I coni approssimanti applicati agli epigrafici ci permettono di ritrovare una varietà di derivate unilaterali, in particolare quella di Clarke. Visto che l'omotetia dell'epigrafico di una funzione è l'epigrafico del suo rapporto incrementale, abbiamo diversi tipi di <u>epi-derivate (tangenti, cotangenti, di Hadamard)</u>

$$(3.2)\quad f^{T}(x)h = \sup_{Q\in\mathcal{N}(h)} \ \inf_{t_0} \ \sup_{t<t_0} \ \inf_{h'\in Q} \ \frac{1}{t}\left[f(x+th') - f(x)\right]$$

$$(3.3)\quad f^{K}(x)h = \sup_{Q\in\mathcal{N}(h)} \ \sup_{t_0} \ \inf_{t<t_0} \ \inf_{h'\in Q} \ \frac{1}{t}\left[f(x+th') - f(x)\right]$$

$$(3.4)\quad f^{H}(x)h = \inf_{Q\in\mathcal{N}(h)} \ \inf_{t_0} \ \inf_{t<t_0} \ \sup_{h'\in Q} \ \frac{1}{t}\left[f(x+th') - f(x)\right]$$

Infine, l'<u>epi-iperderivata</u>

$$(3.5)\quad f^{\dagger}(x)h = \sup_{Q\in\mathcal{N}_{\tau}(h)} \ \inf_{\substack{W\in\mathcal{N}_{\theta}(x,f(x))\\ t_0}} \ \sup_{\substack{(x',r')\in W\cap \mathrm{epi}\, f\\ t<t_0}} \ \inf_{h'\in Q} \quad (*)$$

dove $\quad (*) = \frac{1}{t}\left[f(x'+th') - r'\right]$

4. <u>Confronto di limiti</u> ([7], [8])

Sia $\underset{\sim}{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di X filtrata da $\mathcal{F}$ su I. Se $\tau \subset \sigma$ sono topologie su X, allora

$$Li^{\tau}\underset{\sim}{A} \quad Li^{\sigma}\underset{\sim}{A}\ , \qquad\qquad Ls^{\tau}\underset{\sim}{A} \quad Ls^{\sigma}\underset{\sim}{A}\ .$$

Diciamo che $\underset{\sim}{A}$ è di <u>tipo</u> τ/σ <u>in</u> x se, per ogni $V \in \mathcal{N}_{\sigma}(x)$ esistono $Q \in N_{\tau}(x)$ e $F \in \mathcal{F}$ tali che, per $i \in F$

$$Q\cap A_i \neq \emptyset \implies V\cap A_i \neq \emptyset$$

<u>Teorema 4.4.</u>

Se $\underset{\sim}{f}$ è θ/ρ-equi-semicontinua sul dominio di $li^{\theta}\,\underset{\sim}{f}$, allora

$$li^{\rho}\,\underset{\sim}{f} \leq li^{\theta}\,\underset{\sim}{f}\,.$$

Questi teoremi forniscono delle condizioni sufficienti per l'inversione delle disuguaglianze usuali:

(4.2) Se $\theta \subset \rho$, allora
$$li^{\theta}\,\underset{\sim}{f} \leq li^{\rho}\,\underset{\sim}{f}$$
$$ls^{\theta}\,\underset{\sim}{f} \leq ls^{\rho}\,\underset{\sim}{f}$$

che si ottengono da (2.3).

Si osserva che $\dfrac{\theta \times \nu}{\rho \times \nu}$ tipo di epi $\underset{\sim}{f}$ implica θ/ρ-equi-semicontinuità, mentre l'inverso vale per le funzioni equilimitate.

5. <u>Qualche applicazione all'ottimizzazione</u> [8]

(Vedi [6],[19], [1] per i risultati simili sotto ipotesi più forti)

<u>Teorema 5.1.</u>

Se $\underset{\sim}{f}$ superconverge ad f, cioé se

(5.1) $$ls^{\tau}_{F}\,\underset{\sim}{f} \leq f,$$

allora per i valori minimi vale

(5.2) $$\limsup_{F}\,\inf(\underset{\sim}{f}) \leq \inf(f)$$

<u>Prova</u>

La topologia caotica 0 è la meno fine di tutte le topologie, perciò

$$ls^{0}\,\underset{\sim}{f} \leq ls^{\tau}\,\underset{\sim}{f} \leq \underset{\sim}{f}\,,$$

e siccome