In particolare, contiene un elemento v diverso da u . È certo $v \perp x$. Infatti, $v \perp x$ è ovvio se $t(x) = 1$, poiché in tal caso è $x = z$, per la (t.3). Se $t(x) < 1$, si passi al residuo di z ; che $v \perp x$ segue allora dalla (gd.1). Ma è anche $v \perp y$, perché $\sigma_0(x) \subseteq \sigma_0(y)$ per ipotesi. Passando al residuo di y , vi troviamo, per ipotesi induttiva, una 1-varietà w tale che $u, v \in \sigma_0^y(w)$ (ove $\sigma_0^y(w)$ è la 0-ombra di w nel residuo di y ; a rigore, il ragionamento deve sfruttare anche la (gd.1)). Ma è, allora, $w = z$ per la ii). Sicché $z \perp y$. Si ha quindi $\sigma_1^u(x) \subseteq \sigma_1^u(y)$. Ora, le $t(x) \leq t(y)$ e $x \perp y$ seguono per ipotesi induttiva sul residuo di u .

Per di più:

iv) E' $\sigma_0(x) = \sigma_0(y)$ se e solo se $x=y$.

(banale, per la ii) e la (t.3)).

Si ha poi:

v) Siano x e y due varietà, x di tipo 0 ed y di tipo $< n-1$. E sia $x \notin \sigma_0(y)$. Allora c'è una varietà z di tipo $t(y)+1$ e incidente sia ad x che ad y .

Possiamo assumere $t(y) > 0$ (altrimenti l'asserto segue subito dalla i)). Si prenda una 0-varietà $u \in \sigma_0(y)$ (c'è per (t.3)); sia v la retta per x e u (cfr. i) e ii)). E' $v \notin \sigma_1(y)$ (ove $\sigma_1(y)$, 1-ombra di y , è l'insieme delle 1-varietà incidenti ad y). Infatti, se altrimenti, avremmo $v = y$ se $t(y) = 1$ (e ciò darebbe una contraddizione) e, se $t(y) > 1$, passando al residuo di v avremmo, per la (gd.1), $x \in y$ (di nuovo una contraddizione). Passando ora al residuo di u , vi proviamo una $(t(y)+1)$ -varietà z con $v \cap z \cap y$, per ipotesi induttiva. Passando ora al residuo di v , si ha $x \in z$, per la (gd.1). E la v segue. Ancora:

vi) se $x, y \in \sigma_0(z)$ e $x \neq y$, allora la retta v per x e y (cfr. i) e ii)) è incidente a z .

(Ciò è stato implicitamente già provato nel corso della dimostrazione della iii)).

Da quanto sin qui visto si ha immediatamente che:

Le varietà sono identificabili con le loro 0-ombre e l'incidenza è interpretabile come inclusione. Chiamate dunque le (0-ombre di) varietà sottospazi, la vi) può leggersi così: se una retta interseca un sottospazio in due punti allora vi appartiene. Conveniamo di chiamare sottospazi anche V e \emptyset .

Proviamo infine che:

vii) Intersezioni di famiglie di sottospazi sono sottospazi.

Sia $\{x_j | j \in J\}$ un insieme di varietà. Se $\bigcap_{j \in J} \sigma_0(x_j) = \emptyset$ o V non v'è nulla da provare. Sia dunque $V \neq \bigcap_{j \in J} \sigma_0(x_j) \neq \emptyset$. Sia $x \in \bigcap_{j \in J} \sigma_0(x_j)$. Se $\{x\} = \bigcap_{j \in J} \sigma_0(x_j)$, non v'è nulla da provare. In caso contrario, per ipotesi induttiva esiste un elemento u nel residuo di x tale che $\sigma_1^x(u) = \bigcap_{j \in J} \sigma_1^x(x_j)$. Ovvero :

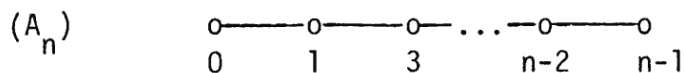
$\sigma_1(\{u,x\}) = \bigcap_{j \in J} \sigma_1(\{x,x_j\})$ (ove, se F è una bandiera ed i un tipo, con $\sigma_i(F)$ intendiamo l'insieme delle i -varietà incidenti ad F , i -ombra di F). Per la (gd.1), si ha $\sigma_0(u) \supseteq \sigma_0 \sigma_1(\{u,x\})$ (con ovvio senso delle notazioni).
 Se $t(u) = 1$ la dimostrazione è conclusa. Se invece $t(u) > 1$, sia $y \in \sigma_0(u)$. Per la i), o per ipotesi induttiva, nel residuo di u c'è una 1-varietà v incidente ad x e y . E' allora $y \in \sigma_0(v) \subseteq \sigma_0 \sigma_1(\{x,u\})$. Sicché $\sigma_0(u) = \sigma_0 \sigma_1(\{x,u\})$.
 Sia ora $z \in \bigcap_{j \in J} \sigma_0(x_j)$ e $z \neq x$. Passiamo al residuo di x_j . Vi troviamo una 1-varietà v_j incidente a x e z (per la i), o per ipotesi induttiva). Ma, per la ii), risulta $v_i = v_j$ per $i, j \in J$. Poniamo $v' = v_i$ ($i \in J$). E' certo $v' \cap x$ e $v' \in \bigcap_{j \in J} \sigma_1(\{x,x_j\})$. Sicché $v' \in \sigma_1(\{u,x\})$. Ma, allora, $z \in \sigma_0(u)$, perché $z \in \sigma_0(v') \subseteq \sigma_0 \sigma_1(\{u,x\}) = \sigma_0(u)$. Infine: $\sigma_0(u) = \bigcap_{j \in J} \sigma_0(x_j)$.

La vii) è provata.

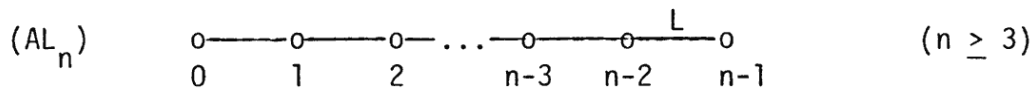
Che il sistema dei sottospazi $\{\sigma_0(x) \mid x \in V\} \cup \{\emptyset, V\}$ dia una geometria di chiusura di dimensione n segue ora con metodi di routine, dalle i)-vii).

Dalla (gd.2) si hanno i seguenti corollari (Cfr. [7]):

(gd.3) Le geometrie proiettive n -dimensionali sono le geometrie di diagramma:

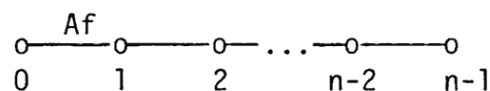


Le geometrie di diagramma:



sono quelle ottenute da geometrie proiettive m -dimensionali con $m \geq n$ dimenticando i sottospazi k -dimensionali per ogni $k \geq n$.

Le geometrie di diagramma:



sono gli spazi affini n -dimensionali.

Le dimostrazioni si riducono a lunghe, ma elementari, verifiche. Mi limito alla verifica della prima asserzione. Occorre solo provare che le geometrie in (A_n) sono proiettive. Allo scopo basta mostrare che, data una varietà z e due punti x, y , se y appartiene al sottospazio generato da $\sigma_0(z)$ e x , allora la retta u per x e y interseca $\sigma_0(z)$ (la terminologia qui usata è autorizzata dalla (gd.2)). La cosa segue per induzione su n . Se $n \leq 2$ non v'è nulla da provare. Sia $n > 2$. Se $\sigma_0(z)$ ed x generano un sottospazio proprio, per la (gd.2) esiste una varietà v tale che $\sigma_0(v)$ sia il sottospazio generato da $\sigma_0(z)$ ed x . E l'asserto segue per ipotesi induttiva sul residuo di v . In caso contrario, sia $w \in \sigma_0(z)$. Passando al residuo di w , si ha per ipotesi induttiva che il piano individuato da w, y ed x contiene una retta in $\sigma_1(\{w, z\})$. La conclusione è ora immediata.


Per una dimostrazione diretta (ma non molto diversa da quella data per la (gd.2)) della parte della (gd.3) concernente (A_n) rimando alla parte finale di [28]. Osservo invece che dalla (gd.3) segue subito che:

(gd.4) (Cfr. Cap. 4 (b.10)) Le geometrie proiettive n -dimensionali sono gli edifici generalizzati di diagramma (A_n) .

Infatti, gli edifici generalizzati sono geometrie. La (gd.4) segue dunque dalla (gd.3) e dal fatto che le geometrie proiettive sono edifici generalizzati. Per una dimostrazione diretta della (gd.4) (non molto diversa però da quella qui prodotta per la (g.2)) rimando al Cap. 6 di [26].

CAPITOLO 6

GEOMETRIE DI TITS-BUEKENHOUT
(LA PROPRIETA' D'INTERSEZIONE)

Gli ultimi risultati del precedente capitolo danno l'impressione che la definizione di geometria, così come la si è fissata, sia già soddisfacente forte. Ma è presto visto che si tratta di un'impressione erronea. In realtà il risultato della (gd.2) (e quindi della (gd.3)) è reso possibile soprattutto dalla ricchezza dell'informazione racchiusa nel diagramma (L_n) . Ciò appare chiaro non appena si tenti di stabilire su geometrie di diagramma (C_n) un risultato analogo alla (gd.3). L'esempio della geometria costruita sul grafo completo su quattro punti, dato verso la fine del capitolo precedente, mostra che vi sono geometrie di diagramma (C_3)  che non sono spazi polari.

Ora basta poco per accorgersi che la definizione di geometria data nel Cap. 5 consente di denominare "geometria" troppe cose che ben poco hanno di geometrico, nel senso usuale del termine. (Non che questo sia un argomento risolutivo, ma ha la sua importanza). In particolare, un qualunque grafo bipartito connesso dà una geometria di rango 2. Un qualunque insieme di n elementi, con incidenza banale (ogni elemento è incidente ad ogni altro), è una geometria di rango n ; ha una sola camera: l'insieme stesso; i tipi sono gli elementi stessi (in [8] tale geometria viene detta *geometria unità*). In termini categoriali, è un oggetto finale.

Peraltro non sembra opportuno, allo stato attuale delle cose, modificare troppo la definizione. Intanto perché non è ancora del tutto chiaro quali rafforzamenti sia più giusto adottare (per un esame di alcune delle soluzioni più frequentemente proposte rimando a [1]). E poi perché sarebbe desiderabile rinvenire un sistema di definizioni chiuso per costruzioni importanti e, magari, tale da individuare una categoria interessante. E può essere che a questo scopo si rendano necessarie definizioni più deboli di quelle che l'intuizione concederebbe. Ma quel che sappiamo qui è ancora troppo poco per permetterci conclusioni. Qualche risultato c'è, ma si è solo agli inizi.

Nota - La definizione di *struttura di incidenza* adottata da Buekenhout in [7], includendo la Proprietà di Intersezione, è più restrittiva di quella data qui, e, quindi,

di quelle date dallo stesso Buekenhout in [8] e da Tits in [28].

Dunque, pur tenendo ferma la definizione di geometria, passiamo brevemente in rassegna alcune proprietà che, qualora siano imposte sulle nostre geometrie, le riavvicinano a ciò che si è soliti qualificare come 'geometrico'. Intanto: la definizione di geometria non impedisce che una geometria di rango 2 abbia un solo punto o una sola retta. Possiamo evitare ciò assumendo che ogni bandiera di corango 1 sia inclusa in almeno due camere. Una geometria dove ciò accada verrà detta *ferma* (cfr. "The Basic Diagram of a Geometry").

Nota - La fermezza entrava nella definizione di struttura di incidenza in [7], già nel primo assioma. Ad ogni modo, le usuali marche per diagrammi implicano che le geometrie per cui possono venire impiegate siano ferme.

Potremo poi sperare di evitare un po' di patologie assumendo qualche proprietà suggerita dalla considerazione delle geometrie di chiusura.

Sia i un tipo. Rammento che la i -ombra $\sigma_i(F)$ di una bandiera F è l'insieme delle i -varietà incidenti ad F (cfr. Cap. 5, dimostrazione della (gd.2)). Noto che $\sigma_i(\emptyset)$ è l'insieme V_i delle i -varietà. Convenuto di annoverare tra le i -ombre anche il \emptyset , potremmo allora considerare la proprietà:

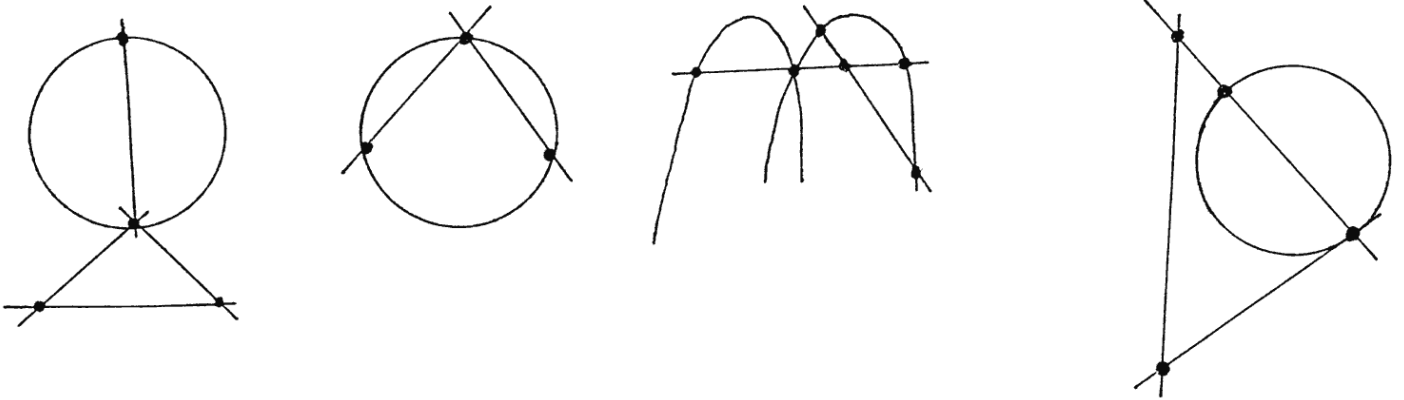
(IP.1) (Cfr. proprietà (Int') in [28]).

Per ogni tipo i l'intersezione definisce un semireticolo completo sull'insieme delle i -ombre. (Sicché: vi resta definito un reticolo completo e atomico).

Nota - In [8] e nell'articolo di Tits [27], si considera una proprietà più debole della (IP.1), indicata con (GL), o Condizione di Linearità. Si ottiene dalla (IP.1) depennando la richiesta che il semireticolo definito da Ω sia completo.

E' presto visto che la (IP.1) cade sui due ultimi esempi del Cap. 5. Nondimeno, essa permette ancora una vasta patologia. Dò alcuni esempi, tutti di rango 2.

Si assumano come 1-varietà le linee e come 0-varietà i punti, in ciascuna delle seguenti figure. Le incidenze sono stabilite nel modo ovvio. La (IP.1) cade su ciascuna delle quattro geometrie così ottenute.



Di esempi di questo genere se ne possono produrre a volontà. E' ovvio che punti, rette, cerchi, ... qui sono niente più che un mezzo espressivo. Per esempio, la seconda di queste quattro geometrie può anche essere così rappresentata: le varietà sono i numeri 2,3,7,6,21 e 42, di tipo 0 o 1 a seconda che siano o no primi. L'incidenza è: il dividere.

Un altro esempio. Sia N l'insieme dei numeri naturali ed N^- l'insieme degli interi negativi. Assumiamo i naturali come 0-varietà e gli interi negativi come 1-varietà. Definiamo un'incidenza I mediante la clausola: sia $x \in N$ ed $y \in N^-$; è xIy se $x \leq -y$. Si ottiene una geometria (ferma) su cui vale (IP.1).

La cosa più fastidiosa in questi esempi è che, pur senza essere digoni generalizzati, vi capita che due 'rette' distinte abbiano più 'punti' in comune.

Si tratta di trovare dunque una proprietà più forte della (Int'). Una soluzione ci viene ancora una volta dalla teoria degli edifici generalizzati. Si dimostra (cfr. [26] , Cap. 12) che *in un edificio generalizzato vale la seguente proprietà:*

(IP.2) Sia i un tipo in una geometria Γ . Siano F una bandiera ed x una varietà di Γ , e sia $\sigma_i(F) \cap \sigma_i(x) \neq \emptyset$. Allora esiste una bandiera G incidente ad F ed x e tale che $\sigma_i(G) = \sigma_i(F) \cap \sigma_i(x)$. Lo stesso vale sul residuo di ogni bandiera di Γ .

La (IP.2) è l'Assioma (3) in [7], ed è chiamata *Proprietà d'Intersezione* in [8]. In [28] compare una versione più debole di (IP), indicata con (Int). Si può provare che la (IP.2) equivale a:

(IP.2') Per ogni tipo i , e per ogni insieme $\{F_j | j \in J\}$ di bandiere, se $\bigcap_{j \in J} \sigma_i(F_j) \neq \emptyset$ allora esiste una bandiera F incidente a ciascuna delle F_j ($j \in J$) e tale che $\sigma_i(F) = \bigcap_{j \in J} \sigma_i(F_j)$.

(Rimando per una dimostrazione a [1], Proposizione 3 e condizione (S)). La (IP.2) è falsa sugli esempi precedenti. Sicché, per l'equivalenza di (IP.2) ed (IP.2') si trasporta ai residui.

Siccome la denominazione "geometrie lineari" è talvolta impiegata per designare geometrie verificanti la (IP.1) (o qualche sua versione debole) useremo qui la dizione *geometrie strettamente lineari* per designare le geometrie ferme verificanti la (IP.2) (equivalentemente: la (IP.2')). La definizione trova una sua plausibilità nel seguente risultato:

(gd.5) Le geometrie strettamente lineari di rango 2 sono i digoni generalizzati e gli spazi parziali lineari.

(Rimando per la dimostrazione a [8]; osservo che la dimostrazione usa in modo essenziale l'ipotesi di fermezza).

La (gd.5) garantisce che la stretta linearità ci evita gravi patologie sulle geometrie di rango 2. Si ha, poi:

(gd.6) Sia Γ una geometria strettamente lineare e i, j due tipi di Γ . Se v è una j -varietà incidente a tutte le i -varietà, allora i e j appartengono a due distinte componenti connesse di $\Delta(\Gamma)$.

(Rimando per la dimostrazione a [21]). La (gd.6) fornisce la reciproca della (gd.1). La (IP.2) ha ancora altre conseguenze notevoli. Dato un tipo i , una bandiera F si dirà *i -ridotta* se per ogni sottobandiera propria G di F risulta $\sigma_i(G) \neq \sigma_i(F)$ (si osservi che è, in ogni caso, $\sigma_i(G) \supseteq \sigma_i(F)$ per ogni sottobandiera G di una bandiera F). Una sottobandiera i -ridotta \bar{F} di una bandiera F si dirà una *i -riduzione* di F se è $\sigma_i(\bar{F}) = \sigma_i(F)$.

Si ha:

(gd.7) Sia Γ una geometria strettamente lineare ed i un tipo di Γ . Due bandiere i -ridotte di Γ coincidono se hanno la stessa i -ombra. (Sicché) ogni bandiera di Γ ha un'unica i -riduzione. Date poi due bandiere F e G con F i -ridotta, è FIG se $\sigma_i(F) \subseteq \sigma_i(G)$.

(Rimando per la dimostrazione a [21]). La (gd.7) stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le i -ombre e le bandiere i -ridotte. Non permette ancora, però, di ricostruire le inclusioni tra i -ombre dalle incidenze tra bandiere o, viceversa, tutte le incidenze tra bandiere (i -ridotte) dalle inclusioni tra le i -ombre.

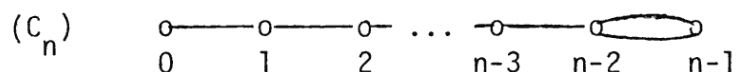
Possiamo ora dare il teorema di caratterizzazione degli edifici generalizzati di diagramma di tipo sferico (diverso da (H_3) ed (H_4)).

(gd.8) Gli edifici generalizzati di diagramma \mathfrak{D} (con $\mathfrak{D} = (A_n), (C_n), (D_n), (E_6), (E_7), (E_8), (F_4)$) sono le geometrie strettamente lineari di diagramma \mathfrak{D} .

Sappiamo già che gli edifici generalizzati sono geometrie strettamente lineari. La dimostrazione che le geometrie strettamente lineari nei diagrammi sopra elencati sono edifici generalizzati è assai complessa. Rimando per essa a [28]. Qui mi limiterò a provare per via diretta alcune asserzioni più limitate. Rammento intanto che la parte della (gd.8) concernente (A_n) è già stata provata direttamente (cfr. (gd.3) e (gd.4)).

Proverò ora che:

(gd.9) Le geometrie strettamente lineari di diagramma:



sono gli spazi polari di rango n .

(Da ciò segue subito la parte della (gd.8) concernente (C_n)). Sappiamo già che gli spazi polari sono geometrie strettamente lineari. Proviamo il viceversa. La dimostrazione è per induzione su n . Se $n=2$ non v'è nulla da provare. Sia $n > 2$. Sia $\Gamma = (V, I, t)$ una geometria strettamente lineare di diagramma (C_n) .

Come nella dimostrazione della (gd.2), chiamiamo punti le 0-varietà e rette le 1-varietà. Chiamiamo le (n-1)-varietà sottospazi massimali. La (gd.6) mostra che tutte le varietà sono 0-ridotte (si rammenti che \emptyset è l'unica sottobandiera propria (del singoletto) di una varietà). Sicché, per la (gd.6), due varietà coincidono se hanno la stessa 0-ombra. Ciò ci autorizza ad identificare le varietà con le loro 0-ombre. Inoltre:

i) Per ogni $j \leq n-2$, due j-varietà distinte sono incidenti ad al più una stessa (j+1)-varietà.

Infatti, per assurdo, siano x, y due distinte j-varietà, ed u, v due distinte (j+1)-varietà incidenti sia ad x che ad y . Per la (IP.2), esiste una bandiera F incidente sia ad u che a v e tale che $\sigma_j(F) = \sigma_j(u) \cap \sigma_j(v)$. Per la (t.3), si ha che $\{j, j+1\} \cap t(F) = \emptyset$ (perché $u \neq v$ e $x \neq y$). Del resto, u e v non sono j-ridotte nel residuo Γ_F di F . Sicché, per la (gd.6), j e $j+1$ appartengono a distinte componenti connesse di $\Delta(\Gamma_F)$. Il ché è impossibile, qui. E l'assurdo è raggiunto.

ii) Date due varietà x, y risulta $\sigma_0(x) \subseteq \sigma_0(y)$ se e solo se $x|y$ e $t(x) \leq t(y)$. Il "se" è ovvio (basta passare al residuo di x , se $t(x) \neq 0$; se invece $t(x) = 0$, è, banalmente, $\sigma_0(x) = \{x\}$). Proviamo il "solo se". Siccome le varietà sono 0-ridotte, la (gd.7) mostra che se $\sigma_0(x) \subseteq \sigma_0(y)$ allora $x|y$. Se $t(x) \neq t(y)$, e $0 \neq t(x)$, si passi al residuo Γ_x di x . In Γ_x la varietà y non è 0-ridotta. Sicché, per la (gd.6), 0 e $t(y)$ appartengono a due distinte componenti connesse di $\Delta(\Gamma_x)$. Ma qui ciò può essere solo se $t(x) < t(y)$.

iii) Identificate le varietà con le loro 0-ombre, chiamamole sottospazi. Si ha allora che una retta è inclusa in un sottospazio se lo interseca in due punti distinti (ovvio il senso di queste locuzioni).

Siano infatti x, x' due punti distinti, y una retta e z un sottospazio tali che $z|x|y|x'|z$. Per la (IP.2), esiste una bandiera F con $z|F|y$ e $\sigma_0(F) = \sigma_0(z) \cap \sigma_0(y)$. Siccome $x \neq x'$, è $0 \notin t(F)$. Se $1 \in t(F)$ si ha $y \in F$, per la (t.3). E da ciò $y|z$ perché $F|z$. Sia invece $1 \notin t(F)$. Passiamo al residuo di F .

La varietà y non è 0-ridotta in Γ_F . Sicché, per la (gd.6), deve essere qui $0 < i < t(y) = 1$ per qualche $i \in \text{iet}(F)$: assurdo.

Completiamo ora l'identificazione di varietà e 0-ombre. Sappiamo già che varietà di Γ sono 0-ridotte. Viceversa, sia F una bandiera non vuota 0-ridotta di Γ . La forma di (C_n) e la (gd.1) mostrano che F è una varietà. Sicché le varietà sono le bandiere non vuote 0-ridotte, e la (gd.7) mostra che possiamo identificare le 0-ombre, che siano diverse dall'insieme V_0 di tutte le 0-varietà, con le varietà di Γ . Date due varietà u e v , se è $\sigma_0(u) \cap \sigma_0(v) \neq \emptyset$, indichiamo con $u \wedge v$ la varietà w tale che $\sigma_0(w) = \sigma_0(u) \cap \sigma_0(v)$ (esistenza ed unicità di w seguono subito da (IP.2), (gd.7) e da quanto ora visto). La varietà $u \wedge v$ può anche essere caratterizzata, per la ii), come la varietà w di tipo massimo tra quelle che sono incidenti ad u e v ed hanno tipo non superiore a $t(u)$ e $t(v)$. Inoltre, posto che esista una varietà x tale che $\sigma_0(x) \supseteq \sigma_0(u) \cup \sigma_0(v)$, definiamo $u \vee v$ uguale alla varietà w tale che $\sigma_0(w) = \cap(\sigma_0(x) \mid \sigma_0(x) \supseteq \sigma_0(u) \cup \sigma_0(v))$. Esistenza ed unicità di w seguono come per $u \wedge v$ (occorrerà però sfruttare la formulazione (IP.2') di (IP.2)). E' possibile per ii), dare di $u \vee v$ una caratterizzazione simile a quella data sopra per $u \wedge v$. Introduciamo infine due simboli convenzionali $*_0$ e $*_I$, e poniamo $u \wedge v = *_0$ se $\sigma_0(u) \cap \sigma_0(v) = \emptyset$ e $u \vee v = *_I$ se non esiste alcuna varietà x tale $\sigma_0(x) \supseteq \sigma_0(u) \cup \sigma_0(v)$ (a rigore, si può assumere al posto di $*_I$ la bandiera \emptyset). Estendiamo poi la funzione di tipo t ai due simboli $*_0$ e $*_I$, ponendo $t(*_0) = -1$ e $t(*_I) = n$. In definitiva: si è ricopiato sulle varietà il reticolo delle 0-ombre. Ciò ci autorizza nel seguito ad usare i termini "varietà", "0-ombra" con una certa libertà, sostituendoli spesso entrambi col termine "sottospazio".

Possiamo ora passare alla verifica delle (P.1)-(P.4) (Cfr. Cap. I, Esempio 2)). L'assioma (P.1) segue dalla (gd.3). L'assioma (P.4) segue immediatamente da (IP.2'). Per provare (P.2) occorrono alcuni preliminari.

Sia (x_0, x_1, x_2) una terna di punti distinti e (y_0, y_1, y_2) una terna di sottospazi massimali, tali che $x_0 I y_0 I x_1 I y_1 I x_2 I y_2$. Passando al residuo di y_1 in Γ , dalla (gd.3) si ha che x_1 e x_2 sono allineati. Sia dunque z la retta di

Γ per x_1 e x_2 (unica per la ii). Passiamo al residuo di x_2 . Esiste un sottospazio massimale y' di Γ incidente a z e tale che y' e y_2 si intersecano su un sottospazio di Γ di tipo $n-2$ (infatti: la (P.2) vale su Γ_{x_2} , per ipotesi induttiva; noto che questo è il primo punto della dimostrazione in cui interviene l'ipotesi induttiva). Per la (gd.1) applicata al residuo di z si ha poi che (la 0-ombra di) z è inclusa nella (0-ombra di) y' . Sicché $x_1 I y'$. Similmente, possiamo trovare un sottospazio massimale y'' nel residuo di x_1 tale che y_0 ed y'' si intersechino su un sottospazio di tipo $n-2$ e sia $x_0 I y''$. Applicando ora la (gd.3) al residuo di y' si ottiene $t(y' \wedge y'') + t(y' \wedge y_2) = t((y' \wedge y'') \vee (y' \wedge y_2)) + t(y' \wedge y'' \wedge y_2)$. Si ha dunque $2t(y_2) = t(y_2) + t(y' \wedge y'' \wedge y_2) + 2$. Da cui $t(y' \wedge y'' \wedge y_2) = t(y_2) - 2$. Ma è $t(y_2) - 2 \geq 0$, perché $n > 2$. Sicché $y' \wedge y'' \wedge y_2 \neq *_0$. Pertanto c'è un punto x incidente a y', y'' e y_2 . Inoltre è $x_0 I y''$. Sicché possiamo sostituire alla concatenazione $x_0 I y_0 I x_1 I y_1 I x_2 I y_2$ da x_0 a y_2 una più breve concatenazione $x_0 I y'' I x I y_2$.

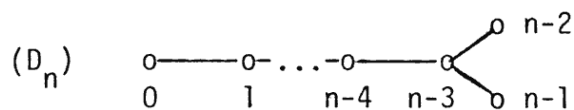
Siano ora x un punto ed y un sottospazio massimale, con x non incidente ad y . Per la (t.5) e per quanto visto ora, esistono un punto x' ed un sottospazio massimale y' tali che $x I y' I x' I y$. Per ipotesi induttiva sul residuo di x' , c'è un sottospazio massimale y'' tale che $x I y'' I x'$ e $t(y'' \wedge y) = n-2$ (occorre sfruttare il fatto che x e x' sono allineati nel residuo di y' , per la (gd.3)). Se ora z fosse un altro sottospazio massimale con le stesse proprietà di y'' , passando al residuo di y e applicando la (gd. 3) e rammentando che $n \geq 3$, avremmo che $y'' \wedge y$ e $z \wedge y$ hanno in comune almeno un punto x'' . Passando ora al residuo di x'' e applicando l'ipotesi induttiva dobbiamo concludere che $z = y''$. In definitiva: la (P.2) è provata.

Verifichiamo infine la (P.3). Per assurdo, sia falsa. Sia z una varietà di tipo $n-2$ e siano y_1 ed y_2 sottospazi massimali tali che $y_1 \wedge y_2 = z$ (l'esistenza di y_1 e y_2 segue dal fatto che Γ è ferma). Sia $x \in \sigma_0(y_2) - \sigma_0(z)$. Per ipotesi induttiva sul residuo di x , c'è un sottospazio massimale y_3 tale che $x I y_3$ e $\sigma_1(x) \cap \sigma_1(y_2) \cap \sigma_1(y_3) = \emptyset$ (si applichi la (p.2) al residuo di x).

Sicché, per motivi ormai ovvi, deve essere $\{x\} = \sigma_0(y_2) \cap \sigma_0(y_3)$. Ma $\sigma_0(y_1) \cap \sigma_0(y_3) \neq \emptyset$, perché la (P.3) è supposta falsa su Γ . Se risulta $t(y_3 \wedge y_1) \geq 1$, allora $\sigma_0(y_3 \wedge y_1)$ interseca $\sigma_0(z)$ (infatti: si passi al residuo di y_1 , si applichi la (gd.3), e si tenga conto del fatto che z è un iperpiano, nel residuo di y_1). D'altronde è $z = y_1 \wedge y_2$. Sicché i punti comuni a $\sigma_0(y_3 \wedge y_1)$ e a $\sigma_0(z)$ sono quelli in $\sigma_0(y_3 \wedge y_1 \wedge y_2)$. Ma si è visto che x è l'unico punto in $\sigma_0(y_3 \wedge y_2)$. Sicché risulta $x \in \sigma_0(z)$. Il che contraddice le ipotesi assunte su x . Allora si deve concludere che $y_3 \wedge y_1$ è un punto. Sia ora $\pi_{y_3}(z)$ la proiezione del sottospazio z su y_3 (cfr. la (p.1) del cap. I; si noti che la (p.1) discende dalle (P.1), (P.2) e (P.4), senza alcun uso della (P.3). Rimando per ciò al cap. VII di [26]). Per l'appunto, qui sappiamo già che le (P.1), (P.2) e (P.4) valgono su Γ . E' allora $(x \vee (y_3 \wedge y_1)) \cap (z \vee \pi_{y_3}(z))$. Infatti x è un punto di $\pi_{y_3}(z)$, perché x è collineare con z (in quanto $x \in \sigma_0(y_2) \supseteq \sigma_0(z)$, e il residuo di y_2 è una geometria proiettiva per (gd.3) e z è ivi un iperpiano) ed è poi $x \in \sigma_0(y_3)$. Il punto $y_3 \wedge y_1$ è collineare con z per gli stessi motivi (si sostituisca y_1 ad y_2) e ovviamente appartiene a y_3 . Sicché anche $y_3 \wedge y_1$ sta in $\pi_{y_3}(z)$. Per ragioni ormai ovvie, dunque, tutta la retta $x \vee (y_3 \wedge y_1)$ sta in $\pi_{y_3}(z)$. Passiamo ora al residuo di $z \vee \pi_{y_3}(z)$. Esso è una geometria proiettiva di dimensione $n-1$, per la (gd.3) e perché $z \vee \pi_{y_3}(z)$ ha tipo $n-1$ per la (p.1). Rammentando che z , avendo tipo $n-2$, è in tale geometria un iperpiano; si ha così che in tale geometria la retta $x \vee (y_3 \wedge y_1)$ interseca l'iperpiano z . Da ciò, e siccome $\sigma_0(x \vee (y_3 \wedge y_1)) \subseteq \sigma_0(y_3)$ si ha che $\sigma_0(y_3) \cap \sigma_0(z) \neq \emptyset$. Ma, siccome $z = y_1 \wedge y_2$, si ha $\sigma_0(y_3) \cap \sigma_0(z) = \sigma_0(y_3 \wedge y_2 \wedge y_1)$. Ed ora, come sopra, si ottiene $x \in \sigma_0(z)$. Assurdo. La (P.3) è provata.

La dimostrazione è conclusa.

(gd.10) Le geometrie strettamente lineari di diagramma



sono i complessi orifiamma di spazi polari fini.

(Da ciò segue la parte della (gd.8) che riguarda (D_n)). Sappiamo già che i complessi orifiamma di spazi polari fini sono geometrie strettamente lineari, poiché sono edifici generalizzati. Viceversa, sia Γ una geometria strettamente lineare di diagramma (D_n) . Nulla vieta di applicare a Γ la stessa costruzione con cui si è prodotto lo spazio polare fine $\mathfrak{P}(\mathcal{O})$ associato ad un edificio generalizzato \mathcal{O} di diagramma (D_n) (cfr. Cap. IV, parte iniziale). Tale costruzione applicata a Γ produce una geometria $\mathfrak{P}(\Gamma)$, strettamente lineare, di diagramma (C_n) (che $\mathfrak{P}(\Gamma)$ abbia diagramma (C_n) si vede facilmente; occorre invece un pò di pazienza per provare che $\mathfrak{P}(\Gamma)$ è una geometria strettamente lineare; ad ogni modo la cosa può anche ottenersi da un risultato più generale, per il quale rimando alla (gd.18) del prossimo Capitolo 7). A questo punto basta applicare la (gd.9), e invertire la costruzione: si ottiene il complesso orifiamma $\mathcal{O}(\mathfrak{P}(\Gamma))$ dello spazio polare (fine) $\mathfrak{P}(\Gamma)$. Ed è immediato vedere che $\Gamma \cong \mathcal{O}(\mathfrak{P}(\Gamma))$.

Dalla (gd.9) e (gd.10) si ottiene subito che:

(gd.11) (Cfr. Cap. 4, (b.10)). Gli edifici generalizzati di diagramma (C_n) sono gli spazi polari. Gli edifici generalizzati di diagramma (D_n) sono i complessi orifiamma di spazi polari fini.

(Rimando a [26], Cap. 7, per dimostrazioni dirette. Ma non si discostano molto da quelle date qui. E' evidente che le dimostrazioni date in [26] includono specializzazioni della dimostrazione che un edificio generalizzato è una geometria strettamente lineare, data per il caso generale nel Cap. 12 di [26]).

Chiudo questo capitolo tornando ai diagrammi (L_n) . Dalla (gd.2) si ha subito che:

(gd.12) Tutte le geometrie di diagramma:

$$(L_n) \quad \begin{array}{ccccccccc} & & L & & L & & \dots & & L & & \\ & & \text{---} & & \text{---} & & \dots & & \text{---} & & \\ 0 & & 1 & & 2 & & n-2 & & n-1 & & \end{array}$$

sono strettamente lineari.

Per la (gd.2), basta verificare che le geometrie di chiusura sono strettamen

te lineari. E la cosa si ottiene con facili (ma noiose) verifiche.

Aggiungo due risultati, che rappresentano generalizzazioni della (gd.12) e della (gd.9).

(gd.13) Le geometrie di diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \xrightarrow{L} & \circ & \xrightarrow{L} & \circ & \dots & \circ & \xrightarrow{L} & \circ & \xrightarrow{\pi} & \circ \\ 0 & & 1 & & 2 & & n-3 & & n-2 & & n-1 \end{array}$$

sono strettamente lineari se e solo se, per ogni scelta di i con $0 \leq i < n-1$, non esistono quattro varietà a due a due distinte, x, x', y, y' , con $t(x) = t(x') = i$ e $t(y) = t(y') = i+1$, tali che $xIyIx'Iy'Ix$.

(gd.14) Le geometrie di diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \xrightarrow{\pi} & \circ & \xrightarrow{\pi} & \circ & \dots & \circ & \xrightarrow{\pi} & \circ \\ 0 & & 1 & & 2 & & n-2 & & n-1 \end{array}$$

sono strettamente lineari se l'enunciato della (IL-2) vale rispetto al tipo 0.

(Ometto le dimostrazioni. Avverto solo che possono ottenersi sulla falsariga di quella data per la (gd.9)).

CAPITOLO 7
GEOMETRIE DI TITS-BUEKENHOUT
(GEOMETRIE PURE)

L'esempio portato nel Cap. 5 per mostrare che il diagramma di base del residuo Γ_F di una bandiera F di una geometria Γ non è necessariamente il grafo indotto da $\Delta(\Gamma)$ sul cotipo di F , mostra un'altra patologia, che la Proprietà d'Intersezione (IP.2) non basta ad escludere (infatti la (IP.2) vale su tale esempio): può capitare cioè che, dati due tipi i e j , il residuo di una bandiera di cotipo $\{i,j\}$ sia talvolta un digono generalizzato, talaltra no. Dirò *miste* le geometrie che presentano questo comportamento patologico. Si tratta di eccezioni fastidiose nella teoria, benché affatto innocue nella pratica. Innocue perché implicitamente escluse dalle usuali convenzioni adottate nella scrittura di diagrammi.

Nota - Va da sé che si potrebbero modificare dette convenzioni sì da poter disegnare diagrammi anche per geometrie miste. Ma dubito che la cosa possa avere un qualche interesse. L'esempio 1) del Cap. 5 mostra invece che vi possono essere geometrie non miste, nel senso ora definito, e tuttavia 'relativamente miste' rispetto ad un dato sistema di marche per diagrammi speciali (nell'esempio 1: marche per i diagrammi di Coxeter). Ignoro cosa di interessante possa dirsi in generale su questi fatti.

Limitiamoci ora alla considerazione di geometrie strettamente lineari.

Una geometria strettamente lineare è detta *pura* se non è mista; equivalentemente se appartiene al diagramma speciale ottenuto marcando con π i lati del suo diagramma di base (cfr. (gd.5), Cap. 6). Equivalentemente: una geometria strettamente lineare Γ è pura sse per ogni bandiera F il diagramma di base di Γ_F è il grafo indotto da $\Delta(\Gamma)$ sul cotipo di F .

Nota - La definizione di geometria pura non avrebbe alcuna necessità, per essere data, dell'assunzione che le geometrie considerate siano strettamente lineari. Tale assunzione è però indispensabile per ottenere i risultati seguenti. Noto ancora che nel caso di geometrie pure, possiamo considerare il diagramma di base come caso limite di diagramma speciale: quello ottenuto con le due marche (ora le più

generali, per (gd.5)): $\begin{matrix} o & \xrightarrow{\pi} & o \\ i & & j \end{matrix}$ e $\begin{matrix} o & & o \\ i & & j \end{matrix}$.

Sono note varie caratterizzazioni per le geometrie pure. Ne cito qui due, abbastanza semplici.

Rimando all'esempio 1 del Cap. 5 o a [8] per la definizione di insieme *i-ridotto* di vertici di un grafo \mathcal{G} , ove i è un vertice di \mathcal{G} , e per il senso della locuzione X *separa* Y da i (in \mathcal{G}). Si ha:

(gd.15) Una geometria strettamente lineare Γ è pura se e solo se, per ogni tipo i le bandiere *i-ridotte* in Γ sono quelle di tipo *i-ridotto* in $\Delta(\Gamma)$.

(Lascio la dimostrazione a chi legge: è facile). La (gd.15) facilita molto il compito di trovare le bandiere *i-ridotte*: infatti rintracciare in $\Delta(\Gamma)$ gli insiemi *i-ridotti* è cosa di nessuna difficoltà.

L'importanza di poter classificare le bandiere *i-ridotte* è evidente dalla (gd.7) del Cap. 6: le bandiere *i-ridotte* corrispondono biunivocamente alle *i-ombre*. E il sistema delle *i-ombre* dice l'aspetto che assume la geometria quando la si voglia vedere come sistema di punti, rette, sottospazi, ... assumendo le *i-varietà* come punti.

(gd.16) Una geometria strettamente lineare $\Gamma = (V, I, t)$ è pura se e solo se per nessuna coppia di tipi distinti i e j congiunti in $\Delta(\Gamma)$ esistono mai quattro distinte varietà x, x', y, y' con $t(x) = t(x') = i$ e $t(y) = t(y') = j$ e $xIyIx'Iy'Ix$.

(Cfr. L'enunciato della (gd.13)). La (gd.16) discende immediatamente dal num.9.11 di [8]. Può anche ottenersi come corollario dal seguente teorema:

(gd.17) Sia $\Gamma = (V, I, t)$ una geometria pura. Per ogni tipo i e per ogni scelta delle bandiere F e G con F *i-ridotta*, risulta $\sigma_i(F) \subseteq \sigma_i(G)$ se e solo se FIG e $t(F)$ *separa* $t(G)$ da i in $\Delta(\Gamma)$.

(Rimando a [8]).

Osservo intanto che la (gd.17) implica che le bandiere *i-ridotte* sono quelle di tipo *i-ridotto*. Sicché, per (gd.15), possiamo anche caratterizzare le geometrie

pure come quelle geometrie strettamente lineari su cui vale l'asserto della (gd.17).

L'utilità della (gd.17) è evidente: le separazioni su $\Delta(\Gamma)$ sono facili a vedersi. E possiamo ricostruire senza difficoltà il sistema delle i -ombre (inclusioni comprese) dal sistema delle bandiere i -ridotte. Possiamo anche definire una funzione di tipo sul sistema delle i -ombre (Cfr. anche Cap. 5, esempio 1), assegnando alla i -ombra X come tipo la cardinalità della componente connessa di i nel grafo indotto da $\Delta(\Gamma)$ sul cotipo della bandiera i -ridotta F di i -ombra X . Si assegna ad X il tipo 0 se $i \in t(F)$. Si ha allora che, definita mediante l'inclusione un'incidenza sul sistema delle i -ombre:

(gd.18) Il sistema delle i -ombre di una geometria pura e irriducibile Γ di rango n è una geometria pura di digramma:

$$\begin{array}{ccccccccc} & \pi & & \pi & & & & \pi & \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & 1 & \xrightarrow{\quad} & 2 & \xrightarrow{\quad} & \dots & \xrightarrow{\quad} & n-2 & \xrightarrow{\quad} & n-1 \end{array}$$

(Rimando a [22] per la dimostrazione). Nei casi concreti diviene un banale esercizio (usando la (gd.17)) specificare meglio le marche da segnare sui lati del diagramma della geometria delle i -ombre di Γ , note quelle sui lati del diagramma di Γ . Si sono già visti vari esempi di questo metodo: la costruzione di $\mathcal{Q}(\mathcal{O})$ e $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ da \mathcal{O} (parte iniziale del Cap. 4), le costruzioni date nell'esempio 1 del Cap. 6. In alcuni casi, ma forse non in tutti è anche possibile ricostruire univocamente la geometria dello spazio delle due i -ombre (si veda ancora, per ciò; l'Esempio 1 del Cap. 5, e l'isomorfismo $\mathcal{O}(\mathcal{Q}(\mathcal{O})) \cong \mathcal{O}$ (Cap. 4)).

In definitiva possiamo associare ad una geometria pura irriducibile Γ di rango n una n -pla di geometrie pure di rango n con diagramma di base lineare (abbiamo tante geometrie siffatte quanti sono i sistemi di i -ombre, e dunque tante quanti i tipi di Γ).

L'ipotesi che Γ sia irriducibile, nella (gd.18) si spiega col fatto che, se Γ fosse riducibile, lo spazio delle sue i -ombre coinciderebbe con quello della geometria $\Gamma^{D(i)}$ ove $D(i)$ è la componente connessa di i in $\Delta(\Gamma)$. Questo peraltro, è ancora una geometria pura; sicché il risultato della (gd.18)

vale su di essa (per una condizione sufficiente su $D \in \Delta(\Gamma)$ affinché Γ^D sia una geometria pura e abbia come diagramma di base il grafo indotto da $\Delta(\Gamma)$ su D , rimando ancora a [22]. Cfr. anche più avanti, Cap 7).

Termino con:

(gd.19) Una geometria strettamente lineare è pura se il suo diagramma di base non contiene 3-cicli.

(Rimando per la dimostrazione a [21]).

CENNI SULLE GEOMETRIE ASSOCIATE A GRUPPI SEMPLICI FINITI SPORADICI:

IL CASO DEI GRUPPI DI MATHIEU

Alcuni gruppi semplici sporadici sono stati ottenuti con costruzioni essenzialmente geometriche. Il caso forse più appariscente è quello dei gruppi di Fischer e di Conway. Ma è noto che in tale chiave possono vedersi molti altri gruppi sporadici, a cominciare da quelli di Mathieu. Questi furono scoperti originariamente da Mathieu studiando i gruppi di permutazioni quadruplamente o quintuplamente transitivi. Ma sono anche ottenibili come stabilizzatori di opportune strutture definite a partire da un'unica costruzione geometrica, cui quella che produce i gruppi di Conway è strettamente legata; del resto i primi due gruppi di Mathieu possono essere ritenuti con una seconda costruzione geometrica, simile alla precedente, e in questo contesto vi sono connessioni col gruppo J_1 di Janko. (Cfr. [29] e [14]).

Fatti come questi, e l'esempio dell'eccellente prova data sui gruppi semplici classici dalla teoria degli edifici (e delle BN-coppie), fanno sospettare che possano esservi qui in gioco cose più profonde, da scoprire.

Comunque, per saperne di più, è indispensabile un lungo lavoro preliminare di raccolta, organizzazione e analisi di dati: scoperta, studio e classificazione delle varie geometrie associabili ai vari gruppi sporadici. E qui il lavoro è solo agli inizi: anche se già si conoscono interpretazioni geometriche per più della metà dei gruppi sporadici, per il momento ciò non ci dà molto di più che una prima lista di esempi; le connessioni finora note tra questi, pur non essendo poche, sembrano però ancora, per lo più, o troppo legate alle specificità delle particolari costruzioni con cui sono stati prodotti i vari gruppi perché se ne possano immediatamente trarre molte conseguenze, oppure troppo esterne per suggerire qualcosa di chiaro. Ma, appunto, si è solo agli inizi.

Rimando per il materiale finora disponibile (o, meglio: a me noto) alla parte conclusiva di [7] e agli esempi di [9]. E, inoltre, all'articolo di W.M.Kantor [19], all'articolo di M.Ronan e S. Smith [23], agli articoli di A.M.Cohen [12] e [13], e all'articolo di Buekenhout [10]. E anche all'articolo di A.Neuumaier [20].

Avverto che uno stesso gruppo può avere più interpretazioni geometriche. Per esempio, ne sono note due (una di rango 3 e una di rango 2) per il gruppo di Hall-Janko J_2 , due per il gruppo sporadico di Suzuki Sz, ben quattro per il gruppo di Janko J_1 (due di rango 3 e due di rango 2). Ma su ciò avrò occasione di tornare più avanti.

L'armamentario concettuale di cui ci si è dotati è la teoria della geometria di Tits-Buekenhout. Si incontrano per lo più geometrie strettamente lineari (ovviamente pure, dal momento che se ne disegnano diagrammi speciali); le uniche eccezioni per ora sono: la geometria prodotta da M.Ronan e S.Smith per il gruppo di Suzuki Sz (cfr. articolo sopra citato), la geometria prodotta da W.M.Kantor per il gruppo di Lyons-Sims (cfr. articolo citato) e la geometria associata al primo gruppo di Conway (cfr. [7] § 12): su esse anche (IP.1) viene a cadere (Avverto che analoga anomalia presenta la geometria associata da A. Neumaier al gruppo $\text{Aut}(Sz)$. Cfr. articolo sopra citato).

Il legame richiesto fra il gruppo e la geometria è:

(G*) Il gruppo agisce sulla geometria come gruppo di automorfismi speciali transitivo sull'insieme delle camere.

Qui mi limiterò a trattare, come esempio, il caso dei gruppi di Mathieu. Rimando, per le dimostrazioni e per tutti i dettagli che ometterò, a [14].

Sia Ω la retta proiettiva su $F_{23} = GF(23)$. Ovvero: Ω è la sequenza di simboli: $\infty, 0, 1, 2, 3, 4, \dots, 21, 22$. Il gruppo $\text{PSL}_2(23)$ coincide col gruppo $L_2(23)$ di tutte le trasformazioni di Ω in sé del tipo

$$x \rightarrow (ax+b)/(cx+d) \quad (a,b,c,d \in F_{23}, \quad e \quad ad-bc = 1)$$

(ovvio il senso di somme, prodotti, divisioni quando vi sia coinvolto il simbolo ∞). Si pone poi $\Omega' = F_{23} = \Omega - \{\infty\}$, $Q = \{x^2 \mid x \in F_{23}\}$, $N = \Omega - Q$, $Q' = Q - \{0\}$, $N' = N - \{\infty\}$. $L_2(23)$ ha per generatori le tre operazioni:

$$\alpha : x \rightarrow x+1, \quad \beta : x \rightarrow 2x, \quad \gamma : x \rightarrow -x^{-1}.$$

Il gruppo M_{24} può essere definito come il sottogruppo del gruppo simmetrico S_{24} (sui 24 simboli che compongono Ω) generato da α, β, γ , e dalla permuta-

zione:

$$\delta : \begin{cases} x \rightarrow x^3/9 & \text{se } x \in Q \\ x \rightarrow 9x^3 & \text{se } x \in N \end{cases}$$

Consideriamo ora l'insieme $P(\Omega)$ dei sottoinsiemi di Ω . $P(\Omega)$, munito dell'operazione di differenza simmetrica (somma nell'anello booleano delle parti di Ω) è uno spazio vettoriale \mathcal{V} su $GF(2)$. Il gruppo S_{24} resta allora identificato col gruppo delle trasformazioni lineari permutazionali di \mathcal{V} . Sicché M_{24} è un gruppo di trasformazioni lineari di \mathcal{V} . Consideriamo il sottospazio \mathcal{C} di \mathcal{V} (detto *codice binario di Golay*) generato dai 24 insiemi N_i ($i \in \Omega$) ove è:

$N_\infty = \Omega$ e $N_i = N-i = \{n-i | n \in N\}$ se $i \neq \infty$. Il sottospazio \mathcal{C} ha una struttura assai interessante. Ha dimensione 12, e i suoi elementi diversi da \emptyset e Ω si distribuiscono in tre classi:

1) *Ottadi*. Costano di 8 elementi: ogni quintupla di elementi di Ω appartiene ad esattamente un'ottade. Ci sono esattamente 759 ottadi.

2) *Dodecadi*. Costano di 12 elementi, risultano dalla differenza simmetrica di due ottadi intersecantisi su una coppia di elementi, e sono 2576 in tutto.

3) *Complementari (in Ω) di ottadi*. E non vi sono altri elementi in \mathcal{C} .

Sia poi data un'ottade $A = \{a_1, a_2, \dots, a_8\}$ e sia $A_i = \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ per $1 \leq i \leq 8$ e $A_0 = \emptyset$. Sia $(i;j)_{\text{ott}}$ il numero delle ottadi che intersecano A_i esattamente su A_j (per $0 \leq j \leq i \leq 8$), e $(i;j)_{\text{dod}}$ il numero delle dodecadi che intersecano A_i esattamente su A_j . La lista dei valori di $(8;j)_{\text{ott}}$ è:

30 0 16 0 4 0 0 0 1

e quella dei valori di $(8;j)_{\text{dod}}$ è:

0 0 16 0 24 0 16 0 0.

Per di più risulta, per ogni i con $0 \leq i < 8$ e per ogni j con $0 \leq j \leq i$:

$$(i;j)_{\text{ott}} = (i+1;j)_{\text{ott}} + (i+1;j+1)_{\text{ott}}$$

$$(i;j)_{\text{dod}} = (i+1;j)_{\text{dod}} + (i+1;j+1)_{\text{dod}}$$

Si ha poi anche che ogni elemento di \mathcal{Y} è congruo modulo \mathcal{E} o ad un unico elemento di \mathcal{Y} di cardinalità al più 3 oppure a ciascuno di 6 insiemi di cardinalità 4, a due a due distinti. In questo secondo caso, l'unione di due qualunque di questi 6 insiemi è un'ottade. Diremo *sestetto* una sestupla di quaterne a due a due disgiunte tale che l'unione di due qualunque di esse è un'ottade. Una terna di ottadi a due a due disgiunte sarà detta un *trio*. Un *duum* (cfr. [14]) è una coppia di dodecadi disgiunte.

Nota - Forse sarà superfluo, ma ad ogni modo, onde evitare fraintendimenti, avverto che quando dovrò riferirmi agli ordinari insiemi di $3, 4, \dots, n, \dots$ elementi userò sempre i suffissi "-pla" o "-na" (come in: tripla, terna, quadrupla, quaterna, ...), e riserverò i suffissi "-ade" o "-etto" (come in: ottade, sestetto, ...) ai sensi speciali stabiliti sopra.

Nel seguito col termine *stabilizzatore* intendo sempre che l'insieme stabilizzato è stabilizzato nel suo complesso. Quando voglia intendere lo stabilizzatore elemento - per - elemento, lo dirò esplicitamente.

Diciamo poi che un gruppo rappresentato come gruppo di permutazioni su m insiemi disgiunti X_1, \dots, X_m è (K_1, \dots, K_m) -*transitivo* su X_1, \dots, X_m , nell'ordine, se presi comunque K_i elementi $a_{i,1}, \dots, a_{i,K_i}$ in X_i (per $1 \leq i \leq m$) ed altri K_i elementi $b_{i,1}, \dots, b_{i,K_i}$ in X_i (per $i=1, \dots, m$), esiste un elemento p del gruppo che porta $a_{i,j}$ in $b_{i,j}$ (per $i=1, \dots, m$ e $j=1, \dots, K_i$).

Si hanno i seguenti risultati:

(m.1) M_{24} è lo stabilizzatore in S_{24} (gruppo delle permutazioni di Ω) del codice di Golay \mathcal{E} .

(m.2) M_{24} è quintuplamente transitivo su Ω .

- (m.3) M_{24} è transitivo sulle ottadi. Lo stabilizzatore in M_{24} di un'ottade è un'estensione $2^4 A_8$ del 2-gruppo elementare abeliano 2^4 di ordine 16 mediante A_8 , e si spezza su A_8 . Il gruppo A_8 è autonormalizzante in $2^4 A_8$. I coniugati di A_8 in $2^4 A_8$ danno gli stabilizzatori dei 16 elementi nel complementare dell'ottade. A_8 , in quanto gruppo di automorfismi interni di 2^4 , è un gruppo di trasformazioni lineari di uno spazio 4-dimensionale su $GF(2)$. Nei fatti: $A_8 \cong PSL_4(2)$. Il gruppo $2^4 A_8$ è $(6,1), (3,2)$ e $(1,3)$ transitivo sull'ottade e sul suo complementare.
- (m.4) M_{24} è transitivo sulle dodecadi. Lo stabilizzatore in M_{24} di una dodecade è M_{12} che è $(5,0), (3,1), (1,3)$ e $(0,5)$ transitivo sulla dodecade e sul suo complementare. Lo stabilizzatore di un duum è un'estensione M_{12}^2 di M_{12} mediante il gruppo di ordine 2. Lo stabilizzatore in M_{12} di un punto della dodecade (stabilizzata da M_{12}) è M_{11} .
- (m.5) (M_{24} è transitivo sui singoletti, le coppie e le terne, per (m.2)). Lo stabilizzatore in M_{24} di un singoletto è M_{23} (che è $(1,4)$ transitivo sul singoletto e sul suo complementare, per (m.2)). Lo stabilizzatore in M_{24} di una coppia è un'estensione M_{22}^2 di M_{22} mediante il gruppo di ordine 2; per la (m.2), è $(2,3)$ transitivo sulla coppia e sul suo complementare. Ma è anche $(1,4)$ transitivo sulla coppia e sul suo complementare. Lo stabilizzatore in M_{24} di una coppia elemento-per-elemento è M_{22} , ed è quadruplemente transitivo sul complementare della coppia. Lo stabilizzatore in M_{24} di una terna è un'estensione $M_{21} S_3$ di M_{21} mediante il gruppo simmetrico S_3 . È $(1,4)$ e $(2,3)$ transitivo sulla terna e sul suo complementare. Lo stabilizzatore in M_{24} di una terna elemento per elemento è il gruppo M_{21} .
- (m.6) M_{24} è transitivo sui sestetti. Lo stabilizzatore di un sestetto è un'estensione $(2^6 \cdot 3) S_6$ mediante il gruppo simmetrico S_6 di un sottogruppo normale $2^6 \cdot 3$, estensione mediante il gruppo d'ordine 3 del 2-gruppo abeliano elementare 2^6 di ordine 64. Il gruppo $2^6 \cdot 3$ è lo stabilizzatore del sestetto elemento-per-elemento ed è $(2,1,1,0,0,0)$ e $(3,1,0,0,0,0)$ transitivo sulle quaterne del sestetto. Infine M_{24} è transitivo sui trii. Lo stabi-

lizzatore di un trio è un'estensione $2^6(S_3 \times \text{PSL}_3(2))$ del gruppo 2^6 mediante $S_3 \times \text{PSL}_3(2)$ (S_3 è il gruppo simmetrico su 3 elementi).
 Lo stabilizzatore del trio elemento-per-elemento è un'estensione $2^6 \text{PSL}_3(2)$ del gruppo 2^6 mediante $\text{PSL}_3(2)$, ed è $(2,1,1)$ e $(3,1,0)$ transitivo sulle tre ottadi del trio.

Il sistema delle ottadi permette di interpretare i gruppi M_{24}, M_{23}, M_{22} ed M_{21} come gruppi di automorfismi di sistemi di Steiner $S(5,8,24)$, $S(4,7,23)$, $S(3,6,22)$ ed $S(2,5,21)$ rispettivamente, e le proprietà delle dodecadi permettono di associare M_{12} ed M_{11} a due sistemi di Steiner $S(5,6,12)$ ed $S(4,5,11)$, rispettivamente.

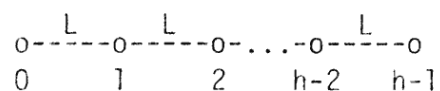
Richiamo la definizione di sistema di Steiner. Siano h, k, n tre numeri con $h \leq k \leq n$. Un sistema di Steiner di parametri h, k ed n è una coppia $\Sigma = (S, \mathcal{B})$ ove S , detto insieme dei punti, ha cardinalità n ed \mathcal{B} , detto insieme dei blocchi o delle k -adi, è una famiglia di sottoinsiemi di S di cardinalità k tale che ogni sottoinsieme di S di cardinalità h è incluso in esattamente un elemento di \mathcal{B} . È usanza indicare un sistema di Steiner di parametri h, k, n con la notazione $S(h, k, n)$.

È ovvio che il sistema delle ottadi (di \mathcal{C}) definisce su Ω un sistema di Steiner di parametri $5, 8, 24$.

Rammento che i sistemi di Steiner di parametri $2, k, n$ sono gli spazi lineari su n punti in cui tutte le rette hanno k punti (brevemente: spazi lineari d'ordine k su n punti).

Ovvio cosa sia un automorfismo di un sistema di Steiner.

Dato un sistema di Steiner Σ di parametri h, k, n su un insieme di punti S possiamo definire su esso una geometria di rango h , assumendo $\{0, 1, \dots, h-1\}$ come insiemi di tipi, i sottoinsiemi di S di cardinalità j ($0 \leq j < h-1$) come j -varietà e le k -adi come $(h-1)$ -varietà, e definendo infine l'incidenza nel modo ovvio, mediante l'inclusione. È presto visto che si ottiene così una geometria $\Gamma(\Sigma)$ di diagramma:





e che Σ può essere univocamente ricostruito da $\Gamma(\Sigma)$. Il diagramma di $\Gamma(\Sigma)$ può anzi essere disegnato con più precisione, introducendo marche opportune.

Indichiamo con:

$$\begin{array}{ccc} o & \xrightarrow{c_0} & o \\ i & & j \end{array}$$
 il fatto che i residui di bandiere di cotipo $\{i,j\}$ sono triangoli.

e con
$$\begin{array}{ccc} & L_{r,s} & \\ o & \xrightarrow{\quad} & o \\ i & & j \end{array}$$
 il fatto che i residui di bandiere di cotipo $\{i,j\}$ sono spazi lineari d'ordine r su s punti. Allora $\Gamma(\Sigma)$ ha diagramma:

$$\begin{array}{cccccccc} o & \xrightarrow{c_0} & o & \xrightarrow{c_0} & o & \dots & o & \xrightarrow{c_0} & o & \xrightarrow{c} & o & \xrightarrow{L_{k',n'}} & o \\ 0 & & 1 & & 2 & & h-4 & & h-3 & & h-2 & & h-1 \end{array}$$
 (ove $k'=k-h+2$ ed $n'=n-h+2$)

La geometria $\Gamma(\Sigma)$ è poi strettamente lineare, per la (gd.12). Ed è evidentemente pura. E' poi ovvio che ogni automorfismo di Σ individua un automorfismo speciale di $\Gamma(\Sigma)$. Osservo ora che dalle considerazioni svolte nel Cap. 7 si ha che in una geometria pura Γ di diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} o & \xrightarrow{\pi} & o & \xrightarrow{\pi} & o & \dots & o & \xrightarrow{\pi} & o \\ 0 & & 1 & & 2 & & h-2 & & h-1 \end{array}$$

le bandiere 0-ridotte sono le varietà (e la bandiera \emptyset); sicché dalla (gd.7), l'azione su Γ di un suo automorfismo speciale α è individuata dall'azione di α sulle 0-varietà. Per questo, e per la possibilità di ricostruire univocamente Σ da $\Gamma(\Sigma)$, possiamo identificare il gruppo degli automorfismi di Σ col gruppo degli automorfismi speciali di $\Gamma(\Sigma)$.

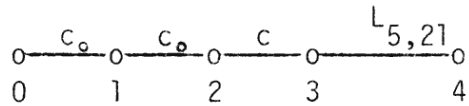
Sia ora G un gruppo di automorfismi di Σ (dunque: automorfismi speciali di $\Gamma(\Sigma)$); è immediato riconoscere che G è transitivo sulle camere di $\Gamma(\Sigma)$ se e solo se è h -transitivo sull'insieme S dei punti di Σ (0-varietà di $\Gamma(\Sigma)$).

E' poi ovvio che, data una bandiera F in una geometria Γ e un gruppo G di automorfismi speciali di Γ , lo stabilizzatore G_F di F in G individua sul residuo Γ_F di F un gruppo di automorfismi speciali. E se G è transitivo sulle camere di Γ , tale è G_F sulle camere di Γ_F .

Sicché, se ora G è un gruppo di automorfismi di Σ , e se $X \in S$ ha cardinalità i (con $1 \leq i < h-2$), lo stabilizzatore elemento-per-elemento G_X di X in G è lo stabilizzatore della bandiera.

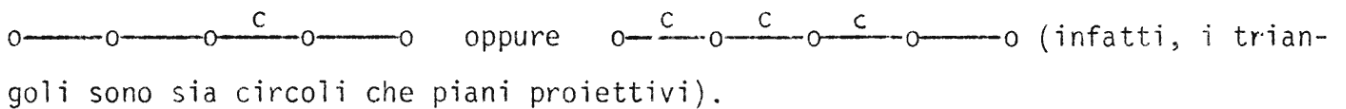
$F = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_1, x_2, \dots, x_i\}\}$ (dato un qualunque ordinamento x_1, x_2, \dots, x_i di X). Pertanto G_X individua sul residuo $\Gamma(\Sigma)_F$ di F in $\Gamma(\Sigma)$ un gruppo di automorfismi speciali, transitivo sulle camere se tale era G sulle camere di $\Gamma(\Sigma)$. Si vede poi immediatamente che $\Gamma(\Sigma)_F$ è identificabile con la geometria $\Gamma(\Sigma_X)$ associata al sistema di Steiner $\Sigma_X = (S-S, \mathfrak{S}_X)$, di parametri $h-i, k-i, n-i$, ove è $\mathfrak{S}_X = \{Y-X \mid Y \supseteq X \text{ e } Y \text{ è una } k\text{-ade in } \Sigma\}$.

Tornando ora ai gruppi di Mathieu, sappiamo che il sistema delle ottadi di \mathcal{E} definisce un sistema di Steiner $\Sigma_{\mathcal{E}}$ di parametri $5, 8, 24$, e che (cfr. (m.1)) M_{24} è il gruppo degli automorfismi di $\Sigma_{\mathcal{E}}$. Inoltre M_{24} è transitivo sulle ottadi e 5-transitivo sui punti di $\Sigma_{\mathcal{E}}$ (cfr. (m.3) ed (m.2)). Sicché M_{24} è il gruppo degli automorfismi speciali di $\Gamma(\Sigma_{\mathcal{E}})$ ed è transitivo sulle camere di $\Gamma(\Sigma_{\mathcal{E}})$. La geometria $\Gamma(\Sigma_{\mathcal{E}})$ ha il diagramma

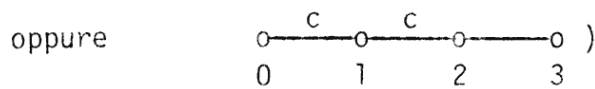
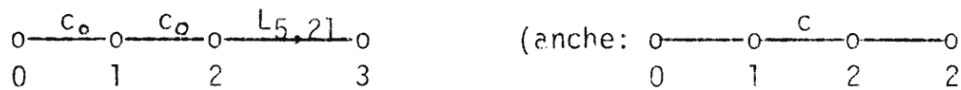


Ma è presto visto gli spazi lineari d'ordine 5 su 21 punti sono i piani proiettivi d'ordine 4.

Sicché il diagramma di $\Gamma(\Sigma_{\mathcal{E}})$ può anche mettersi in una delle due forme:

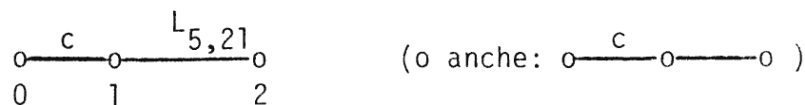


Sappiamo dalla (m.5) che il gruppo di Mathieu M_{23} è lo stabilizzatore di un (qualunque) punto x di $\Sigma_{\mathcal{E}}$. Sicché costituisce un gruppo di automorfismi del sistema di Steiner $(\Sigma_{\mathcal{E}})_X$ di parametri $4, 7, 23$, ed è quadruplamente transitivo sui punti di tale sistema. Il diagramma di $\Gamma((\Sigma_{\mathcal{E}})_X)$ ($=\Gamma(\Sigma_{\mathcal{E}})_X$) è:



Ovvio a questo punto come vanno le cose per M_{22} (si usi ancora la (m.5)): resta associato a un sistema di Steiner $S(3, 6, 22)$, e risulta triplemente transitivo sui

punti di tal sistema, e dunque transitivo sulle camere della geometria associata a tal sistema, la quale ha diagramma:

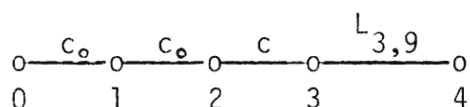


Infine: M_{21} risulta un gruppo di collineazioni di un piano proiettivo d'ordine 4, doppiamente transitivo sui suoi punti.

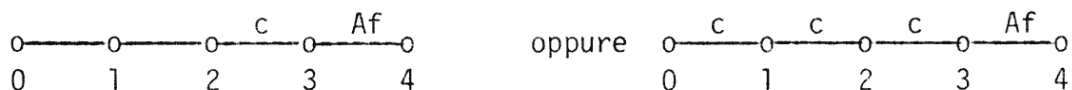
Passiamo ora ad M_{12} .

Sappiamo da (m.4) che M_{12} è lo stabilizzatore di una dodecade, e che è ivi quintuplamente transitivo.

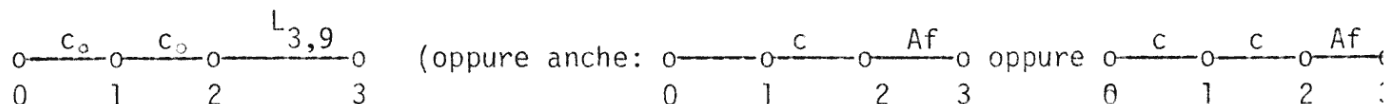
Possiamo associare ad M_{12} un sistema di Steiner $S(5,6,12)$, prendendo come punti gli elementi della dodecade e come sistema di esadi le intersezioni con la dodecade di ottadi che hanno almeno 5 punti in comune con la dodecade (si ricava infatti facilmente dalla classificazione degli elementi di \mathcal{C} data all'inizio che se un'ottade interseca la dodecade su almeno cinque punti allora la interseca su esattamente 6 punti). Detto Σ_c^* tale sistema di Steiner, M_{12} risulta transitivo sulle camere della geometria $\Gamma(\Sigma_c^*)$, di diagramma:



Siccome uno spazio lineare di ordine 3 su 9 punti è lo spazio affine d'ordine 3, il diagramma di $\Gamma(\Sigma_c^*)$ può anche porsi in una delle due forme:



L' M_{11} resterà ancora associato ad un sistema di Steiner $S(4,5,11)$ e ad una geometria di diagramma:



Naturalmente uno stesso gruppo può essere interpretato come gruppo d'automorfismi speciali (transitivo sulle camere) su più geometrie.

Per esempio, tornando ad M_{24} , assumiamo come punti le ottadi e come rette

i trii, come incidenza l'appartenenza. Otteniamo uno spazio lineare parziale e, per (m.6) o (m.3), M_{24} agisce su tale spazio come gruppo d'automorfismi speciali, transitivo sulle camere (coppie punto-retta incidenti).

In tale spazio ogni retta contiene 3 punti e da ogni punto escono 15 rette (ciò risulta facilmente dalle proprietà di \mathcal{E}). Tale spazio ha anzi una struttura abbastanza interessante. Diciamo che uno spazio lineare parziale è un (g, d_n, d_ℓ) -agono (cfr. [9]) se g (detto gonalità) è il più piccolo numero di lati in un poligono ordinario estraibile dallo spazio in questione, se d_p , detto diametro di punto e definito come la massima distanza di un punto x da un punto o una retta dello spazio, non dipende da x , e analogamente per d_ℓ (detto diametro di retta). Rammento che la distanza tra due elementi, punti o rette, di uno spazio parziale lineare è intesa come nei complessi di camere: la distanza di una faccia A da una faccia B è la più piccola tra le lunghezze di gallerie da A a B .

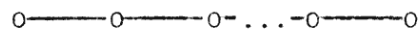
Nota - Un piano affine è un $(3,3,4)$ -gono, per esempio).

Ciò premesso, lo spazio lineare parziale ora associato ad M_{24} è un $(4,6,6)$ -gono (cfr. [9], Ex.6). Qui mi limito a mostrare che la gonalità è 4 (lascio a chi legge la verifica che diametro di retta e diametro di punto sono entrambi 6). Sia $\{A_1, A_2, \dots, A_6\}$ un sestetto. Poniamo $A_{i,j}$ uguale all'ottade $A_i \cup A_j$ ($1 \leq i < j \leq 6$). Consideriamo la quaterna di ottadi $A_{1,2}, A_{3,6}, A_{2,4}, A_{5,6}$. Costituiscono i vertici di un quadrilatero i cui lati sono dati dai trii $\{A_{1,2}, A_{4,5}, A_{3,6}\}$, $\{A_{3,6}, A_{1,5}, A_{2,4}\}$, $\{A_{2,4}, A_{1,3}, A_{5,6}\}$, $\{A_{5,6}, A_{3,6}, A_{1,2}\}$. Si vede poi subito che non esistono triangoli. Sicché la gonalità è appunto quattro.

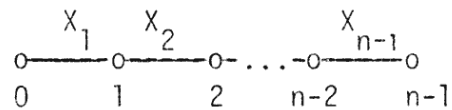
Un altro esempio. Sappiamo che M_{24} è transitivo sui sestetti e i trii. Prendiamo i sestetti come punti e i trii come rette, e diciamo che un sestetto è incidente a un trio se il sestetto, come partizione di Ω , costituisce un raffinamento del trio. Otteniamo una geometria con 1771 punti e 3795 rette (cfr. pag. 230 di [14]). Ogni retta da 7 punti e da ogni punto escono 15 rette. Si ottiene un $(3,5,5)$ -agono (cfr. [9], Ex. 20). M_{24} è transitivo sulle sue camere.

Ma si possono dare semplici costruzioni per produrre nuove interpretazioni geometriche da altre interpretazioni già date. La via più banale è quella di cancellare le varietà il cui tipo sta in un dato insieme di tipi.. Occorrono qui alcuni preliminari.

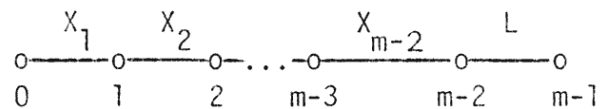
Sia \mathcal{G} un grafo e D un insieme di vertici di \mathcal{G} . D sia dirà *fortemente convesso* se contiene tutti i cammini semplici congiungenti in \mathcal{G} due qualunque elementi di D (intendo per *semplice* un cammino senza ripetizioni di vertici). Sia ora Γ una geometria pura e sia D un insieme fortemente convesso in $\Delta(\Gamma)$. Allora la geometria Γ^D (cfr. Cap. 5) è pura (rimando, per la dimostrazione, a [22]). In particolare: se $\Delta(\Gamma)$ ha la forma:



cancellando le varietà il cui tipo appartiene ad un tratto iniziale (oppure finale) di $\Delta(\Gamma)$ ottengo ancora una geometria pura. Per di più, se Γ ha diagramma speciale



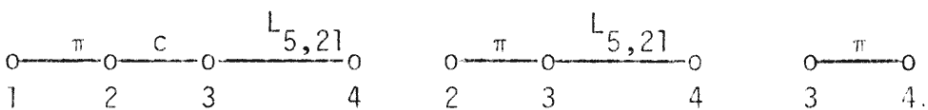
(ove X_1, X_2, \dots, X_{n-1} sono marche che denotano particolari classi di spazi lineari, senza escludere che $X_i = L$, naturalmente) allora cancellando le varietà di tipo $i \geq m$ (per un dato $m \leq n-1$) otteniamo ancora una geometria pura di diagramma:



(per un esempio di questo procedimento: Cap. 5, (gd.3), diagramma (AL_n)).

E' poi ovvio che se G è un gruppo di automorfismi di una geometria pura Γ , transitivo sulle camere di Γ , e se D è un insieme fortemente convesso in $\Delta(\Gamma)$, allora G è un gruppo di automorfismi speciali di Γ^D , transitivo sulle sue camere.

Possiamo dunque associare M_{24} alle geometrie di diagrammi:



ottenute da $\Gamma(\Sigma_{\mathcal{G}})$ cancellando, rispettivamente, le 0-varietà, le 0- ed 1-varietà,

e, le 0-, le 1- e le 2-varietà. Sulla terza di queste geometrie si può dire molto di più di quanto non risulti dalla figura. Consta dello spazio parziale lineare i cui punti sono le quaterne e le cui rette sono le ottadi. Considerando due ottadi intersecantisi su quattro punti si ricava che la gonalità di questo spazio è 3. E' facile verificare che si tratta di un (3,6,5)-agone. Lascio la verifica a chi legge.

Nota - La definizione data sopra di (g, d_p, d_ℓ) -agone è leggermente più ampia di quelle date da Buekenhout in [9]; egli richiede infatti che sia anche $d_p \leq g+2$ e $d_p \leq d_\ell$. L'esempio ora ottenuto soddisfa però tale restrizione previo scambio delle rette coi punti.

Analogo procedimento applicato alla geometria in precedenza associata ad M_{22} porta ad associare M_{22} ad un (3,4,4)-agone: il (3,4,4)-agone dell'Esempio 3 di [9] è appunto questo.

Non è difficile indicare le contropartite gruppali delle precedenti costruzioni. La cosa può essere vista in via del tutto generale.

Sia $\Gamma=(V,I,t)$ una geometria e G un gruppo di automorfismi speciali di Γ , transitivo sulle camere. Fissiamo una camera C di Γ in ruolo di camera fondamentale, e siano x_1, x_2, \dots, x_n le varietà di C (supponiamo che $\{1,2,\dots,n\}$ sia l'insieme dei tipi). Sia G_i lo stabilizzatore di x_i in G . Per ogni varietà x , sia g un elemento di G che porta $x_{t(x)}$ in x . Associamo ad x il laterale $gG_{t(x)}$ di $G_{t(x)}$. Resta così definita una biezione tra le varietà di Γ e i laterali sinistri dei sottogruppi G_i ($i = 1, \dots, n$) (Cfr. anche Appendice). Posto $\bar{G} = \bigcap_{i=1}^n G_i$, alle camere di Γ restano associati i laterali sinistri di \bar{G} . E l'incidenza tra varietà si traduce nel fatto che i corrispondenti laterali abbiano intersezione non vuota. Dalla proposizione 1.4.1 di [26] si ha che:

i) Il sistema dei sottogruppi $\bar{G}_i = \bigcap_{j \neq i} G_j$ genera G .

ii) Per ogni $J \subseteq \{1, \dots, n\}$, sia $\bar{G}_J = \bigcap_{i \notin J} G_i$ (in particolare: $\bar{G}_\emptyset = \bar{G}$). Per

ogni scelta di $J, J', J'' \subseteq \{1, \dots, n\}$, risulta $(\bar{G}_J, \bar{G}_{J'}) \cap (\bar{G}_J, \bar{G}_{J''}) = \bar{G}_J (\bar{G}_{J'} \cap \bar{G}_{J''})$.

(c.2) Un automorfismo quasi speciale di un complesso di camere magro che fissi una camera è l'automorfismo identico.

Si noti che non tutti gli automorfismi quasi speciali nel senso ora detto sono automorfismi speciali (nel senso fissato per i complessi di Coxeter). Infatti, in un complesso di Coxeter di diametro finito, l'automorfismo *opposto* ϕ^{op} (cfr. [26], Cap. 2) è quasi speciale (perché $\phi^{op}(C) \cap C = \emptyset$ per ogni camera C). Ma non è speciale. Dalla (c.2) si ha così subito che la composizione di due automorfismi quasi speciali non è necessariamente quasi speciale; infatti, sia ancora ϕ^{op} l'automorfismo opposto in un complesso di Coxeter, sia $C' = \phi^{op}(C)$ per qualche camera C , e sia ϕ un automorfismo speciale che porta C' su C . Allora $\phi\phi^{op}$ fissa C , ma non è l'identità, non essendo speciale. Sicché, per (c.2), ϕ^{op} non è nemmeno quasi speciale.

E' presto visto che un automorfismo quasi speciale che porti una camera C in una camera C' adiacente a C fissa la faccia $C \cap C'$, e perciò porta C' in C . Diciamo *riflessioni* gli automorfismi quasi speciali che scambiano due camere adiacenti. E' ovvio che le riflessioni possono essere caratterizzate come quegli automorfismi quasi speciali che fissano una faccia di codimensione 1 (o corango 1, se così si preferisce dire); precisamente: fissano le faccie comuni alle coppie di camere adiacenti che scambiano.

Dalla (c.2) si ha subito che le riflessioni sono involuzioni. Si ha poi:

(c.3) Data una coppia di camere adiacenti C, C' in un complesso di camere magro, c'è al più una riflessione che scambia C e C' .

Siano infatti r ed r' due riflessioni che scambiano C e C' . L'automorfismo $r^{-1}r'$ fissa $C \cap C'$ elemento per elemento. Sicché, fissando C (e C') fissa ogni faccia di C . Sia ora A una faccia del complesso. Proviamo che $r^{-1}r'$ fissa A . La cosa si prova per induzione sulla distanza $d(A, C)$ di A da C . Se $d(A, C) = 0$ la cosa si è già provata. Sia $d(A, C) > 0$ e sia $C = C_0, C_1, \dots, C_m \supseteq A$ una galleria minimale da C ad A . Per ipotesi induttiva, $r^{-1}r'$ fissa tutte le faccie di C_{m-1} , sicché fissa $C_{m-1} \cap C_m$ elemento per elemento, e pertanto fissa C_m e tutte le sue faccie. Sicché fissa A . Ne segue dunque che $r^{-1}r' = 1$. Sic-

ti. Assegniamo ad ogni sottospazio ($\neq \emptyset, S$) la sua dimensione come tipo, sia $D = \{k, k+1, \dots, n-1\}$. Allora G dà un gruppo di automorfismi speciali della geometria pura Γ^D , transitivo sulle camere (perché G è k -transitivo). Possiamo dunque associare a G una geometria di diagramma:

$$(Ac_n) \quad \begin{array}{cccccccc} o & \xrightarrow{c_0} & o & \xrightarrow{c_0} & o & \dots & o & \xrightarrow{c_0} & o & \xrightarrow{c} & o \\ 0 & & 1 & & 2 & & k-3 & & k-2 & & k-1 \end{array}$$

(se si preferisce: $o \xrightarrow{c} o \xrightarrow{c} o \dots o \xrightarrow{c} o$ oppure $o \xrightarrow{c} o \xrightarrow{c} o \dots o \xrightarrow{c} o$)

Con questo criterio, possiamo associare il gruppo alterno A_n ($n \geq 4$) ad una geometria di diagramma (Ac_{n-2}) , i gruppi di Mathieu M_{12} ed M_{24} a geometrie di diagramma (Ac_5) , i gruppi di Mathieu M_{11} ed M_{23} a geometrie di diagramma (Ac_4) e così via. (Cfr. [7], §11). Ma anche: Il terzo gruppo di Conway C_3 ($\circ \cdot 3$, come altre volte è indicato) al diagramma (Ac_2) ; similmente per molti altri gruppi sporadici (e non).

Ma è ovvio che si tratta di rappresentazioni 'fittizie', di interesse nullo, benché in regola con le definizioni e le condizioni assunte (purezza, condizione (G^*)). Il problema è qui: quale criterio generale costruire per selezionare le interpretazioni ragionevolmente 'interessanti'? In particolare: la condizione (G^*) sembrerebbe, ora, troppo debole (troppo permissiva). Ma come rafforzarla non è affatto chiaro.

CAPITOLO 9

APPENDICE: COMPLEMENTI SUI COMPLESSI

DI CAMERE MAGRI

Dirò che un complesso di camere magro è *bicolorabile* (o *colorabile*) se il grafo, costruito prendendo come vertici le camere e come lati le coppie di camere adiacenti, è bipartito. Si ha:

(c.1) Un complesso di camere magro è colorabile se e solo se, date tre camere C, C', C'' con C' e C'' adiacenti, risulta $|d(C, C') - d(C, C'')| = 1$.

($d(C, C')$ è la distanza di due camere C e C' , come nel Cap. 5). Proviamo il "se".

Scegliamo una camera C_0 e contrassegnamo con una marca + o - tutte le camere del complesso, assegnando alla camera C il segno + o - a seconda che $d(C_0, C)$ sia pari o dispari. Nelle ipotesi assunte, camere adiacenti sono marcate da segni opposti. E il "se" è provato. Proviamo il "solo se". Se il complesso è colorabile, possiamo marcare con + o - tutte le camere, in modo che camere adiacenti abbiano marche opposte. Sicché, data una camera C , il segno di una camera C' è concorde o discorde col segno di C a seconda che $d(C, C')$ sia pari o dispari. Pertanto, se C' e C'' sono adiacenti, risulta $d(C, C') \neq d(C, C'')$, poiché C' e C'' hanno segno opposti. E ne segue che $|d(C, C') - d(C, C'')| = 1$, perché $|d(C, C'') - d(C, C')| \leq 1$.

Un automorfismo ϕ di un complesso di camere magro si dirà quasi speciale se per ogni camera C , ϕ fissa tutti i vertici (o varietà, se così si preferisce dire) della faccia $\phi(C) \cap C$. Si è già visto implicitamente nel Cap. 1 che:

ché $r' = r$.

Sicché una riflessione è individuata dalla coppia di camere che scambia. Risultata così giustificato denotare con $r_{C,C'}$ la riflessione che scambia due camere (adiacenti) C e C' .

Osservo ora che la costruzione della partizione in tipi Θ_I data nel Cap. 5 può essere riformulata anche su complessi di vertici e faccie che non siano complessi di bandiere. Si vede subito che un automorfismo ϕ di un complesso di camere induce una permutazione t_ϕ sulla partizione individuata da Θ_I sull'insieme dei vertici. L'automorfismo ϕ sarà detto *speciale* se t_ϕ è l'identità.

Sia ora K un complesso di camere magro. È presto visto che se la partizione di K in tipi Θ_I è regolare, allora ogni riflessione r è un automorfismo speciale. Viceversa, se Θ_I è ben posta, gli automorfismi speciali di K sono quasi speciali.

Si ha:

(c.4) Sia K un complesso di camere magro. Allora K ammette un gruppo G di automorfismi quasi speciali transitivo sull'insieme delle camere solo se ammette tutte le riflessioni, nel qual caso G è il gruppo generato dalle riflessioni. Viceversa, se K ammette tutte le riflessioni e se ogni automorfismo generato da riflessioni è quasi speciale, allora il gruppo di automorfismi generato dalle riflessioni è l'unico gruppo di automorfismi quasi speciali transitivo sulle camere di K .

Sia G un gruppo di automorfismi quasi speciali transitivo sulle camere di K . Per ogni coppia di camere C, C' adiacenti esiste $g \in G$ che porta C in C' . Sicché, essendo g quasi speciale, è $g = r_{C,C'}$. Fissata poi una camera C , sia $g \in G$ e $C' = g(C)$. Sia $C = C_0, C_1, \dots, C_m = C'$ una galleria da C a C' . Sia $r_i = r_{C_{i-1}, C_i}$, per $i = 1, \dots, m$, e sia $g' = r_m r_{m-1} \dots r_1$. Si ha che $g'(C) = g(C)$. Ma $g, g' \in G$. Sicché $g^{-1}g' \in G$. Pertanto è $g^{-1}g' = 1$, per la (c.2), perché $g^{-1}g'(C) = C$. E la prima parte della (c.4) è provata. La seconda parte è ora ovvia.

Sia K un complesso di camere magro e G un (anzi: *il*, per la (c.4)) gruppo di automorfismi quasi speciali di K transitivo sulle camere. Scelta una camera C come *camera fondamentale*, per ogni faccia A di C indichiamo con G_A lo stabilizzatore di A in G . Possiamo ricopiare isomorficamente K sul sistema dei laterali dei sottogruppi G_A (con $A \subseteq C$). Precisamente, ad una faccia A' di K associamo il laterale gG_A ove g è un opportuno elemento di G che porta un'opportuna $A \subseteq C$ in A' . Ai vertici di K restano allora associati i laterali dei sottogruppi G_x , stabilizzatori di vertici x di C , e alle camere di K restano associati i laterali di G_C ; cioè, qui, gli elementi di G , poiché è $G_C = 1$ per la (c.2). L'inclusione tra faccie si traduce nella duale della inclusione tra laterali, l'incidenza di due faccie nel fatto che i corrispondenti laterali abbiano intersezione $\neq \emptyset$.

Lasciando a chi legge le altre verifiche, mi limito a mostrare che la corrispondenza è ben posta. Sia A' una faccia di K e siano $g_1, g_2 \in G$ ed $A_1, A_2 \subseteq C$ tali che $g_1(A_1) = A' = g_2(A_2)$. Sia $\sqrt[i]{g_i^{-1}}(C)$, per $i = 1, 2$. È $A' \subseteq C_1 \cap C_2$. Ed esiste $g \in G$ tale che $g(C_1) = C_2$. Sicché g fissa A' , essendo un automorfismo quasi speciale. Per di più, $g_2 g g_1^{-1} \in G_C$ (qui è anzi $g_2 g g_1^{-1} = 1$ perché $G_C = 1$). Sicché, $g_2 g_1^{-1}$ e $g_2 g g_2^{-1}$ individuano lo stesso laterale di G_C . Ma $g_2 g g_2^{-1}$ fissa A_2 . Sicché $g_2 g_1^{-1}$ fissa A_2 . Del resto $g_2 g_1^{-1}$ porta A_1 in A_2 . Ne segue che $A_1 = A_2$. E che $g_1 G_{A_1} = g_2 G_{A_2}$ segue ora dal fatto che $g_2 g_1^{-1}$ fissa $A_2 = A_1$.

Nota - Ho evitato di sfruttare il fatto che $G_C = 1$, per evidenziare come il ragionamento sia più generale di quel che le ipotesi qui assunte facciano supporre. La costruzione ora descritta è già stata incontrata più volte nei capitoli precedenti. In tali occasioni le notazioni erano diverse da quelle qui usate: il sottogruppo G_A vi sarebbe stato scritto come \bar{G}_{C-A} , o come S_{C-A} , o come W_{C-A}, \dots . La cosa aveva una sua giustificazione al momento di risalire direttamente dall'insieme (qui = faccia), apposto come indice, ad un insieme di riflessioni generante per il sottogruppo. Ho poi mantenuto tali convenzioni nel Cap. 7 solo per non allontanarmi troppo da quelle usate in precedenza; ma, in quella sede, non ve ne sarebbe stato alcun bisogno.

E' poi presto visto, per la magrezza di K , che per ogni $x \in C$ risulta $G_{C-\{x\}} = \langle r_x \rangle$, ove r_x è la riflessione che scambia C con la camera adiacente a C sulla faccia $C-\{x\}$. Il sistema delle r_x ($x \in C$), dette *riflessioni fondamentali*, dà un insieme di generatori per G . Infatti, possiamo graduare gli elementi di G associando a $g \in G$ come grado $d(g)$ la distanza da C della camera $g(C)$. Possiamo ora ragionare per induzione su $d(g)$. Se $d(g) = 1$, allora g è una riflessione fondamentale. Sia $d(g) > 1$, e sia $C = C_0, C_1, \dots, C_m = g(C)$ una galleria minimale da C a $g(C)$. Sia r la riflessione che scambia C_{m-1} e C_m , e sia g' l'elemento di G che porta C in C_{m-1} . Allora $g = rg'$, e $(g')^{-1}rg'$ è una riflessione fondamentale. Ma g' è prodotto di riflessioni fondamentali, per ipotesi induttiva. Sicché $g = rg' = g'(g')^{-1}rg'$ è prodotto di riflessioni fondamentali.

Nota - La condizione i) della fine del Capitolo 8 dà l'estensione ai casi non magri di quanto ora visto. La dimostrazione non è molto diversa da quella data qui sopra.

Viceversa, sia dato in un gruppo G un sistema di sottogruppi G_i ($i \in I$), tale che, posto $G_J = \bigcap_{i \in J} G_i$ ($J \subseteq I$), sia:

- i) $G_I = 1$
- ii) G è generato da un insieme $\{r_i | i \in I\}$ di involuzioni, dette *riflessioni fondamentali*, tali che, per ogni $i \in I$, sia $G_{I-\{i\}} = \langle r_i \rangle$.

Allora, prendendo come faccie i laterali sinistri dei G_j e rappresentando l'inclusione tra faccie con la duale dell'inclusione tra laterali (al solito: si identifichi gG_j con l'insieme dei laterali gG_i con $i \in J$), si ottiene un complesso di camere magro, sui cui G , agendo per moltiplicazione a sinistra, definisce un gruppo di automorfismi quasi speciali transitivo sulle camere (tutto ciò è di facile verifica).

Nota - E' ovvio come si riadatterà ai casi non magri quanto ora detto: si cancellerà la i), e si sostituirà la ii) con la condizione indicata con i) alla fine del Cap. 8. Lascio le dimostrazioni a chi legge.

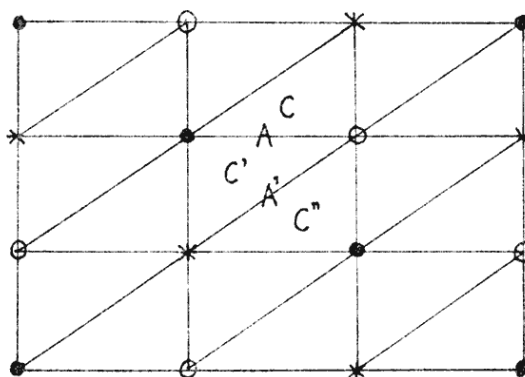
E' ovvio che queste due costruzioni sono l'una l'inversa dell'altra.

Conveniamo di dire *totalmente simmetrico* un complesso di camere magro in cui esistono tutte le riflessioni e tale che ogni automorfismo del complesso che sia generato da riflessioni è quasi speciale. Per la (c.4) un complesso di camere magro \mathbf{K} totalmente simmetrico ammette esattamente un gruppo di automorfismi quasi speciali transitivo sulle camere: il gruppo $G_r(\mathbf{K})$ generato dalle riflessioni. Dato un complesso di camere magro totalmente simmetrico \mathbf{K} , possiamo assegnare un tipo (che chiameremo per ora *r-tipo*) ai vertici di \mathbf{K} , scegliendo una camera C come camera fondamentale, ed assegnando al vertice x' , come *r-tipo*, il vertice x di C tale che $x' = g(x)$ per qualche $g \in G(\mathbf{K})$ (si è già implicitamente visto che questa definizione è ben posta). Indichiamo con θ_r l'equivalenza definita tra i vertici di \mathbf{K} ponendo $x \equiv y(\theta_r)$ se x ed y hanno lo stesso *r-tipo*. E' ovvio che θ_r è indipendente da C . La partizione θ_r è non più fine della partizione naturale in tipi θ_I : ciò segue subito dal fatto che ogni camera di \mathbf{K} prende esattamente una varietà per ogni *r-tipo*. Per questo stesso motivo, θ_I è ben posta. Proviamo ora che è, anzi, $\theta_I = \theta_r$. Siano x, y due vertici di ugual *r-tipo*. Possiamo supporre, senza introdurre restrizioni essenziali, che $x \in C$. Sia $g \in G_r(\mathbf{K})$ tale che $g(x) = y$. Ma g è prodotto di riflessioni. Sia $\ell(g)$ la minima lunghezza di una espressione di g come prodotto di riflessioni. Ragioniamo per induzione su $\ell(g)$. Se $\ell(g) = 1$, è ovvio che $x \equiv y(\theta_I)$. Sia $\ell(g) > 1$. Allora esiste una riflessione r ed un elemento $g' \in G_r(\mathbf{K})$ tali che $g = rg'$ e $\ell(g') = \ell(g) - 1$. Posto $z = g'(x)$, è $x \equiv z(\theta_I)$ per ipotesi induttiva, e banalmente, $y \equiv z(\theta_I)$. In definitiva: $x \equiv y(\theta_I)$. La $\theta_I = \theta_r$ segue. In particolare: θ_I è trasversale. Da ciò si ha subito che:

(c.5) Sia \mathbf{K} un complesso di camere magro totalmente simmetrico. Allora $G_r(\mathbf{K})$ è il gruppo degli automorfismi speciali di \mathbf{K} .

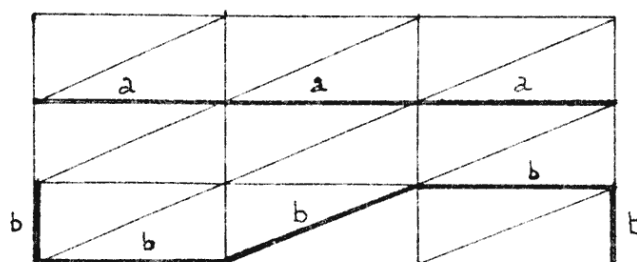
Quanto sin qui visto mostra che il senso dato qui a "speciale" è in armonia con quelli stabiliti in precedenza su complessi di Coxeter ed edifici generalizzati. E mostra anche come la condizione (G) possa tradursi nella (G.bis) del Cap. 3

Sia ora \mathcal{K} un complesso di camere magro, colorabile e totalmente simmetrico. Siano C, C' due camere adiacenti di \mathcal{K} , e sia $A = C \cap C'$. Poniamo ϕ_A^+ uguale all'insieme delle camere \bar{C} per cui è $d(C, \bar{C}) = d(C', \bar{C}) - 1$ e ϕ_A^- uguale all'insieme delle camere \bar{C}' per cui è $d(C, \bar{C}') - 1 = d(C', \bar{C})$. La colorabilità di \mathcal{K} assicura che ϕ_A^+ e ϕ_A^- bipartiscono le camere di \mathcal{K} in due insiemi disgiunti, detti le due radici relative alla faccia A . E' poi ovvio che $r_{C, C'}$ scambia tali due radici. Indicati poi con \mathcal{K}_A^+ e \mathcal{K}_A^- i due sottocomplessi di \mathcal{K} individuati da ϕ_A^+ e ϕ_A^- , poniamo $\partial\phi_A = \mathcal{K}_A^+ \cap \mathcal{K}_A^-$. $\partial\phi_A$ verrà detto muro di A . Indicato poi con F_A l'insieme delle faccie di \mathcal{K} tenute fisse da $r_{C, C'}$, è evidente che $F_A \subseteq \partial\phi_A$. Il viceversa non è detto. Do qui un controesempio. Si consideri l'usuale triangolazione di un toro con 18 triangoli:

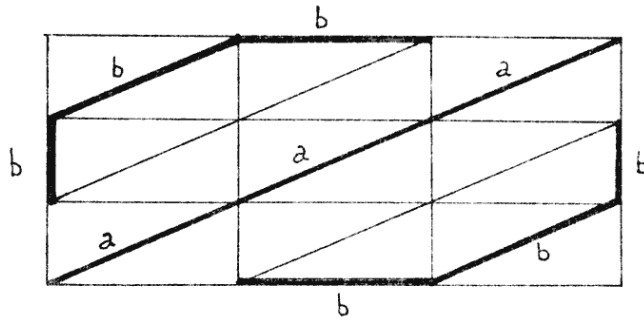


(i bordi della figura vanno identificati nei modi soliti). Si assumano come vertici i vertici della triangolazione e come incidenza tra due vertici il fatto di essere congiunti da un lato della triangolazione. E' presto visto che si ottiene un complesso di camere magro, colorabile e totalmente simmetrico. Le camere sono i triangoli. I tipi sono indicati in figura coi contrassegni \bullet , \circ e $*$

Consideriamo il muro della faccia $A = C \cap C'$. Esso risulta dalle due spezzate chiuse a e b in figura:



Ma F_A è la spezzata a ; mentre $r_{C,C'}$ trasla la spezzata b su sé stessa.
Ancora: consideriamo il muro della faccia $A' = C' \cap C''$. Risulta dalle due spezzate chiuse a e b in figura:



Ma $F_{A'}$ è la spezzata a ; mentre $r_{C,C'}$ trascina b su sé stessa.

Consideriamo la seguente condizione:

(*) Scelte comunque due coppie di camere adiacenti (C, C') e (\bar{C}, \bar{C}') , se $d(C, \bar{C}) = d(C', \bar{C}')$, allora $r_{C, C'} \neq r_{\bar{C}, \bar{C}'}$.

Essa è evidentemente falsa sull'esempio ora dato, proprio perché, delle due spezzate a, b che costituiscono il muro di A (di A'), $r_{C, C'}$ (rispettivamente: $r_{C', C''}$) ne trascina una su sé stessa.

Supponiamo ora che K sia un complesso di camere magro, colorabile, totalmente simmetrico e verificante la (*). Siano C, C' due camere adiacenti ed $A = C \cap C'$. Cominciamo col provare che le due radici relative ad A sono insiemi convessi di camere (cfr. Cap. 5). Siano dunque $\bar{C}, \bar{C}' \in \Phi_A^+$, e sia $\bar{C} = C_0, C_1, \dots, C_m = \bar{C}'$ una galleria minimale in K da \bar{C} a \bar{C}' . Per assurdo, tale galleria fuoriesca da Φ_A^+ . Sia C_h la prima camera della galleria che fuoriesce da Φ_A^+ . Peraltro, prima o poi la galleria deve rientrare in Φ_A^+ , dal momento che $\bar{C}' \in \Phi_A^+$. Sia dunque C_k la prima camera dopo C_h che rientra in Φ_A^+ . Risulta $d(C, C_{h-1}) = d(C', C_h)$ e $d(C', C_{k-1}) = d(C, C_k)$. Sicché, per la (*), è $r_{C_{h-1}, C_h} = r_{C, C'} = r_{C_{k-1}, C_k}$.

Ne segue che $r_{C, C'}$ porta il tratto di galleria da C_h a C_{k-1} in una galleria da C_{h-1} a C_k . Sicché la galleria data sopra da \bar{C} a \bar{C}' può essere sostituita da una galleria più breve; non era dunque minimale; assurdo. Su Φ_A^- il ragio-

namento è lo stesso.

Da ciò si ha poi subito che, date due camere \bar{C} e ϕ_A^+ e \bar{C}' e ϕ_A^- , ogni galleria minimale da \bar{C} a \bar{C}' attraversa $\partial\phi_A$ una sola volta (ovvero: si divide in due tronconi, il primo tutto contenuto in ϕ_A^+ , il secondo in ϕ_A^-).

Ovviamente, $\partial\phi_A$ non contiene camere. Sia \bar{F}_A l'insieme delle faccie di codimensione 1 (o corango 1, come si preferisca dire), in $\partial\phi_A$. Si ha ora che $\bar{F}_A \subseteq F_A$. Sia infatti $B \in \bar{F}_A$, e siano \bar{C} e \bar{C}' le due camere uscenti da B . Necessariamente, una di esse sta in ϕ_A^+ e l'altra in ϕ_A^- . Poniamo sia $\bar{C} \in \phi_A^+$. E' allora $d(C, \bar{C}) = d(C', \bar{C}')$. Sicché, per la (*), $r_{C, C'} = r_{\bar{C}, \bar{C}'}$. Sicché $r_{C, C'}$, scambiando \bar{C} e \bar{C}' , fissa B . Si ha, tra l'altro, che A e B individuano la stessa riflessione, e pertanto che $F_A = F_B$.

Ma non possiamo però ancora provare che $F_A = \partial\phi_A$. Do qui un controesempio. Consideriamo nel piano euclideo i punti (x, y) di coordinate intere. Ripartiamoli in tre tipi 0, 1, 2 assegnando ad (x, y) il tipo r se $x - y \equiv r \pmod{3}$. Stabiliamo tra questi punti un'incidenza ponendo due punti incidenti se distano di 1 oppure se distano di $\sqrt{2}$ e individuano una retta di coefficiente angolare -1. Sia K il complesso di camere determinato da questa relazione d'incidenza. K è magro, colorabile, totalmente simmetrico, e verificante la (*). Anzi: K è il complesso di Coxeter di diagramma:



(ciò risulterà dal seguito). Noto che K può anche pensarsi ottenuto da una qualunque tassellazione del piano euclideo in triangoli equilateri.

Costruiamo ora su K un secondo complesso K^* , identificando ogni punto (x, y) di tipo 0 con uno dei tre punti $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(2, 2)$ a seconda che $x \equiv 0, 1$ o $2 \pmod{3}$. Non aggiungiamo però altre faccie oltre a quelle direttamente ottenibili da quelle di K (per esempio: risulta ora $(0, 0)$ incidente a $(2, 0)$, perché $(0, 0)$ è identificato a $(3, 0)$, che è incidente a $(2, 0)$ in K ; ciò nonostante non consideriamo la terna $(0, 0), (1, 0), (2, 0)$ come una camera di K^*). Si verifi-

ca direttamente che K^* è un complesso di camere magro, colorabile, totalmente simmetrico e verificante la (*). Non è però vero che, presa una faccia A di K^* di codimensione 1, sia $F_A = \partial\phi_A$. Infatti F_A è rappresentabile da una retta del piano, mentre $\partial\phi_A$ contiene, oltre ad F_A , i tre vertici di K^* di tipo 0. Il complesso K^* presenta un'altra anomalia, legata a quella ora vista: il residuo di un vertice di tipo 0 non è un complesso di camere: consta infatti di (in finiti) esagoni, tra loro disgiunti.

Veniamo dunque alla caratterizzazione dei complessi di Coxeter:

(c.6) I complessi di Coxeter sono i complessi di camere magri, colorabili, totalmente simmetrici, verificanti la (*) e tali che per ogni loro faccia B il residuo di B sia un complesso di camere.

Che i complessi di Coxeter abbiano tutte le proprietà sopra elencate segue dalla caratterizzazione dei complessi di Coxeter data da Tits in [26] Cap. 2. Viceversa, sia K un complesso di camere verificante tutte le condizioni elencate nella (c.6). Proviamo che per ogni faccia A di K di codimensione 1 è $F_A = \partial\phi_A$. Sia infatti $B \in \partial\phi_A$, siano \bar{C} e \bar{C}' due camere contenenti B con $\bar{C} \in K_A^+$ e $\bar{C}' \in K_A^-$; sia poi $\bar{C} = C_0, C_1, \dots, C_m = \bar{C}'$ una galleria nella stella di camere per B (ovvero: nel residuo di B) da \bar{C} a \bar{C}' . Sia C_h la prima camera della galleria che esce da ϕ_A^+ . Allora, posto $\bar{A} = C_{h-1} \cap C_h$, è $\bar{A} \in \partial\phi_A$. Ma \bar{A} ha codimensione 1, sicché $\bar{A} \in F_A$, per quanto visto in precedenza. Pertanto: $B \in F_A$.

Date ora due camere adiacenti C, C' e posto $A = C \cap C'$, possiamo definire due endomorfismi γ_A^+ e γ_A^- di K , detti *ripiegature* di K attorno ad A (o attorno a $\partial\phi_A$) ponendo $\gamma_A^+(B) = r_{C,C'}(B)$ per ogni faccia B in ϕ_A^+ e $\gamma_A^+(B) = B$ per ogni faccia B in ϕ_A^- (similmente per γ_A^- , scambiando + con -). La $F_A = \partial\phi_A$ assicura che la definizione è ben posta. Che K sia un complesso di Coxeter segue allora dalla caratterizzazione dei complessi di Coxeter data da Tits nel Cap. 2 di [26].

La caratterizzazione dei Complessi di Coxeter data da Tits è molto semplice:

si riassume tutta nell'ipotesi che il complesso (di camere magro) ammetta tutte le ripiegature (definite in generale come endomorfismi idempotenti ϕ del complesso tali che ogni camera sia immagine mediante ϕ o di nessuna o di due camere). Insisto sul fatto che, in pratica, la caratterizzazione data dalla (c.6) è di scarsa utilità. Per esempio: se mediante la (c.6) si volesse dedurre la (b.2) del Cap. 1, non sarebbe difficile, usando la (b.1), la (B.4) e l'assunzione di grassezza della (B.1), ricavare che gli appartamenti sono colorabili, totalmente simmetrici e che verificano la (*). Ma, per dedurre che il residuo di una faccia in un appartamento è un complesso di camere, è necessario sapere già che gli appartamenti ammettono tutte le ripiegature (cioè: occorre avere già dimostrato la (b.2)). Rimando per questo a [26], nn. 2.7-2.9 e 3.14.

R I F E R I M E N T I

- [1] M.Biliotti & A. Pasini - *Intersection Properties in Geometries* Geometriae Dedicata (in corso di stampa).
- [2] A.Borel & J.Tits - *Groupes Reductifs*, Publ.Math.I.H.E.S.,27 (1965),pp.55-150.
- [3] A.Borel & J.Tits - *Complement a l'article 'Groupes Reductifs'*, Publ. Math. I.H.E.S., 41 (1972), pp. 253-276.
- [4] N.Bourbaki - *Groupes et Algebres de Lie*, Hermann, Parigi, 1968.
- [5] F.Buekenhout & E.Shult - *On the Foundations of Polar Geometry*, Geo.Dedic.,3 (1974), pp. 155-170.
- [6] F.Buekenhout & X.Hubaut - *Locally Polar Spaces and Related Rank 3 Groups*, J.Algebra, 45(1977), pp.391-434.
- [7] F.Buekenhout - *Diagrams for Geometries and Groups*, J.Comb.Th.Ser. A, 27 (1979), pp.121-151.
- [8] F.Buekenhout - *The Basic Diagram of a Geometry*, sugli atti del Convegno in onore di H.Lenz (Berlino Maggio 1981), Lect. Notes in Math., n.893;Springer, Berlino, 1981.
- [9] F.Buekenhout - (g,d^*,d) -gons, sugli atti del Convegno in onore di T.Ostrom Pullman(1981) (in corso di stampa).
- [10] F.Buekenhout - *Quadriques partielles d'indice deux*, J.Geometry, 16 (1981), pp. 93-102.
- [11] A.Cohen - *On the points and lines of metasymplectic spaces*. Preprint, Math. Centrum, Amsterdam 1981.
- [12] A.Cohen - *Geometries originating from certain distances-regular graphs* (apparirà sui "Proceedings of finite Geometries and Designs",LMS Lect. Notes, Cambridge Univ. Press, 1981).
- [13] A.Cohen - *A characterization by order of the generalized hexagons and a near octagon whose lines have lenght three* (non ancora pubblicato).
- [14] J.H.Conway - *Tree Lectures on Exceptional Groups*, In: Finite Simple Groups, Ac. Press. 1971, pp.205-247.
- [15] B.Cooperstein - *A Characterization of Some Lie Incidence Structures*, Geo Dedic. 6 (1977), pp. 205-258.

- [16] C.W.Curtis - *Chevalley Groups and Related Topics*, in *Finite Simple Groups*, Ac.Press, 1971, pp.135-189.
- [17] W.Feit & G.Higman - *The nonexistence of certain polygons*, *J.Algebra* 1 (1964), pp. 114-131.
- [18] G.Higman - *Flag Transitive Collineation Groups of Finite Projective Spaces*, *Illinois J.Math.* 6 (1962), pp.434-446.
- [19] W.M.Kantor - *Some geometries which are almost buildings*, *Eur. J.Comb.* 2(1981), pp.239-248.
- [20] A.Neuamaier - *Rectagraphs, Diagrams and Suzuki's Sporadic Simple Group* (non ancora pubblicato).
- [21] A.Pasini - *Diagrams and Incidence Structures*, (apparirà sul *J.Comb. Th.*).
- [22] A.Pasini - *Canonical Linearization of Pure Geometries*, (apparirà sul *J.Comb. Th*)
- [23] M.Ronan & S.Smith - *2-Local Geometries for Some Sporadic Groups*, (Proc.Symp. Pure Math. Vol. 37, AMS 1981).
- [24] G.Seitz - *Flag-Transitive Subgroups of Chevalley Groups*, *Ann.of Math.* 97 (1973), pp. 27-56.
- [25] J.Tits - *Classification of Algebraic Semi-Simple Groups*, Proc. Symp. Pure Math. Vol. 9, AMS (1966), pp. 33-62.
- [26] J.Tits - *Buildings of Spherical Type and finite BN-pairs*, *Lect. Notes in Math.*, n. 386, Springer, 1974.
- [27] J.Tits - *Buildings and Buekenhout Geometries*, in: Proc. Conf. on Finite Simple Groups, Durham, 1978.
- [28] J.Tits - *A Local Approach to Buildings*, in: *The Geometric Vein* (the Coxeter Festschrift), Springer, 1981.
- [29] J.A.Todd - *A Representation of the Mathieu Group M_{24} as a Collineation Group*, *Annali di Mat.*, Ser. IV, Vol. LXXI, 1966.

