I coni approssimanti applicati agli epigrafici ci permettono di ritrovare una varietà di derivate unilaterali, in particolare quella di Clarke. Visto che l'omotetia dell'epigrafico di una funzione è l'epigrafico del suo rapporto incrementale, abbiamo diversi tipi di <u>epi-derivate (tangenti, cotangenti, di Hadamard)</u>

$$(3.2)\quad f^T(x)h = \sup_{Q\in\mathcal{N}(h)} \; \inf_{t_0} \; \sup_{t<t_0} \; \inf_{h'\in Q} \; \frac{1}{t}\left[f(x+th') - f(x)\right]$$

$$(3.3)\quad f^K(x)h = \sup_{Q\in\mathcal{N}(h)} \; \sup_{t_0} \; \inf_{t<t_0} \; \inf_{h'\in Q} \; \frac{1}{t}\left[f(x+th') - f(x)\right]$$

$$(3.4)\quad f^H(x)h = \inf_{Q\in\mathcal{N}(h)} \; \inf_{t_0} \; \inf_{t<t_0} \; \sup_{h'\in Q} \; \frac{1}{t}\left[f(x+th') - f(x)\right]$$

Infine, l'<u>epi-iperderivata</u>

$$(3.5)\quad f^{\uparrow}(x)h = \sup_{Q\in\mathcal{N}_\tau(h)} \; \inf_{\substack{W\in\mathcal{N}_\theta(x,f(x))\\ t_0}} \; \sup_{\substack{(x',r')\in W\cap \operatorname{epi} f\\ t<t_0}} \; \inf_{h'\in Q} \quad (*)$$

dove $\qquad (*) = \frac{1}{t}\left[f(x'+th') - r'\right]$

4. <u>Confronto di limiti</u> ([7], [8])

Sia $\underset{\sim}{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di X filtrata da $\mathcal{F}$ su I. Se $\tau \subset \sigma$ sono topologie su X, allora

$$\mathrm{Li}^{\tau}\underset{\sim}{A} \quad \mathrm{Li}^{\sigma}\underset{\sim}{A}\,, \qquad\qquad \mathrm{Ls}^{\tau}\underset{\sim}{A} \quad \mathrm{Ls}^{\sigma}\underset{\sim}{A}\,.$$

Diciamo che $\underset{\sim}{A}$ è di <u>tipo</u> τ/σ <u>in</u> x se, per ogni $V \in \mathcal{N}_\sigma(x)$ esistono $Q \in N_\tau(x)$ e $F \in \mathcal{F}$ tali che, per $i \in F$

$$Q\cap A_i \neq \emptyset \implies V\cap A_i \neq \emptyset$$

Teorema 4.1.

Se $\underset{\sim}{A}$ è di tipo τ/σ su $Li^{\tau}\,\underset{\sim}{A}$, allora

$$Li^{\tau}\,\underset{\sim}{A} \subset Li^{\sigma}\,\underset{\sim}{A} \,.$$

Teorema 4.2.

Se $\underset{\sim}{A}$ è di tipo τ/σ su $Ls^{\tau}\,\underset{\sim}{A}$, allora

$$Ls^{\tau}\,\underset{\sim}{A} \subset Ls^{\sigma}\,\underset{\sim}{A} \,.$$

Nel caso degli epigrafici (A_i = epi f_i) la nozione di tipo τ/σ può essere sostituita da quella di equi-semicontinuità.

Siano ρ, θ due topologie su Y. Una famiglia $\underset{\sim}{f} = \{f_i\}_{i\in I}$ indicizzata da F è chiamata θ/ρ -equi-semicontinua in y se per ogni $V \in N_\rho(y)$, $\varepsilon > 0$ esistono $Q \in N_\theta(y)$, $F \in F$ tali che, per $i \in F$ vale

$$\inf_Q f_i \geq \inf_V f_i - \varepsilon \tag{4.1}$$

Notiamo che nel caso della topologia discreta $\underset{\sim}{f}$ è θ/ι-equi-semicontinua in y se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $Q \in N_\theta(y)$, $F \in F$ tali che per $i \in F$ risulta

$$\inf_Q f_i \geq f_i(y) - \varepsilon$$

Teorema 4.3.

Se $\underset{\sim}{f}$ è θ/ρ-equi-semicontinua sul dominio

$$\text{dom } ls^{\theta}\,\underset{\sim}{f} = \{y : (ls^{\tau}\,\underset{\sim}{f}) < +\infty\}$$

allora

$$ls^{\rho}\,\underset{\sim}{f} \leq ls^{\theta}\,\underset{\sim}{f}$$

Teorema 4.4.

Se $\underset{\sim}{f}$ è θ/ρ-equi-semicontinua sul dominio di $li^{\theta}\,\underset{\sim}{f}$, allora

$$li^{\rho}\,\underset{\sim}{f} \leq li^{\theta}\,\underset{\sim}{f}\,.$$

Questi teoremi forniscono delle condizioni sufficienti per l'inversione delle disuguaglianze usuali:

(4.2) Se $\theta \subset \rho$, allora
$$li^{\theta}\,\underset{\sim}{f} \leq li^{\rho}\,\underset{\sim}{f}$$
$$ls^{\theta}\,\underset{\sim}{f} \leq ls^{\rho}\,\underset{\sim}{f}$$

che si ottengono da (2.3).

Si osserva che $\frac{\theta \times \nu}{\rho \times \nu}$ tipo di epi $\underset{\sim}{f}$ implica θ/ρ-equi-semicontinuità, mentre l'inverso vale per le funzioni equilimitate.

5. Qualche applicazione all'ottimizzazione [8]

(Vedi [6],[19], [1] per i risultati simili sotto ipotesi più forti)

Teorema 5.1.

Se $\underset{\sim}{f}$ superconverge ad f, cioé se

(5.1) $$ls^{\tau}_{F}\,\underset{\sim}{f} \leq f,$$

allora per i valori minimi vale

(5.2) $$\lim\sup_{F}\,\inf(\underset{\sim}{f}) \leq \inf(f)$$

Prova

La topologia caotica 0 è la meno fine di tutte le topologie, perciò

$$ls^{0}\,\underset{\sim}{f} \leq ls^{\tau}\,\underset{\sim}{f} \leq \underset{\sim}{f}\,,$$

e siccome