II. L'ERA DI GROTHENDIECK.

Introduzione.

Avendo brevemente passato in rassegna nella Parte I l'evoluzione storica della teoria classica degli operatori tra spazi di Banach, veniamo adesso alla cosiddetta teoria moderna, cioé a quella parte della teoria degli operatori che si è sviluppata a partire dal lavoro di Grothendieck nel 1955. In tale anno appariva infatti la monumentale tesi di Grothendieck [22] che senza dubbio apportò il più grande e significativo contributo all'Analisi Funzionale dai tempi di Banach. Parte dei risultati in cosa contenuti erano stati annunciati indipendentemente da Grothendieck [19] e Ruston [55] nel 1951, presentando una teoria che generalizzava al tempo stesso la classica teoria di Fredholm e la teoria degli operatori a traccia agli spazi di Banach. L'idea di Grothendieck fu di sviluppare la teoria di von Neumann e Schatten (cf. [44] e [56]) nell'ambito degli spazi localmente convessi e, a differenza di molte generalizzazioni, questa ebbe l'effetto di produrre una grandissima varietà di risultati estremamente profondi e significativi.

In questa parte ci occuperemo esclusivamente del lavoro di Grothendieck e cioé essenzialmente dei risultati contenuti nella sua tesi [22]. La tesi di Grothendieck si compone di due parti: la prima è dedicata ad una trattazione sistematica dei prodotti tensoriali topologici, dalla quale scaturiscono le nozioni importantissime di operatore nucleare, integrale e assolutamente sommante, mentre la seconda presenta la teoria degli spazi nucleari (interamente dovuta a Grothendieck) per una esposizione moderna della quale rimandiamo a [49], [27] o [41]. Qui a noi interesserà solo la prima parte e il §1 della seconda, riguardo ai cui contenuti è bene dire subito che forse il merito maggiore di Grothendieck è stato quello di aver visto il profondo ed intimo legame che lega i problemi (P2), (P4) e (P6) (e quindi, naturalmente, anche (P5)).

Tutti i risultati dei §§1-7 sono dovuti a Grothendieck (cf. [21], [22] e [23]) anche se molte volte faremo riferimento ad altri testi come [49], [27] e [28] per dimostrazioni più snelle accessibili.

1. Prodotto tensoriale proiettivo di spazi di Banach

Siano E,F spazi lineari, sia B(E,F) lo spazio lineare di tutte le forme bilineari sul prodotto ExF e sia $B(E,F)^*$ il duale algebrico di B(E,F), cioé lo spazio lineare di tutti i funzionali lineari su B(E,F). Ad ogni coppia $(x,y) \in ExF$ associamo l'elemento $u_{x,y} \in B(E,F)^*$ definito come segue:

$$u_{x,y}(b) = b(x,y) \qquad \text{per ogni } b \in B(E,F).$$

Osserviamo che l'applicazione $\otimes : (x,y) \to u_{x,y}$ di ExF in $B(E,F)^*$ è bilineare. L'inviluppo lineare di $\otimes(ExF)$ in $B(E,F)^*$ si denota con $E \otimes F$ e si chiama *prodotto tensoriale di* E *e* F . Scriveremo, come d'uso, $x \otimes y$ per l'elemento $u_{x,y}$ di $E \otimes F$, cosicché ogni $z \in E \otimes F$ può scriversi come

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, \qquad \text{con } x_i \in E \text{ e } y_i \in F.$$

Avvertiamo però che tale rappresentazione non è certo unica.

Siano ora E e F spazi di Banach. Ponendo

$$\pi(z) = \inf \sum_{i=1}^{n} ||x_i|| \, ||y_i|| \tag{1}$$

ove l'estremo inferiore è preso su tutte le rappresentazioni (ovviamente finite) di $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in E \otimes F$, otteniamo una norma su $E \otimes F$. Munito di tale norma, $E \otimes F$ si indica con $E \underset{\pi}{\otimes} F$ e si chiama *prodotto tensoriale proiettivo di* E *e* F. Denotiamo con $E \tilde{\otimes} F$ lo spazio di Banach ottenuto completando $E \underset{\pi}{\otimes} F$. Il seguente teorema, che fornisce una rappresentazione esplicita di $E \tilde{\otimes} F$, è uno dei risultati fondamentqali della teoria (per la dimostrazione, cf. anche [28], p. 337).

TEOREMA 1 - *Ogni* $z \in E \tilde{\otimes} F$ *ammette una rappresentazione del tipo*

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n \otimes y_n ,$$

ove $(\xi_n) \in \ell^1$ *e* $(x_n),(y_n)$ *sono successioni limitate in* E,F *rispettivamente.*

Consideriamo adesso il prodotto tensoriale $E' \otimes F$. Ad ogni elemento $z = \sum_{i=1}^{n} x_i' \otimes y_i \in E' \otimes F$ possiamo associare l'operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ definito da

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i' \rangle y_i \qquad \text{per ogni } x \in E.$$

L'applicazione $\chi : z \to T$ si riconosce essere un isomorfismo algebrico di $E' \otimes F$ in $\mathscr{L}(E,F)$ la cui immagine è chiaramente $\mathscr{F}(E,F)$, ciò che permette di identificare quest'ultimo spazio con $E' \otimes F$. Avendosi

$$\|\chi(z)\| = \|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} \leq \sup\{\sum_{i=1}^{n} |\langle x, x_i' \rangle| \, \|y_i\| : \|x\| \leq 1\} \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i'\| \, \|y_i\|$$

r tutte le rappresentazioni $z = \sum_{i=1}^{n} x_i' \otimes y_i$, ne segue, per la (1),

$$(2) \qquad \|\chi(z)\| \leq \pi(z) \qquad \text{per ogni } z \in E' \otimes F$$

e quindi la continuità di χ da $E' \otimes_\pi F$ a $\mathscr{L}(E,F)$. Ma allora χ ha una (unica) estensione continua, che denoteremo ancora con χ, al completamento $E' \tilde{\otimes} F$, con valori in $\mathscr{L}(E,F)$. A questo punto si pone il seguente notevolissimo problema

(P7) *E' l'applicazione* $\chi : E' \tilde{\otimes} F \to \mathscr{L}(E,F)$ *necessariamente iniettiva per ogni coppia di spazi di Banach* E *e* F *?*

L'importanza di tale problema deriva dalle seguenti considerazioni. Se $z = \sum_{i=1}^{n} x_i' \otimes x_i \in E' \otimes E$, allora

$$|tr(z)| = |\sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_i' \rangle| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|x_i'\|$$

e quindi, essendo $tr(z)$ indipendente dalla rappresentazione, si ottiene per la (1),

(3) $$|tr(z)| \leq \pi(z) .$$

Ciò mostra che la traccia è continua su $E' \otimes_{\pi} E$ e dunque ha un'estensione continua a tutto $E' \tilde{\otimes} E$ avendosi, per il Teorema 1,

(4) $$tr(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x_n' \rangle$$

per ogni $z = \sum_{n=1}^{\infty} x_n' \otimes x_n \in E' \tilde{\otimes} E$. È chiaro però che tale risultato può essere usato per definire la traccia per ogni operatore nell'immagine $\chi(E' \tilde{\otimes} E)$ di $E' \tilde{\otimes} E$ in $\mathscr{L}(E,E)$ solo nel caso in cui la χ risulti iniettiva, potendosi porre allora

(5) $$tr(\chi(z)) = tr(z) \qquad \text{per ogni} \quad z \in E' \tilde{\otimes} E.$$

E' quindi necessario studiare sia l'immagine $\chi(E' \tilde{\otimes} E)$ sia l'iniettività della χ.

2 - Operatori nucleari

Affrontiamo per primo lo studio dell'immagine $\chi(E' \tilde{\otimes} F)$ per arbitrari spazi di Banach E,F e, seguendo Grothendieck, definiamo *operatore nucleare* ogni operatore $T \in \chi(E' \tilde{\otimes} F)$. Come conseguenza immediata del Teorema 1 abbiamo la seguente caratterizzazione degli operatori nucleari (cf. Teorema I.10).

TEOREMA 2 - *Un operatore* $T \in \mathscr{L}(E,F)$ *è nucleare se e solo se esistono successioni* $(\xi_n) \in \ell^1$, $(x_n') \in B_{E'}$ *e* $(y_n) \in B_{F'}$ *tali che*

(6) $$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \langle x, x_n' \rangle y_n \qquad \textit{per ogni} \quad x \in E.$$

Equivalentemente, $T \in \mathscr{L}(E,F)$ *è nucleare se e solo se esistono successioni* $(x_n') \in E'$ *e* $(y_n) \in F$ *tali da aversi*

(7) $$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n'\| \; \|y_n\| < \infty$$

e

(8) $$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x,x'_n\rangle y_n \qquad \textit{per ogni} \quad x \in E.$$

Indicando con $\mathcal{N}_1$ *la classe degli operatori nucleari* tra spazi di Banach, abbiamo dunque $\mathcal{N}_1(E,F) = \chi(E' \tilde{\otimes} F)$ per definizione e quindi $\mathcal{N}_1(E,F)$ algebricamente è un quoziente dello spazio di Banach $E' \tilde{\otimes} F$. Possiamo allora munire $\mathcal{N}_1(E,F)$ della norma quoziente ν_1, risultando chiaramente per la (1), (7) e (8),

(9) $$\nu_1(T) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\| \; \|y_n\|,$$

ove l'estremo inferiore è preso su tutte le rappresentazioni di tipo (8) di T. La norma ν_1 data dalla (9) è detta *norma nucleare di* T. Equivalentemente,

$$\nu_1(T) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|$$

ove l'estremo inferiore è preso su tutte le rappresentazioni di tipo (6) di T.

Osservazione 1 - L'applicazione χ è, come abbiamo già detto, un isomorfismo algebrico di $E' \otimes F$ su $\mathcal{F}(E,F) \subset \mathcal{N}_1(E,F)$. Ora, se $z \in E' \otimes F$, la norma $\pi(z)$ data dalla (1) è presa su tutte le rappresentazioni finite di z come elemento di $E' \otimes F$, mentre la norma $\nu_1(\chi(z))$ dell'operatore $\chi(z) \in \mathcal{F}(E,F)$, data dalla (9), è presa su tutte le rappresentazioni *finite o possibilmente infinite,* del tipo (8), dell'operatore $\chi(z)$ come elemento di $\mathcal{N}_1(E,F)$. Ne segue la disuguaglianza

(10) $$\nu_1(\chi(z)) \leq \pi(z) \qquad \text{per ogni} \quad z \in E' \otimes F$$

dalla quale non si può dedurre che le norma ν_1 e π siano equivalenti su $E' \otimes F$ (e in generale *non lo sono*, come vedremo nel §III.5). Ora, sappiamo dalla (3) che la traccia tr(z) è continua su $E' \otimes E$ per la norma π, ma non possiamo certo asserire che lo sia anche per la norma ν_1 (e in generale *non lo è*) e pertanto non può essere estesa in generale a $\mathcal{N}_1(E,E)$, che è il completamento di $\chi(E' \otimes E)$

nella norma ν_1. Ne concludiamo che, *mentre ogni elemento* $z \in E' \tilde{\otimes} E$ *ha una traccia ben definita dalla* (4), *ciò non è necessariamente vero per l'operatore nucleare* $X(z)$. Questo rinforza le considerazioni fatte alla fine del §1.

Per finire, diamo le seguenti proprietà notevoli degli operatori nucleari, per le cui dimostrazioni rimandiamo per esempio, a [28] (§17.3) o [27](§2.2).

TEOREMA 3 - (a) $(\mathcal{N}_1, \nu_1)$ *è un ideale normato completo in cui* $\mathcal{F}$ *è denso.*
(b) $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{K}$.
(c) *Se* $T \in \mathcal{N}_1$, *allora* $T' \in \mathcal{N}_1$ *e* $\nu_1(T') \leq \nu_1(T)$.

(d) *Siano* E, F, G *spazi di Banach con* G *sottospazio di* E. *Ogni operatore* $T \in \mathcal{N}_1(G,F)$ *può essere esteso ad un operatore* $\tilde{T} \in \mathcal{N}_1(E,F)$.

(e) $T \in \mathcal{N}_1(E,F)$ *se e solo se esistono operatori* $R \in \mathcal{L}(\ell^1, F)$, $S \in \mathcal{L}(E, \ell^\infty)$ *e un operatore diagonale* $D_\xi : \ell^\infty \to \ell^1$ *definito da*

$$D_\xi(\eta_n) = (\xi_n \eta_n) \qquad \textit{per} \quad (\eta_n) \in \ell^\infty ,$$

con $(\xi_n) \in \ell^1$, *tali che si abbia*

$$T = R\, D_\xi\, S.$$

(f) $\mathcal{N}_1(H,H) = \mathcal{S}_1(H,H)$ *per ogni spazio di Hilbert* H *e* $\nu_1 = \sigma_1$.

La (e) ci dice che l'operatore D_ξ che vi appare è un "prototipo" di operatore nucleare, avendosi inoltre $\nu_1(D_\xi) = \|D_\xi\| = \|(\xi_n)\|_{\ell^1}$ mentre la (f) mostra che l'ideale $\mathcal{N}_1$ è una estensione agli spazi di Banach dell'ideale hilbertiano $\mathcal{S}_1$.

Osservazione 2 - Purtroppo nella (c) non abbiamo equivalenza, cioé per $\mathcal{N}_1$ non vale il Teorema I.8. La ragione di ciò sta nel fatto seguente. Sia $T \in \mathcal{N}_1(E,F)$ e sia G un sottospazio chiuso di F contenente l'immagine $T(E)$. A differenza di quanto accade per un operatore compatto, non è vero in generale che T, considerato come un operatore da E a G, appartenga a $\mathcal{N}_1(E,G)$. Ne segue che se un operatore $T : E \to F$ è tale che $T' \in \mathcal{N}_1(F',E')$, allora $T'' \in \mathcal{N}_1(E'',F'')$ e quindi la restrizione di T'' ad E, cioé T, appartiene a $\mathcal{N}_1(E,F'')$. Non ne segue però, per quanto detto sopra, che $T \in \mathcal{N}_1(E,F)$ (mentre ciò sarà banalmente vero se F è riflessivo). Si ha anche $T \in \mathcal{N}_1(E,F)$ se E' o F'' ha la proprietà di approssimazione. Sempre in questo ordine di idee, menzioniamo una ulteriore patologia degli operatori nucleari rispetto agli operatori compatti e cioé, se $T \in \mathcal{N}_1(E,F)$ e G è un sottospazio chiuso di E contenuto in $T^{-1}(0)$, non è necessariamente vero che l'operatore $T_0 : E/G \to F$ indotto da T sia nucleare. Per una discussione completa delle patologie di cui sopra, cf. [22] (pp. 85-88).

Osserviamo infine il seguente risultato di interesse (cf. [28], p.425).

TEOREMA 4 - $(\mathcal{N}_1,\nu_1)$ *è il più piccolo ideale normato completo.*

L'enunciato del teorema significa che se $(\mathcal{I},\nu)$ è un qualsiasi ideale normato completo, risulta necessariamente $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{I}$ e $\nu(T) \leq \nu_1(T)$ per ogni $T \in \mathcal{N}_1$, ciò che, per la (10) e per l'osservazione fatta dopo le condizioni (Q1)-(Q3) del §I.4, ci permette di rafforzare la (2) come segue:

$$(11) \qquad \|\chi(z)\| \leq \nu(\chi(z)) \leq \nu_1(\chi(z)) \leq \pi(z) \qquad \text{per ogni } z \in E' \otimes F.$$

3. Operatori integrali

Riprendiamo il prodotto tensoriale $E \otimes F$ del §1 e consideriamo la sua immagine $\chi(E \otimes F)$ in $\mathcal{L}(E',F)$. Con la norma

$$(12) \qquad \|z\| = \|\chi(z)\| \qquad \text{per ogni } z \in E \otimes F,$$

$E \otimes F$ diventa uno spazio normato che si indica con $E \otimes_\varepsilon F$ e si chiama *prodotto tensoriale iniettivo di* E *e* F. Ora il duale di $E \otimes_\pi F$ può essere identificato con lo spazio $\mathcal{B}(E,F)$ di tutte le forme bilineari continue su $E \times F$ (cf. [28], p. 325) e pertanto, avendosi per la (2) e la (12)

$$\|z\| \leq \pi(z) ,$$

ne segue che il duale di $E \underset{\varepsilon}{\otimes} F$ può essere identificato con un sottospazio $\mathscr{Y}(E,F)$ di $\mathscr{B}(E,F)$. Chiameremo *forme bilineari integrali* gli elementi di $\mathscr{Y}(E,F)$, dal momento che vale la seguente rappresentazione:

TEOREMA 5 - $b \in \mathscr{Y}(E,F)$ *se e solo se esiste una misura di Radon* μ *su* $B_{E'} \times B_{F'}$ *tale da aversi*

$$b(x,y) = \int_{B_{E'} \times B_{F'}} \langle x,x'\rangle\langle y,y'\rangle d\mu(x'y') \qquad \textit{per ogni } (x,y) \in E \times F.$$

Siamo ora in grado di dare la nozione di operatore integrale e precisamente diremo che $T : E \to F$ è un *operatore integrale* se l'associata forma bilineare b_T su $E \times F'$, definita come

$$b_T(x,y') = \langle Tx,y'\rangle \qquad \text{per ogni } (x,y') \in E \times F',$$

è una forma bilineare integrale, cioé se $b_T \in \mathscr{Y}(E,F')$. Denoteremo con $\mathscr{I}_1(E,F)$ *l'insieme di tutti gli operatori integrali da* E *a* F. Su tale insieme possiamo definire una norma ι_1, detta norma integrale, per mezzo della relazione

$$\iota_1(T) = \|b_T\| \qquad \text{per ogni } T \in \mathscr{I}_1(E,F).$$

Sussiste allora la seguente caratterizzazione:

TEOREMA 6 - *Per ogni operatore lineare* $T : E \to F$ *le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

(i) $T \in \mathscr{I}_1(E,F)$

(ii) *Esiste una misura di Radon* μ *su* $B_{E'} \times B_{F''}$ *tale da aversi*

$$\langle Tx,y'\rangle = \int_{B_{E'} \times B_{F''}} \langle x,x'\rangle\langle y'',y'\rangle d\mu(x',y'') \quad \textit{per ogni } (x,y') \in E \times F'.$$

(iii) *Esiste un compatto* K, *una misura di Radon* μ *su* K *e operatori* $S \in \mathscr{L}(E,L^{\infty}(K,\mu))$ $[$o $S \in \mathscr{L}(E,C(K))]$ *e* $R \in \mathscr{L}(L^1(K,\mu),F'')$ *tali che, se* j_F *è l'iso-*

metria cononica di F *in* F" *e* $J_{\infty,1}$ *è l'immersione canonica di* $L^{\infty}(K,\mu)$ *in* $L^{1}(K,\mu)$, *si abbia:*

$$(13) \qquad j_F T = R J_{\infty,1} S ,$$

risultando inoltre

$$\iota_1(T) = \inf \|\mu\| ,$$

ove l'estremo inferiore (che è poi un minimo) è preso su tutte le misure di Radon μ *su* K *per le quali sussista la* (13) *con* $\|R\| \leq 1$ *e* $\|S\| \leq 1$.

(iv) $\sup\{\frac{|tr(TS)|}{\|S\|} : S \in \mathscr{F}(F,E)\} = c < \infty$, *risultando* $\iota_1(T) = c$

La (iii) mostra che l'immersione canonica $L^{\infty}(K,\mu) \to L^{1}(K,\mu)$ (e quindi anche l'immersione $C(K) \to L^{1}(K,\mu)$) è un prototipo di operatore integrale, mentre la (iv) collega gli operatori integrali alla nozione di traccia. Passando poi alle proprietà degli operatori integrali abbiamo

TEOREMA 7 - (a) $(\mathscr{I}_1, \iota_1)$ *è un ideale normato completo e quindi contiene* $\mathscr{N}_1$, *avendosi* $\iota_1(T) \leq \nu_1(T)$ *per ogni* $T \in \mathscr{N}_1$(per il Teorema 4).

(b) $\mathscr{I}_1 \subset \mathscr{W}$.

(c) $T \in \mathscr{I}_1$ *se e solo se* $T' \in \mathscr{I}_1$, *avendosi in tal caso* $\iota_1(T) = \iota_1(T')$.

(d) *Se* $T \in \mathscr{I}_1$ *e* $S \in \mathscr{W}$, *allora* $ST \in \mathscr{N}_1$ *e* $\nu_1(ST) \leq \|S\| \iota_1(T)$.

(e) $\mathscr{I}_1(H,H) = \mathscr{S}_1(H,H)$ *per ogni spazio di Hilbert* H.

Notiamo che la (b) segue dalla (13), dal momento che l'immersione canonica $J : L^{\infty}(K,\mu) \to L^{1}(K,\mu)$ si fattorizza attraverso uno spazio di Banach riflessivo, per esempio $L^{p}(K,\mu)$, con $1 < p < \infty$. Inoltre, (c) segue essenzialmente dalla (13), mentre (d) è uno dei risultati fondamentali della teoria ed ha, come conseguenza immediata, che $\mathscr{I}_1(E,F) = \mathscr{N}_1(E,F)$ *per ogni spazio di Banach* F *riflessivo*. In tal caso, è quasi superfluo osservare che le norme ι_1 e ν_1 coincidono. Più in generale, *si ha* $\mathscr{I}_1(E,F) = \mathscr{N}_1(E,F)$ *ogni qual volta* F *è uno spazio di Banach separa-*

bile, isometrico al duale di uno spazio di Banach. Infine, (e) segue immediatamente dalla (d) e dal Teorema 3 (f), mostrando altresì che $\mathcal{I}_1$ è un'altra estensione agli spazi di Banach(naturalmente più ampia di $\mathcal{N}_1$ per la (a)) dell'ideale hilbertiano $\mathcal{S}_1$.

Per le dimostrazioni dei risultati di cui sopra, il lettore potrà consultare, per esempio, [28] (§17.4 e pp. 394-395).

4. La proprietà di approssimazione.

Con riferimento alle conclusioni tratte alla fine del §1, affrontiamo adesso la questione dell'iniettività dell'applicazione $\chi : E'\tilde{\otimes} F \to \mathcal{L}(E,F)$ (problema (P7)). E' una delle maggiori scoperte di Grothendieck l'aver legato tale problema, e quindi la teoria degli operatori nucleari, con il problema dell'approssimazione (P6), con il problema generale della traccia (P2) e con il problema (P4) dell'identità tra traccia (funzionale) e traccia spettrale. Precisamente, richiamando quanto detto nel §I.6, abbiamo il seguente fondamentale teorema, ove indichiamo con τ *la topologia su* $\mathcal{L}(E,F)$ *della convergenza uniforme sui sottoinsiemi compatti di* E.

TEOREMA 8 - *Per ogni spazio di Banach* E *le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

(i) E *ha la proprietà di approssimazione.*

(ii) *Per ogni spazio di Banach* F, $\mathcal{F}(E,F)$ *è denso in* $\mathcal{L}_\tau(E,F)$.

(iii) *Per ogni spazio di Banach* F, $\mathcal{F}(F,E)$ *è denso in* $\mathcal{L}_\tau(F,E)$.

(iv) $\mathcal{F}(E,E)$ *è denso in* $\mathcal{L}_\tau(E,E)$.

(v) $\bar{\mathcal{F}}(F,E) = \mathcal{K}(F,E)$ *per ogni spazio di Banach* F.

(vi) $\bar{\mathcal{F}}(F,E) = \mathcal{K}(F,E)$ *per ogni spazio di Banach* F *separabile e riflessivo.*

(vii) $\bar{\mathcal{F}}(F,E) = \mathcal{K}(F,E)$ *per ogni sottospazio chiuso* F *di* c_0.

(viii) *Per ogni spazio di Banach* F *l'applicazione canonica* $\chi : F\tilde{\otimes} E \to \mathcal{L}(F'E)$ *è iniettiva e quindi è una isometria di* $F\tilde{\otimes} E$ *in* $[\mathcal{N}_1(F',E),\nu_1]$.

(ix) *Per ogni spazio di Banach* F *l'applicazione canonica* $\chi : F'\tilde{\otimes} E \to \mathscr{L}(F,E)$ *è iniettiva e quindi è una isometria di* $F'\tilde{\otimes} E$ *su* $[\mathscr{N}_1(F,E),\nu_1]$.

(x) *L'applicazione canonica* $\chi : E'\tilde{\otimes} E \to \mathscr{L}(E,E)$ *è iniettiva e quindi è una isometria di* $E'\tilde{\otimes} E$ *su* $[\mathscr{N}_1(E,E),\nu_1]$.

(xi) *Le norme* π *e* ν_1(cf. (1) e (9)) *coincidono su* $E'\otimes E$.

(xii) *La traccia è continua su* $E'\otimes E$ *per la norma* ν_1 *e quindi si estende ad un unico funzionale lineare continuo su* $[\mathscr{N}_1(E,E),\nu_1]$.

(xiii) *Se* $z \in E'\tilde{\otimes} E$ *e* $\chi(z) = 0$, *allora* $tr(z) = 0$.

(xiv) *Per ogni scelta di successioni* $(x_n) \subset E$ *e* $(x'_n) \subset E'$ *tali che*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|\ \|x'_n\| < \infty \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty}\langle x,x'_n\rangle x_n = 0 \quad \textit{per ogni}\ x \in E,$$

risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\langle x_n,x'_n\rangle = 0.$$

Osserviamo che l'equivalenza delle condizioni(i)-(vii) si basa essenzialmente sul tipo di considerazioni fatte nel §I.6, mentre l'equivalenza delle condizioni (viii)-(xiv) risale a quanto detto nel §1 e nell'Osservazione 1 del §2. Per completare, diamo la dimostrazione dell'equivalenza (i) $\Longleftrightarrow$ (xiv).

Cominciamo col far vedere che i funzionali lineari e continui su $\mathscr{L}_\tau(E,E)$ sono esattamente i funzionali u della forma

$$(14)\qquad \langle T,u\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle T x_n,x'_n\rangle$$

con $(x_n) \subset E$, $(x'_n) \subset E'$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|\ \|x'_n\| < \infty$.

Infatti, se u ha una rappresentazione come sopra, possiamo assumere $\|x_n\| = 1$ per ogni n e scegliere una successione (η_n) di numeri positivi tale che

$$\eta_n \to \infty \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\eta_n\|x'_n\| = C < \infty .$$

Sia K l'insieme $(\eta_n^{-1} x_n) \cup \{0\}$. Allora K è compatto e avendosi

$$|\langle T,u\rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \; \|x_n'\| \; \|T(\eta_n^{-1} x_n)\| \leq C \sup \{ \|Tx\| : x \in K\} \quad ,$$

il funzionale u risulta τ-continuo. Inversamente, supponiamo che u sia un funzionale lineare continuo su $\mathscr{L}_\tau(E,E)$. Allora deve aversi

$$(15) \qquad |\langle T,u\rangle| \leq C \sup\{ \|Tx\|: x \in K\}$$

per un opportuno insieme compatto $K \subset E$ ed un'opportuna costante $C > 0$. Ora è ben noto che ogni insieme compatto di uno spazio di Banach è contenuto nella chiusura dell'inviluppo assolutamente convesso di una successione che tende a 0 e pertanto possiamo supporre che K coincida con la chiusura dell'inviluppo assolutamente convesso di una successione (x_n) tale che $\|x_n\| \to 0$.

Poniamo

$$c_o(E) = \{(y_n) : y_n \in E \;\; e \;\; \|y_n\| \to 0 \} .$$

Si riconosce facilmente che $c_o(E)$ è uno spazio di Banach per la norma

$$\|(y_n)\|_{c_o} = \sup \|y_n\| \; ,$$

e il suo duale è lo spazio di Banach

$$\ell^1(E') = \{(y_n') : y_n' \in E' \;\; e \;\; \|(y_n')\|_{\ell^1} = \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n'\| < \infty\}.$$

Sia $S:\mathscr{L}(E,E) \to c_o(E)$ l'applicazione definita dalla relazione

$$(16) \qquad S(T) = (T x_n) \; .$$

Dalla (15) segue

$$|\langle T,u\rangle| \leq C \sup\{ \|Tx\|: x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n, \; \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1 \}$$

$$\leq C \sup \{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|T x_n\|: \; \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1\} \leq C \sup_n \|Tx_n\| = C \|S(T)\|_{c_o}$$

e pertanto esiste un funzionale lineare e continuo v, definito sulla chiusura di $S[\mathscr{A}(E,E)]$ in $c_o(E)$ tale che

$$(17) \qquad \langle S(T),v\rangle = \langle T,u\rangle .$$

Per il Teorema di Hahn-Banach, possiamo allora estendere v a un funzionale lineare e continuo $\tilde{v}$ su tutto $c_o(E)$, risultando quindi $\tilde{v} \in \ell^1(E')$. Se allora $\tilde{v} = (x'_n)$, con $x'_n \in E'$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\| < \infty$, otteniamo per la (16) e (17),

$$\langle T,u\rangle = \langle S(T),\tilde{v}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T\, x_n, x'_n\rangle .$$

Avendo così stabilito la (14), osserviamo che, per definizione, la (i) del Teorema 8 significa che l'identità I di E appartiene alla chiusura di $\mathscr{F}(E,E)$ in $\mathscr{L}_\tau(E,E)$. Ora, ciò avviene se e solo se ogni funzionale lineare e continuo u in $\mathscr{L}_\tau(E,E)$, che si annulla sugli operatori di rango 1, si annulla pure su I. Ma per la (14), ciò è esattamente quanto asserito dalla (xiv).

Diamo infine alternative formulazioni del problema dell'approssimazione che mostrano l'intimo legame esistente tra tale problema e alcuni problemi di Analisi Classica.

TEOREMA 9 - *Le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

(i) *Ogni spazio di Banach ha la proprietà di approssimazione.*

(ii) *Ogni sottospazio chiuso di* c_o *ha la proprietà di approssimazione.*

(iii) *Ogni operatore* $T \in \mathscr{N}_1(c_o,c_o)$ *tale che* $T^2 = 0$ *soddisfa* $tr(T) = 0$.

(iv) *Ogni matrice infinita* $A = ((a_{kn}))$ *di scalari tale che*

$$(18) \qquad \lim_n a_{kn} = 0 \textit{ per ogni } k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \max_n |a_{kn}| < \infty \quad e \quad A^2 = 0$$

soddisfa

$$tr(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nn} = 0.$$

(v) *Ogni funzione continua* $k(s,t)$ *su* $[0,1] \times [0,1]$ *tale che*

$$\int_0^1 k(r,s)\, k(s,t)ds = 0 \quad \textit{per ogni } r,t \in [0,1]$$

soddisfa

$$\int_0^1 k(t,t)dt = 0 .$$

L'implicazione (i) $\Longrightarrow$ (ii) è ovvia, mentre non è difficile vedere, anche se bisogna fare un po' di conti, che $T \in \mathcal{N}_1(c_o,c_o)$ se e solo se T può essere rappresentato mediante una matrice infinita A soddisfacente le prime due condizioni della (18). Ciò mostra l'equivalenza (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv).

Per stabilire che (ii) $\Longrightarrow$ (iv) consideriamo una matrice A soddisfacente le condizioni (18) e per $k \in \mathbb{N}$ indichiamo con a_k la successione $(a_{kn} : n \in \mathbb{N})$. Chiaramente $a_k \in c_o$ per ogni k e perciò possiamo considerare l'inviluppo lineare chiuso E degli elementi a_k in c_o. Sia (e_k) la base naturale di $\ell^1 = c_o'$ e sia e_k' la restrizione di e_k a E per ogni k. Notiamo che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|_E \|e_k'\|_{E'} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|_{c_o} \|e_k\|_{\ell^1} = \sum_{k=1}^{\infty} \max_n |a_{kn}| < \infty.$$

Inoltre, se $x = \sum_{k=1}^{m} c_k a_k$, risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x,e_n'\rangle a_n = \sum_{k=1}^{m} c_k \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} a_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} c_k \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} e_j = \sum_{k=1}^{m} c_k \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} a_{nj}\Big) e_j = 0$$

dal momento che $A^2 = 0$. Per continuità, ne segue

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x,e_n'\rangle a_n = 0 \qquad \text{per ogni } x \in E$$

e ciò, assumendo la (ii), implica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle a_n,e_n'\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nn} = 0$$

in virtù della (xiii) del Teorema 8.

Mostriamo adesso che (iv) $\Longrightarrow$ (i). Sia E uno spazio di Banach senza la proprietà di approssimazione. Per la (xiv) del Teorema 8 esistono successioni $(x_n) \subset E$, $(x'_n) \subset E'$ tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \, \|x'_n\| < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x'_n \rangle x_n = 0 \qquad \text{per ogni } x \in E,$$

ma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x'_n \rangle \neq 0 .$$

Possiamo supporre che

$$\|x_n\| \to 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\| < \infty .$$

Allora la matrice $A = ((\langle x_n, x'_n \rangle))$ soddisfa le condizioni (18), ma

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x'_n \rangle \neq 0 .$$

Ciò stabilisce in modo relativamente semplice l'equivalenza delle asserzioni (i)-(iv), mentre invece l'equivalenza con la (v) è un po' più complicata da dimostrare e perciò la omettiamo.

Osservazione - È importante notare che *se il duale* E' *ha la proprietà di approssimazione, allora anche* E *la possiede* ed in tal caso $T \in \mathcal{N}_1(E,F)$ *se e solo se* $T' \in \mathcal{N}_1(F',E')$ per ogni spazio di Banach F, risultando $\nu_1(T) = \nu_1(T')$. Inoltre $\bar{\mathcal{F}}(E,F) = \mathcal{K}(E,F)$ per ogni spazio di Banach F.

Per i dettagli sulle dimostrazioni dei risultati esposti in questo paragrafo rimandiamo a [28] (§18.3) e a [38] (vol.I, pp. 29-36).

5 - La proprietà di approssimazione metrica.

Diciamo che uno spazio di Banach E ha *la proprietà di approssimazione metrica* se l'identità di E può essere approssimata uniformemente su ogni sottoinsieme compatto per mezzo di operatori di rango finito e di norma ≤ 1.

Parte del Teorema 8 può allora essere esteso facilmente al caso della proprietà di approssimazione metrica come segue:

TEOREMA 10 - *Per ogni spazio di Banach* E *le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

(i) E *ha la proprietà di approssimazione metrica.*

(ii) *Per ogni spazio di Banach* F, $B_{\mathscr{F}(E,F)}$ *è* τ *- densa in* $B_{\mathscr{L}(E,F)}$.

(iii) *Per ogni spazio di Banach* F, $B_{\mathscr{F}(F,E)}$ *è* τ*-densa in* $B_{\mathscr{L}(F,E)}$.

(iv) $B_{\mathscr{F}(E,E)}$ *è* τ*-densa in* $B_{\mathscr{L}(E,E)}$.

(v) *Per ogni spazio di Banach* F *,l'applicazione canonica* $\chi : F \tilde{\otimes} E \to [\mathscr{I}_1(F',E), \iota_1]$ *è isometrica.*

(vi) *Per ogni spazio di Banch* F *, l'applicazione canonica* $\chi : F' \tilde{\otimes} E \to [\mathscr{I}_1(F,E), \iota_1]$ *è isometrica.*

(vii) *L'applicazione canonica* $\chi : E' \tilde{\otimes} E \to [\mathscr{I}_1(E,E), \iota_1]$ *è isometrica.*

(viii) *Per ogni scelta di successioni* $(x_n) \subset E$ *e* $(x_n') \subset E'$ *tali che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \|x_n'\| < \infty \quad e \quad |\sum_{n=1}^{\infty} \langle Sx_n, x_n' \rangle| \leq \|S\| \qquad \textit{per ogni } S \in \mathscr{F}(E,E),$$

risulta

$$|\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x_n' \rangle| \leq 1.$$

Come per il Teorema 8, si riconosce facilmente l'equivalenza delle condizioni (i)-(iv) e l'equivalenza delle condizioni (v)-(viii), essenzialmente in base alle definizioni. Infine, la (i) significa che l'identità I di E appartiene alla τ-chiusura di $B_{\mathscr{F}(E,E)}$ e ciò naturalmente avviene se e solo se ogni funzionale $u \in \mathscr{L}_\tau(E,E)'$ tale che $|\langle S,u\rangle| \leq 1$ per ogni $S \in B_{\mathscr{F}(E,E)}$, soddisfa anche $|\langle I,u\rangle| \leq 1$. Ma ciò è proprio quanto asserisce la (viii), per la rappresentazione di u data nel paragrafo precedente.

Osservazione 1 - Se E' ha la proprietà di approssimazione metrica, allora anche E la possiede e in tal caso l'applicazione $\chi : E' \tilde{\otimes} F \to [\mathscr{I}_1(E,F), \iota_1]$ è isometrica. Da questo e dai Teoremi 8 e 10 segue che se E o F' ha la proprietà di approssimazione metrica, allora $[\mathscr{N}_1(F,E), \nu_1]$ è un sottospazio normato di $[\mathscr{I}_1(F,E), \iota_1]$.

Osservazione 2 - E' chiaro che la proprietà di approssimazione metrica implica la proprietà di approssimazione. Se E è uno spazio di Banach riflessivo, oppure separabile e isometrico al duale di un altro spazio di Banach, allora $[\mathscr{I}_1(F,E),\iota_1] = [\mathscr{N}_1(F,E),\nu_1]$ per quanto detto alla fine del §3, e quindi la proprietà di approssimazione e la proprietà di approssimazione metrica sono equivalenti per E. Vedremo però al §III.5 che ciò non è vero in generale.

Osservazione 3 - I seguenti spazi concreti hanno la proprietà di approssimazione metrica: spazi di Hilbert, $L^p(1 \leq p \leq \infty)$, C(K) con K compatto, e quindi $\ell^p(1 \leq p \leq \infty)$, c, c_0, e, più in generale, lo spazio $C_b(Y)$ delle funzioni continue e limitate su uno spazio topologico completamente regolare Y.

Per quanto detto in questo paragrafo rimandiamo a [28] (§§18.4 e 18.5) e a [38] (vol. I, pp.37-40).

6 - Operatori semi-integrali

E' uno dei meriti di Grothendieck l'aver riconosciuto che alcuni ideali interessanti di operatori non hanno buone proprietà di stabilità relativamente alle operazioni canoniche su spazi di Banach, cioé "restrizione alla chiusura dell'immagine" e "passaggio a quozienti", come avevamo già notato nell'Osservazione 2 del §2 a proposito degli operatori nucleari. Questo è anche il caso per gli operatori integrali e perciò Grothendieck fu indotto a dare altre due definizioni. Per introdurle, richiamiamo i seguenti risultati, peraltro ben noti.

1) *Ogni spazio di Banach E è isometrico a un sottospazio $\ell^\infty(\mathbb{A})$ per un opportuno insieme $\mathbb{A}$, e quindi a un sottospazio di uno spazio L^∞.*

Infatti, sia c la minima cardinalità di un insieme denso in B_E. Allora

$B_{E'}$ contiene un insieme debolmente denso $(x'_\alpha : \alpha \in \mathbb{A})$ con card $\mathbb{A} = c$ e l'isometria in questione è data dall'applicazione $E \ni x \to (\langle x, x'_\alpha \rangle) \in \ell^\infty(\mathbb{A})$.

2) *Ogni spazio di Banach* E *è isometrico a un quoziente di* $\ell^1(\mathbb{A})$ *per un opportuno insieme* $\mathbb{A}$, *e quindi a un quoziente di uno spazio* L^1.

Sia c la minima cardinalità di un insieme $(x_\alpha : \alpha \in \mathbb{A})$ denso in B_E. L'applicazione $\ell^1(\mathbb{A}) \ni (\xi_\alpha : \alpha \in \mathbb{A}) \to \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} \xi_\alpha x_\alpha \in E$ è continua e la sua immagine è densa e di seconda categoria, e pertanto una isometria su E in virtù del Teorema dell'Applicazione Aperta.

Denotando, una volta per tutte, con $J_E : E \to L^\infty$ *e* $Q_E : L^1 \to E$ *delle isometrie del tipo di quelle considerate ai punti* 1) *e* 2) rispettivamente, diremo che $T \in \mathscr{L}(E,F)$ *è un'applicazione semi-integrale destra* (risp. *sinistra*) *se* $J_F T$ (risp. TQ_E) *è un'applicazione integrale*.

Il seguente teorema costituisce uno dei maggiori risultati della teoria.

TEOREMA 11 - (a) *Se* $T \in \mathscr{L}(E,F)$ *è un'applicazione semi-integrale destra, allora esistono un compatto* K, *una misura di Radon positiva* μ *su* K *e operatori lineari continui* $S : E \to L^\infty(K,\mu)$, $R : L^2(K,\mu) \to F$ *tali da aversi*

$$T = RJ_{\infty,2}\, S,$$

ove $J_{\infty,2}$ *è l'iniezione canonica* $L^\infty(K,\mu) \to L^2(K,\mu)$.

(b) *Se* $T \in \mathscr{L}(E,F)$ *è un'applicazione semi-integrale sinistra, allora esistono un compatto* K, *una misura di Randon positiva* μ *su* K *e operatori lineari continui* $S : E \to L^2(K,\mu)$, $R : L^1(K,\mu) \to F''$ *tali da aversi*

$$j_F\, T = RJ_{2,1} S,$$

ove $J_{2,1}$ *è l'iniezione canonica* $L^2(K,\mu) \to L^1(K,\mu)$ *e* j_F *è l'isometria canonica* $F \to F''$.

(c) *Se* $T \in \mathscr{L}(E,F)$ *e* $S \in \mathscr{L}(F,G)$ *sono due applicazioni semi-integrali destre o sinistre, allora* ST *è un'applicazione nucleare di* E *in* G.

La (a) segue dal fatto che, essendo l'applicazione $J_F T : E \to L^\infty$ integrale, risulta per la (13),

$$j_{L^\infty} J_F T = R_1 J_{\infty,1} S$$

ove j_{L^∞} è l'isometria canonica $L^\infty \to L^{\infty}{}''$. Naturalmente $J_{\infty,1} = J_{2,1} J_{\infty,2}$ e quindi, ponendo $R_2 = R_1 J_{2,1}$, abbiamo

$$j_{L^\infty} J_F T = R_2 J_{\infty,2} S.$$

Consideriamo l'applicazione $S_1 = J_{\infty,2} S : E \to L^2(K,\mu)$. Poiché l'immagine $R_2 S_1(E)$ è di fatto contenuta in F e quest'ultimo è (isometrico a) un sottospazio di $L^{\infty}{}''$, risulta $S_1(E) \subset R_2^{-1}(F)$. Ma $R_2^{-1}(F)$ è un sottospazio chiuso dello spazio di Hilbert $L^2(K,\mu)$ e pertanto, se P è la proiezione ortogonale di quest'ultimo su $R_2^{-1}(F)$, si ha $S_1 = PS_1$, quindi $T = R_2 P S_1 = R_2 P J_{\infty,2} S$ e basta allora porre $R = R_2 P$ per ottenere la fattorizzazione desiderata.

La (b) segue dalla (a) per dualità.

Infine, per dimostrare la (c), per esempio nel caso di due applicazioni semi-integrali destre S,T, utilizziamo la (a) e scriviamo la S nella forma $S = R_1 J_{\infty,2} S_1$. Se I è identità di $L^\infty(K,\mu)$, l'applicazione $S_1 T = I S_1 T$ è integrale per definizione ed, essendo $J_{\infty,2}$ debolmente compatta, l'applicazione $J_{\infty,2} S_1 T$, e quindi anche la ST, sarà nucleare per la (d) del Teorema 7.

Osservazione - Il confronto tra la (a) e la (b) del teorema precedente mostra che le applicazioni semi-integrali sinistre non hanno proprietà così buone come quelle delle applicazioni semi-integrali destre. E' per ciò che quest'ultime sono state l'oggetto di uno studio molto più intenso e approfondito che le prime, portando anche a rilevanti generalizzazioni, come mostreremo in seguito.

Avvertiamo infine che la nomenclatura "applicazioni semi-integrali destre" è stata definitivamente abbandonata, nella letteratura, a favore della terminologia "operatori assolutamente sommanti". La ragione diverrà chiara quando torneremo sull'argomento nel §III.2.

7. - Operatori di potenza p-sommabile ($0 < p \leq 1$) e operatori di ordine 0.

Sia $0 < p \leq 1$. Un operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ si dice di *potenza p-sommabile* se ammette una rappresentazione del tipo

$$(19) \qquad Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \langle x, x'_n \rangle y_n \qquad \text{per ogni } x \in E,$$

con $(\xi_n) \in \ell^p$ e (x'_n) e (y_n) successioni limitate in E' e F rispettivamente (cf. Teorema 2). Ovviamente, possiamo sempre supporre che $\|x'_n\| = \|y_n\| = 1$ per ogni n. Denotando con $\mathscr{N}_p$ *la classe degli operatori di potenza p-sommabile* tra spazi di Banach, possiamo munire ogni componente $\mathscr{N}_p(E,F)$ della quasi-norma

$$(20) \qquad \nu_p(T) = \inf \|(\xi_n)\|_{\ell^p}$$

ove l'estremo inferiore è preso su tutte le rappresentazioni (19) di T.

Evidentemente gli operatori di potenza 1-sommabile non sono altro che gli operatori nucleari introdotti al §2. Vale il seguente teorema, analogo al Teorema 3:

TEOREMA 12 - (a) $(\mathscr{N}_p, \nu_p)$ *è un ideale quasi-normato completo in cui* $\mathscr{F}$ *è denso.*

(b) *Se* $p < q$, *allora* $\mathscr{N}_p \subset \mathscr{N}_q$ *e* $\nu_q \leq \nu_p$ *su* $\mathscr{N}_p$.

(c) $T \in \mathscr{N}_p(E,F)$ *se e solo se esistono operatori* $R \in \mathscr{L}(\ell^1,F)$ *e* $S \in \mathscr{L}(E,\ell^\infty)$ *e un operatore diagonale* $D_\xi : \ell^\infty \to \ell^p$ *definito da*

$$D_\xi(\eta_n) = (\xi_n \eta_n) \qquad \textit{per} \qquad (\eta_n) \in \ell^\infty,$$

con $(\xi_n) \in \ell^p$, *tale che si abbia*

$$T = RD_\xi S.$$

(d) $\mathcal{N}_p(H,H) = \mathcal{S}_p(H,H)$ *per ogni spazio di Hilbert* H *e* $\nu_p = \sigma_p$.

(e) *Se* $S \in \mathcal{N}_p$ *e* $T \in \mathcal{N}_q$, *allora* $ST \in \mathcal{N}_r$ *con* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{3}{2}$ e

$$\nu_r(ST) \leq \nu_p(S)\, \nu_q(T) .$$

La (a), (c) e (d) sono estensioni al caso $0 < p \leq 1$ delle analoghe proprietà degli operatori nucleari. Ovviamente nella (c) R è un operatore continuo da ℓ^p in F. La (b) è conseguenza immediata della (20) e del fatto che $\ell^p \subset \ell^q$ per $p < q$. Infine la (e), che è ovviamente di interesse solo ove risulti $r < 1$, segue essenzialmente dal Teorema I.13(b) per mezzo di opportune fattorizzazioni di S e T attraverso spazi di Hilbert.

L'importanza degli operatori di potenza p-sommabile è sottolineata dal seguente teorema, dimostrato da Grothendieck nello sforzo di identificare, alla luce delle considerazioni fatte al §4, una classe di operatori tra spazi di Banach per i quali la traccia avesse senso e fosse uguale alla somma degli autovalori (problemi (P2) e (P4)).

TEOREMA 13 - (a) *Se* $T \in \mathcal{N}_p(E,E)$, *allora* $(\lambda_n(T)) \in \ell^r$ *con* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ *e*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(T)|^r\right)^{1/r} \leq \nu_p(T) .$$

(b) *Se* $T \in \mathcal{N}_p(E,E)$ *con* $p \leq 2/3$, *allora esiste la traccia* tr(T) *e*

$$tr(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T).$$

Il teorema mostra che se $p \leq 2/3$, allora la traccia è continua su $[\mathcal{N}_p(E,E),\nu_p]$, avendosi per la (a) e (b),

$$|tr(T)| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n(T)| \leq (\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n(T)\ ^r)^{1/r} \leq \nu_p(T).$$

D'altra parte, la (a) mostra che se T è nucleare, allora $(\lambda_n(T) \in \ell^2$. Questo risultato è il migliore possibile, dal momento che esiste un operatore nucleare su uno spazio $C(K)$ (e si può prendere per K la circonferenza unitaria di $\mathbb{R}^2$), i cui autovalori formano una successione che appartiene a ℓ^2 ma non a ℓ^p per nessun $p < 2$.

Per finire, consideriamo il caso $p = 0$. Poniamo $\ell^\circ = \bigcap_{p>0} \ell^p$ e definiamo *operatore di ordine* 0 ogni operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ che ammetta una rappresentazione del tipo (19) con $(\xi_n) \in \ell^\circ$. Indicheremo poi con $\mathcal{N}_0$ *la classe degli operatori di ordine* 0 tra spazi di Banach. Notiamo subito che la successione (ξ_n) nella (19) può sempre supporsi ordinata in modo tale che la $(|\xi_n|)$ sia non crescente. Ora per una tale successione si ha

$$\infty > c_p = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p \geq n|\xi_n|^p$$

e pertanto

$$\sup_n n^{1/p}|\xi_n| < \infty \qquad \text{per ogni} \quad p > 0 .$$

Ma è facile vedere che ciò implica pure

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k|\xi_n| < \infty \qquad \text{per ogni} \quad k \in \mathbb{N} .$$

Questo ci induce a introdurre *lo spazio* s *delle successioni rapidamente decrescenti*, definito come

$$s = \{(\xi_n) : p_k(\xi_n) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^k|\xi_n| < \infty \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}\}.$$

Tale spazio è uno spazio di Fréchet per la topologia generata dalla successione di semi-norme p_k ed è facile verificare che $s \subsetneq \ell^\circ$, l'inclusione essendo continua (notiamo che ℓ° ha una topologia vettoriale naturale che è metrizabile e completa, ma non localmente convessa, dal momento che si ha

$\ell^\circ = \bigcap_{k=1}^{\infty} \ell^{1/k}$).

Possiamo ora enunciare il seguente

TEOREMA 14 - (a) $\mathcal{N}_0$ *è un ideale che può essere dotato di una topologia vettoriale metrizabile e completa (ma non localmente convessa) e* $\mathcal{F}$ *è denso in* $\mathcal{N}_0$ *per tale topologia.*

(b) $\mathcal{N}_0 = \bigcap_{p>0} \mathcal{N}_p$.

(c) $T \in \mathcal{N}_0(E,F)$ *se e solo se* T *ammette una rappresentazione del tipo* (19) *con* $(\xi_n) \in s$.

(d) $T \in \mathcal{N}_0(E,F)$ *se e solo se esistono operatori* $R \in \mathcal{L}(s,F)$ (*o* $R \in \mathcal{L}(\ell^\circ,F)$), $S \in \mathcal{L}(E,\ell^\infty)$ *e un operatore diagonale* $D_\xi : \ell^\infty \to s$ (*o* $D_\xi : \ell^\infty \to \ell^\circ$) *definito da*

$$D_\xi(\eta_n) = (\xi_n \eta_n) \qquad \textit{per} \qquad (\eta_n) \in \ell^\infty,$$

con $(\xi_n) \in s$ (*o* $(\xi_n) \in \ell^\circ$), *tali che si abbia*

$$T = RD_\xi S.$$

(e) $T \in \mathcal{N}_0$ *se e solo se* $T' \in \mathcal{N}_0$.

(f) $\mathcal{N}_0(H,H) = \mathcal{S}_0(H,H)$ $(\equiv \mathcal{I}(\ell^\circ))$ *per ogni spazio di Hilbert* H.

Le proprietà (c), (d), (e) e (f) sono di facile verifica, come pure il fatto che $\mathcal{N}_0$ sia un ideale. Ora, per ogni coppia di spazi di Banach E e F risulta $\mathcal{N}_0(E,F) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_{1/k}$ (E,F) (che ci dà la (b)) e quindi $\mathcal{N}_0(E,F)$ può essere munito della topologia limite proiettivo delle topologie generate dalle quasinorme $\nu_{1/k}$ su $\mathcal{N}_{1/k}(E,F)$. Tutte queste topolgie sono metrizabili e complete e tale perciò sarà anche la topologia limite proiettivo su $\mathcal{N}_0(E,F)$. Ne segue la (a), la densità di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{N}_0$ essendo conseguenza della densità di $\mathcal{F}$ in $(\mathcal{N}_p, \nu_p)$ per ogni $p > 0$. Per le dimostrazioni, cf [49] (§8.5) o [28] (§19.9).

Osservazione 1 - Gli operatori di potenza p-sommabile forniranno lo spunto per la teoria generale degli "operatori p-nucleari" per $0 < p \leq \infty$, che sarà tratteggiata nel §III.3, ed è quest'ultima nomenclatura che è ormai usata nella letteratura.

Osservazione 2 - Gli operatori di ordine 0 sono oggi chiamati "operatori fortemente nucleari" (o "s-nucleari") e il loro ideale si denota comunemente con $\mathcal{N}_s$. Tali operatori e gli spazi da loro generati sono stati studiati da numerosi autori (per i quali rimandiamo, per esempio, alla bibliografia in [28]), portando quindi a quella generalizzazione della nuclearità che è oggi conosciuta come "λ-nuclearità" (cf. [8]).