e quindi la subconvergenza di $\underset{\sim}{A}$ ad A e di $\underset{\sim}{B}$ a B implicano la subconvergenza di $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$ ad $A \cap B$.

Ci proponiamo di stabilire delle condizioni sufficienti affinché la superconvergenza delle famiglie implichi la superconvergenza delle loro intersezioni.

Le famiglie $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$ sono <u>equi-attratte</u> in z se, per ogni $Q \in N(z)$ esistono $W \in N(z)$ e $F \in \mathcal{F}$ tali che, per $i \in F$

$$(7.2) \qquad \begin{matrix} A_i \cap W \neq \emptyset \\ B_i \cap W \neq \emptyset \end{matrix} \implies A_i \cap B_i \cap Q \neq \emptyset$$

<u>Teorema 7.1.</u>

Se $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$ sono equi-attratte in z, e z appartiene a $\mathrm{Li}\,\underset{\sim}{A} \cap \mathrm{Li}\,\underset{\sim}{B}$, allora $z \in \mathrm{Li}(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B})$.

Sia $\underset{\sim}{A}$ una famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$ di relazioni, cioé per ogni $i \in I$, $A_i \subset X \times Y$. Il dominio $\mathfrak{D}(A)$ di una relazione è l'insieme degli x per i quali $Ax \neq \emptyset$. In genere

$$(7.3) \qquad \begin{matrix} \mathrm{Ls}^{\tau} \mathfrak{D}(\underset{\sim}{A}) \supset \mathfrak{D}(\mathrm{Ls}^{\tau \times \sigma} A) \\ \mathrm{Li}^{\tau} \mathfrak{D}(\underset{\sim}{A}) \supset \mathfrak{D}(\mathrm{Li}^{\tau \times \sigma} \underset{\sim}{A}) \end{matrix}$$

Si ha $\mathrm{Ls}^{\tau} \mathfrak{D}(\underset{\sim}{A}) = \mathfrak{D}(\mathrm{Ls}^{\tau \times \sigma} \underset{\sim}{A})$ se (Y,σ) è uno spazio compatto (più generalmente, se i filtri $\underset{\sim}{A}\mathcal{F} \vee \mathfrak{D}^{-1} N_{\tau}(x)$, $x \in X$, sono compattoidi, vedi [10]).

8. <u>Applicazioni all'ottimizzazione</u>

Faremo vedere come si ottengono dei risultati identici a quelli del paragrafo 5 usando quanto detto per la convergenza delle intersezioni [8].

Teorema 8.1

Sia $\underset{\sim}{f} = \{f_i\}_{i\in I}$ una famiglia di funzioni reali su (X,τ). Supponiamo che esistano dei numeri finiti $a < b$ tali che $a \leq \inf(f_i) \leq b$ per ogni $i \in I$. Se $\underset{\sim}{f}$ subconverge ad f e

$$(8.1) \qquad \mathrm{ls}_F \inf(\underset{\sim}{f}) \leq \inf(f)$$

(in particolare, se $\underset{\sim}{f}$ superconverge ad f) allora

$$(8.2) \qquad \mathrm{Ls}_F^{\tau} \mathrm{Min}(\underset{\sim}{f}) \subset \mathrm{Min}(f).$$

Prova

Osserviamo che

$$(8.3) \qquad \mathrm{Min}(f) = \mathcal{D}(\mathrm{epi}\, f \cap \mathrm{hypo} \inf(f)),$$

dove $\mathrm{hypo}(g) = \{(x,r): r \leq g(x)\}$. Vediamo che $\mathrm{epi}\, f_i \cap \mathrm{hypo} \inf(f_i)$ è, per ogni $i \in I$, un sottoinsieme di $[a,b]$ (uno spazio compatto). Ora, la subconvergenza di $\underset{\sim}{f}$ ad f equivale a $\mathrm{Ls}(\mathrm{epi}\, \underset{\sim}{f}) \subset \mathrm{epi}\, f$, mentre (8.1) è equivalente a $\mathrm{Ls}(\mathrm{hypo} \inf(\underset{\sim}{f})) \subset \mathrm{hypo} \inf(f)$. Perciò

$$\mathrm{Ls}(\mathrm{epi}\, \underset{\sim}{f} \cap \mathrm{hypo} \inf(\underset{\sim}{f})) \subset \mathrm{epi}\, f \cap \mathrm{hypo} \inf(f),$$

e quindi, grazie alla compattezza di $[a,b]$, ricordando (8.3) si ha (8.2).

Presentiamo adesso una dimostrazione alternativa del

Teorema 5.4

Supponiamo che $\underset{\sim}{f}$ superconverge ad f e che la famiglia dei valori minimi subconverge

$$(8.4) \qquad \liminf_F \inf(\underset{\sim}{f}) \geq \inf(f)$$

Se $\underset{\sim}{f}$ cresce decisivamente (su $\mathrm{Min}(f)$), allora

$$\mathrm{Li}\, \mathrm{Min}(\underset{\sim}{f}) \supset \mathrm{Min}\, f \ .$$

Prova

Abbiamo $\mathrm{Li}^{\tau\times\nu}$ epi $\underset{\sim}{f} \supset$ epi f e, in virtù di (8.4), $\mathrm{Li}^{\tau\times\nu}$ hypo $\inf(f) \supset$ $\supset$ hypo $\inf(f)$. Proviamo che, se f cresce decisivamente in x, allora nel nostro caso epi $\underset{\sim}{f}$, hypo $(\inf \underset{\sim}{f})$) sono equi-attratte in $(x,\inf(f))$. Esse sono equi-attratte in (x,r) se e solo se per ogni $Q \in N_\tau(x)$, $\varepsilon > 0$ esistono $W \in N_\tau(x)$, $\delta > 0$ e $F \in \mathcal{F}$ tali che per ogni $i \in F$

(8.5)
$$\text{epi } f_i \cap W \times (v-\delta, r+\delta) \neq \emptyset$$
$$\text{hypo } \inf(f_i) \cap W \times (r-\delta, r+\delta) \neq \emptyset$$

implica

(8.6) $$\text{epi } f_i \cap \text{hypo } \inf(f_i) \cap Q \times (r-\varepsilon, r+\varepsilon) \neq \emptyset \,.$$

La condizione (8.5) implica la condizione seguente:

(8.7) $$\inf_W f_i < r+\delta \quad , \quad \inf(f_i) > r-\delta \quad ,$$

dunque

(8.8) $$\mathrm{Min}(f_i) \cap Q \neq \emptyset$$

accompagnata dalla convergenza dei valori minimi $\inf(\underset{\sim}{f})$ a $\inf(f)$ (segue la (8.4) e dalla superconvergenza di $\underset{\sim}{f}$ a f), implicano (8.6) per $r=\inf(f)$.

Osserviamo adesso che l'implicazione (8.7') $\Longrightarrow$ (8.8) equivale alla crescenza decisiva in x.

Abbiamo fatto vedere che se $\underset{\sim}{f}$ cresce definitivamente allora epi $\underset{\sim}{f}$ e hypo $\inf(\underset{\sim}{f})$ sono equi-attratte su $\mathrm{Min}(f) X \{\inf(f)\} =$ epi $f \cap$ hypo $\inf(f)$. Quindi

$$\mathrm{Li}^{\tau\times\nu} (\text{epi } \underset{\sim}{f} \cap \text{hypo } \inf(\underset{\sim}{f})) \supset \text{epi } f \cap \text{hypo } \inf(f) \,,$$

da dove si deduce

$$\mathrm{Li}^{\tau}\,\mathcal{D}(\mathrm{epi}\ \underset{\sim}{f} \cap \mathrm{hypo}\ \inf(\underset{\sim}{f})) \supset \mathcal{D}(\mathrm{epi}\ f \cap \mathrm{hypo}\ \inf(f))$$

Ricordando (8.3) si completa la dimostrazione.

9. L'intersezione dei limiti nella differenziazione

Dal paragrafo 7 segue che

$$\begin{aligned} &T_{C\cap D}(x) \subset T_C(x) \cap T_D(x) \\ (9.1) \qquad & \\ &K_{C\cap D}(x) \subset K_C(x) \cap K_D(x) \end{aligned}$$

mentre per l'ipertangente in generale non si possono avere delle formule analoghe. Ma le inclusioni desiderabili, per gli scopi della teoria d'ottimizzazione, sono di tipo $\supset$. Qui possiamo utilizzare i risultati del paragrafo 7.

Teorema 9.1

Se per ogni h ed ogni $Q \in N(h)$ esistono $W \in N(h)$ e $t_o > 0$ tali che per $t < t_o$

$$(9.2) \qquad \begin{matrix} (x+tW) \cap C \neq \emptyset \\ (x+tW) \cap D \neq \emptyset \end{matrix} \Longrightarrow (x+tQ) \cap C \cap D \neq \emptyset$$

allora

$$T_{C\cap D}(x) \supset T_C(x) \cap T_D(x)$$

Diciamo che C è direzionalmente aperto in x se, per ogni h esiste $Q \in N(h)$ e $t_o > 0$ tali che $x+tQ \subset C$ per $t < t_o$. Notiamo che se C è direzionalmente aperto in x, allora $T_C(x) = X$ e per ogni insieme D, C e D soddisfano l'ipotesi (9.2). In questo caso si ha $T_{C\cap D}(x) = T_D(x)$ e anche $K_{C\cap D}(x) = K_D(x)$.

Risultati analoghi si ottengono per l'ipertangente. Ad esempio, diciamo