CONVERGENZE: APPLICAZIONI ALLA DIFFERENZIAZIONE GENERALIZZATA E ALL'OTTIMIZZAZIONE

Szymon Dolecki

(Accademia Polacca delle Scienze, Varsavia)

Lo scopo di queste note è far vedere come, usando alcuni semplici fatti della teoria delle convergenze, si riottengono in modo molto chiaro risultati le cui giustificazioni erano finora offuscate da molti tecnicismi.

1. Oggetti dello studio

Data una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di uno spazio topologico, si dice che x è nel limite $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (oppure, che $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad x), se, per ogni intorno Q di x, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \subset Q$.

Tale nozione si riferisce al comportamento delle successioni "quando n tende all'infinito". Il "tendere all'infinito" è un concetto relativo ad una struttura d'ordine (in questo caso, dei numeri naturali); esso si ritrova nell'idea di filtro, che è una sua, particolarmente riuscita, generalizzazione [2].

Sia X un insime. Una famiglia non vuota F di sottoinsiemi di X è detta filtro se essa non contiene il sottoinsieme vuoto e se

$$A \cap B \in F \quad \text{se e solo se} \quad A \in F \quad \text{e} \quad B \in F .$$

La famiglia di tutti i soprainsiemi delle code

$$\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\dots\}$$

di una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un filtro, detto filtro elementare della successione.

Diciamo che un filtro F in uno spazio topologico X converge ad $x \in X$, se per ogni intorno Q di x esiste $F \in F$ tale che $F \subset Q$. In altre parole, un filtro converge ad x se ogni intorno di x è contenuto in questo filtro. Diciamo allora che x appartiene al limite di F e scriviamo

$$x \in \mathrm{Lim}\, F.$$

Notiamo che "Lim" definisce un'applicazione dell'insieme ϕX (di tutti i filtri su X) in 2^X (famiglia di tutti i sottoinsiemi di X):

$$\mathrm{Lim} : \phi X \to 2^X.$$

Tenendo conto che $F \leq G$ (diciamo che G è <u>più fine</u> di F, $F \leq G$, quando F è incluso in G) definisce una struttura d'ordine su ϕX e che l'inclusione definisce una struttura d'ordine su 2^X, risulta che

(i) $\qquad$ Lim è monotona.

Il filtro <u>discreto</u> di x,

$$N_\iota(x) = \{A \in 2^X : x \in A\}$$

soddisfa

(ii) $$x \in \mathrm{Lim}\, N_\iota(x)\ .$$

Per ogni filtro F si ha

(iii) $$\mathrm{Lim}\, F = \bigcap_{G \supset F} \Big(\bigcup_{H \supset G} \mathrm{Lim}\, H\Big)$$

Si verifica inoltre che, per ogni famiglia di filtri $\{F_i\}_{i \in I}$, si ha

(iv) $$\mathrm{Lim} \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} \mathrm{Lim}\, F_i$$

Per formulare un'altra proprietà del limite, consideriamo un'applicazione

$$\mathcal{M} : X \to \phi X$$

ed un filtro $F \in \phi X$. Il <u>limite inferiore di</u> M <u>lungo</u> F è il filtro

$$\mathrm{Li}_F M$$

definito dalla posizione:

$Q \in \mathrm{Li}_F M$ se e solo se esiste $F \in F$ tale che per $x \in F$ si ha $Q \in M(x)$.

Abbiamo che

(v) Se $x \in \mathrm{Lim}\,\mathcal{F}$ e per ogni $x' \in X$, $x' \in \mathrm{Lim}\, M(x)$, allora

$$x \in \mathrm{Lim}(\mathrm{Li}_{\mathcal{F}} M) .$$

Le proprietà (i)-(v) servono da assiomi a varie nozioni di convergenza [4] [3] [11] [9].

Un'applicazione di ϕX in 2^X è una convergenza se soddisfa (i), una convergenza in senso stretto se verifica (i), (ii). Se inoltre verifica (iii) è una convergenza pseudotopologica, mentre se vale anche (iv) si ha una convergenza pretopologica. Se aggiungiamo anche l'assioma (v) otteniamo una convergenza topologica.

Oggetto delle nostre considerazioni saranno le convergenze dei filtri su 2^Z, dove (Z,τ) è uno spazio topologico.

Sia $\underset{\sim}{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di Z e sia $\mathcal{F}$ un filtro su I. Chiaramente, $\mathcal{F}$ induce su 2^Z il filtro composto dalle soprafamiglie di $\{A_i : i \in F\}$, $F \in \mathcal{F}$, e viceversa, ogni filtro su 2^Z può essere rappresentato come una famiglia filtrata.

Il limite superiore di $\underset{\sim}{A} = \{A_i\}_{i \in I}$, che indicheremo

$$\mathrm{Ls}\, \underset{\sim}{A} = \mathrm{Ls}_{\mathcal{F}}^{\tau}\, \underset{\sim}{A} ,$$

è composto dagli elementi z tali che, per ogni intorno $Q \in \mathcal{N}_{\tau}(z)$ ed ogni $F \in \mathcal{F}$ esiste $i \in F$ tale che $Q \cap A_i \neq \emptyset$

Il limite inferiore

$$\mathrm{Li}\, \underset{\sim}{A} = \mathrm{Li}_{\mathcal{F}}^{\tau}\, \underset{\sim}{A}$$

è l'insieme degli z tali che, per ogni $Q \in \mathcal{N}_{\tau}(z)$ esiste $F \in \mathcal{F}$ tale che $Q \cap A_i \neq \emptyset$ per ciascun i in F (vedi [14]).

Si noti [4] che il limite definito da

$$A \in \mathrm{Lim}\,\underset{\sim}{A} \quad \text{ssse} \quad A \subset \mathrm{Li}\,\underset{\sim}{A}$$

costituisce una convergenza topologica, ma soltanto nell'ambito del sottospazio di 2^X composto dagli insiemi chiusi, mentre nello stesso sottospazio

$$A \in \mathrm{Lim}\,\underset{\sim}{A} \quad \text{sse} \quad \mathrm{Ls}\,\underset{\sim}{A} \subset A$$

è solamente una convergenza pseudotopologica.

2. <u>Vari limiti di famiglie di insiemi.</u>

Sia A una famiglia di sottoinsiemi di X. La <u>griglia</u> $A^{\#}$ di A è la famiglia degli insiemi di X che interseca tutti gli elementi di A.

Abbiamo che

$$\mathrm{Ls}^{\tau}_{F}\,\underset{\sim}{A} = \bigcap_{F \in F} \mathrm{Cl}_{\tau} \bigcup_{i \in F} A_i$$

(2.1)

$$\mathrm{Li}^{\tau}_{F}\,\underset{\sim}{A} = \bigcap_{H \in F^{*}} \mathrm{Cl} \bigcup_{i \in H} A_i$$

I limiti sono insiemi chiusi. Osserviamo inoltre che

(I) $\tau \subset \sigma$, allora $\mathrm{Ls}^{\tau} \supset \mathrm{Ls}^{\sigma}$, $\mathrm{Li}^{\tau} \supset \mathrm{Li}^{\sigma}$

(II) $F \subset G$, allora $\mathrm{Ls}_{F} \supset \mathrm{Ls}_{G}$, $\mathrm{Li}_{F} \subset \mathrm{Li}_{G}$

(III) $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}$, allora $\mathrm{Ls}\,\underset{\sim}{A} \subset \mathrm{Ls}\,\underset{\sim}{B}$, $\mathrm{Li}\,\underset{\sim}{A} \subset \mathrm{Li}\,\underset{\sim}{B}$

Se la topologia rispetto alla quale si sonsiderano questi limiti è quella <u>discreta</u> ι, allora i limiti diventano gli usuali limiti insiemistici.