I - LA TEORIA CLASSICA.

Introduzione

Lo scopo di questa prima parte è di tratteggiare brevemente lo sviluppo della teoria classica degli operatori, cioé di quella parte della teoria degli operatori che precede l'avvento di Grothendieck. Così, dalla nascita della teoria agli inizi del secolo ad opera di Fredholm, che non a caso coincide con la nascita dell'Analisi Funzionale, si procede, attraverso i lavori di Hilbert, Schmidt, Lebesgue e Fréchet, verso una formulazione precisa di una "teoria" degli operatori che si concretizza nei lavori di F. Riesz e, soprattutto, Banach. Emergono così gli operatori "classici", cioé gli operatori di Hilbert-Schmidt, compatti, debolmente compatti e completamente continui. I principi motori della teoria, oltre naturalmente al principio primario di "risolvere equazioni", sono chiaramente individuati nel *problema della traccia* e nel (più recente) *problema dell'approssimazione* di Banach, fino a giungere, attraverso l'algebra di Calkin, ad erigere lo scenario nel quale si svilupperà poi la teoria moderna degli operatori, basata sul lavoro di Grothendieck e sull'uso sistematico del concetto di "ideale" da parte di Pietsch.

Il lettore potrà consultare i trattati [7] e [9] per gli argomenti esposti in questa prima parte.

1 - Nascita dell'Analisi Funzionale.

Sebbene i processi di derivazione e integrazione possano essere considerati come operazioni definite su classi di funzioni, fino alla fine del secolo scorso questo punto di vista venne usato essenzialmente solo per convenienza di notazione. Ricordiamo che fu Pincherle (cf. [52], vol. I, p.92-141), nel 1886, il primo matematico a insistere sul fatto che una funzione dovrebbe essere considerata come un "punto" in un qualche insieme e ad usare una notazione operatoriale per l'applicazione che associa, ad un funzione olomorfa ϕ, la funzione

$$s \to \int_\Gamma A(s,t)\phi(t)dt \quad ,$$

ove Γ è una curva nel dominio di olomorfia di ϕ e la funzione A è olomorfa. Questo primo accenno all'Analisi Funzionale fu immediatamente perseguito da Volterra nel 1887 (cf. [63], vol. I, p. 294-314)) con le sue "funzioni di linee", arrivando poi, nel 1896 (cf. [63], vol. II, p. 216-262) al concetto generale di ciò che Hilbert chiamerà in seguito "equazione integrale del secondo tipo",

$$\phi(t) - \int_a^t S_o(s,t)\phi(s)ds = f(t) \ ,$$

nella funzione incognita ϕ (cf. anche [62]).

Fu però con l'inizio del secolo che incominciò a svilupparsi nell'Analisi quella tendenza astratta che si è poi evoluta in quella che oggi è conosciuta come l'Analisi Funzionale. Infatti, tra il 1900 e il 1910 si verificò una improvvisa cristallizzazione di tutte le idee e metodi che si erano accumulati nell'Analisi durante il XIX secolo. Questo fu dovuto essenzialmente alla pubblicazione di quattro lavori fondamentali:

(i) L'articolo di Fredholm [15] del 1903 sulle equazioni integrali;
(ii) La tesi di Lebesgue [35] del 1904 sull'integrazione;
(iii) L'articolo di Hilbert [26] del 1906 sulla teoria spettrale;

(iv) La tesi di Fréchet [13] del 1906 sugli spazi metrici.

L'articolo di Fredholm, ispirato dal lavoro di Volterra, inizia la teoria delle equazioni integrali e può essere considerato come la sorgente di tutti i successivi sviluppi della teoria spettrale. Il suo effetto sul mondo matematico fu profondo e, d'improvviso, la teoria delle equazioni integrali divenne uno tra gli argomenti favoriti degli analisti. Uno dei più attivi assertori della nuova teoria fu David Hilbert che, tra il 1904 e il 1906, pubblicò sei lavori sulle equazioni integrali tra i quali spicca il lavoro [26] che può essere considerato il primo articolo scritto in Analisi Funzionale. In esso Hilbert addirittura abbandona il punto di vista delle equazioni integrali per ritornare al concetto dei sistemi infiniti di equazioni lineari, comprendendo che le prime possono essere considerate come casi speciali dei secondi. Ed è proprio in questo studio che Hilbert comincia a gettare le basi della teoria degli spazi di Hilbert e di quegli operatori che saranno poi detti *operatori di Hilbert-Schmidt*.

Allo stesso tempo Fréchet, nella sua famosa tesi, introduceva in Analisi il concetto di *struttura*, definendo assiomaticamente gli *spazi metrici* e facendo così confluire insieme Geometria, Topologia e Analisi. Ciò è rafforzato anche dalla grande enfasi posta da Fréchet su tre nozioni assolutamente fondamentali, cioé *compattezza, completezza* e *separabilità*, aprendo così la possibilità di trasferire la geometria euclidea in dimensione infinita. Ed infatti, questo è proprio ciò che viene realizzato dallo stesso Fréchet [14] e da Schmidt [58] nel 1908. Nell'articolo di Schmidt troviamo la definizione dello spazio ℓ^2, con le nozioni di prodotto scalare, norma, ortogonalità, insiemi chiusi e sottospazi vettoriali.

Questo punto di vista geometrico era già stato adottato nel 1906-1907 da Fischer [12] e F. Riesz [54] (vol. I, p. 378-395) che, indipendentemente, erano arrivati a quello che è oggi conosciuto come il *teorema di Fischer-Riesz* e che stabilì un legame fino ad allora insospettato tra la teoria degli spazi di Hilbert e la teoria dell'integrazione. Quest'ultima, da Cauchy a Jordan e Peano, si era evoluta in maniera completamente indipendente dalla teoria spettrale ed è molto probabile che lo sviluppo dell'Analisi Funzionale sarebbe stato considerevolmente ritardato se l'integrale di Lebesgue [35] non fosse fortunatamente apparso sulla scena esattamente all'inizio del lavoro di Hilbert sulle equazioni integrali. Con l'aiuto di questo formidabile strumento, Fischer e F. Riesz potevano definire lo spazio $L^2(I)$ su un intervallo compatto $I \subset \mathbb{R}$, che da ora in poi possiamo supporre, per comodità, essere l'intervallo $[0,1]$, e dimostrare l'isomorfismo tra $L^2(I)$ e ℓ^2 associando ad ogni "funzione" $f \in L^2(I)$ la successione (ξ_n) dei suoi coefficienti di Fourier rispetto ad un sistema ortonormale e completo. Ne conseguiva immediatamente che i risultati di Fredholm e Schmidt si potevano applicare senza alcun cambiamento ad operatori "integrali"

$$(1) \qquad (Tf)(s) = \int_I k(s,t)f(t)dt$$

con *nucleo* $k(s,t) \in L^2(I \times I)$.

Ma la conseguenza più importante del teorema di Fischer-Riesz fu che aprì la strada alla definizione degli spazi L^p, dovuta a F. Riesz nel 1910 [54] (vol. I, p. 403 e pp. 441-497), e alla teoria generale degli spazi normati intrapresa da Helly nel 1921 [25] e formalizzata da Banach nella sua fondamentale monografia [2].

Sin dai tempi di Hilbert e Riesz si era notato che gli operatori integrali definiti dalla (1) per mezzo di una "funzione nucleo" non esaurivano certo il concetto generale di operatore lineare, dal momento che nemmeno l'identità poteva essere espressa in tal modo. Nasce così il problema seguente:

(P1) *Determinare quali operatori* T *possono essere rappresentati da una formula del tipo* (1).

Tale problema dovrà attendere fino al 1950 per avere una risposta soddisfacente ! (cf. [60]).

2 - Il problema della traccia.

L'articolo di Fredholm già citato nel § 1 ebbe il merito di avviare Hilbert e la sua scuola sulla strada degli spazi di Hilbert e degli operatori di Hilbert-Schmidt. Si dà il caso che tali nozioni siano strettamente collegate ad un altro problema di fondamentale importanza. Per formulare tale problema ricordiamo che, se $A = ((a_{ij}))$ è una matrice $n \times n$, si definisce *polinomio caratteristico* di A il polinomio

$$(2) \qquad p(\lambda) \equiv \det(\lambda I - A) \equiv \lambda^n - t_1\lambda^{n-1} + \ldots + t_n$$

e *traccia* di A il numero

$$(3) \qquad \mathrm{tr}(A) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \, .$$

Già nel 1840 Cauchy [5] aveva dimostrato che

$$t_1 = \mathrm{tr}(A) \, ,$$

il che implica, essendo ovviamente t_1 la somma degli zeri del polinomio $p(\lambda)$ in (2), l'uguaglianza fondamentale

$$(4) \qquad \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)$$

ove le quantità $\lambda_i(A)$ sono gli autovalori di A contati secondo la loro molteplicità algebriche. L'espressione a secondo membro della (4) è comunemente chiamata la *traccia spettrale* di A. Pertanto, nel contesto delle matrici, è evidente che la traccia (definita dalla (3)) è lineare, essendo la somma degli elementi diagonali, e coincide con la traccia spettrale.

Denotiamo ora con $\mathbb{C}^n$ lo spazio euclideo complesso ad n dimensioni e sia T un operatore in $\mathbb{C}^n$. Se $(x_1, \ldots, x_n)$ è una base per $\mathbb{C}^n$ e $Tx_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ $(i=1,\ldots,n)$, la matrice $A = ((a_{ij}))$ si chiama una *rappresentazione* di T e, da quanto detto sopra, è facile dimostrare (cf. [9], II, pp. 1016-1017) il seguente

TEOREMA 1 - (a) *La quantità* tr(A) *non dipende dalla rappresentazione* A *di* T *e quindi definisce la traccia* tr(T) *dell'operatore* T.

(b) $\mathrm{tr}(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(T)$, *ove i* $\lambda_i(T)$ *sono gli autovalori di* T *contati secondo le loro molteplicità algebriche.*

(c) tr(T) = 0 *se* T *è un operatore nilpotente.*

(d) tr(TS) = tr(ST) *se* S *e* T *sono due operatori su* $\mathbb{C}^n$.

Il problema 1 richiede le seguenti osservazioni.

Osservazione 1 - (a) motiva la definizione di *traccia funzionale* per la traccia di un operatore definita per mezzo della (3) poiché mostra che tale traccia è un funzionale lineare in T. Per semplicità, noi continueremo a usare il termine "traccia" per la traccia funzionale.

Osservazione 2 - (b) mostra che *la traccia di un operatore coincide con la sua traccia spettrale.* Questo semplice fatto, insieme all'Osservazione 1, è stato tenuto presente da grandi (e non tanto grandi) matematici sin dal tempo di Cauchy ed ha contribuito a delineare l'evoluzione dell'Analisi Funzionale moderna.

Osservazione 3 - (c) è un'ovvia conseguenza di (b) ma, come vedremo più tardi, le cose andranno orribilmente storte in un contesto più generale.

Il Teorema 1 si estende immediatamente a operatori di rango finito da spazi lineari in dualità $\langle E,E'\rangle$ a uno spazio lineare F. Infatti, se $x' \in E'$ e $y \in F$, si ottiene un operatore T di rango 1 ponendo

$$Tx = \langle x,x'\rangle y , \qquad x \in E.$$

Ne segue che ogni operatore T di rango finito è dato da un'espressione del tipo

$$(5) \qquad Tx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i' \rangle y_i, \qquad x \in E,$$

ove $x_i' \in E'$ e $y_i \in F$ $(i = 1,\dots,n)$. Se $F = E$, il numero

$$(6) \qquad tr(T) = \sum_{i=1}^{n} \langle y_i, x_i' \rangle$$

non dipende dalla rappresentazione finita di T: ciò è ovvio per $n=1$ e si estende al caso generale per linearità. Pertanto, denotando con $\mathscr{F}(E,E)$ *l'insieme degli operatori di rango finito su* E, abbiamo che la traccia (6) (che è ovviamente la stessa del Teorema 1(a)) è un funzionale lineare su $\mathscr{F}(E,E)$. E' naturale allora porsi il seguente problema:

(P2) *Quali topologie si possono considerare su* $\mathscr{F}(E,E)$ *per le quali la traccia risulti continua, e quindi si estenda ad un funzionale lineare e continuo sul completamento di* $\mathscr{F}(E,E)$ *rispetto a tali topologie?*

Questa domanda innocente segna il corso della storia!

Nel 1909 I. Schur [59] dimostrò il seguente

TEOREMA 2 - *Se* $A = ((a_{ij}))$ *è una matrice* $n \times n$, *si ha:*

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)|^2 \leq \sum_{i,j}^{1,n} |a_{ij}|^2 .$$

In vista dell'importanza che assumerà in seguito il secondo membro della (7), conveniamo di porre

$$(8) \qquad \sigma_2(A) \equiv \Big(\sum_{i,j}^{1,n} |a_{ij}|^2\Big)^{\frac{1}{2}} .$$

Allora, se A e B sono due matrici $n \times n$, Lalesco [34] nel 1914 mostrò che

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(AB)| \leq \sigma_2(A)\ \sigma_2(B)\ . \tag{9}$$

Ne segue che, se H è uno spazio di Hilbert e $T = AB$ con $A,B \in \mathcal{F}(H,H)$ si ha

$$|tr(T)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(AB)| \leq \sigma_2(A)\sigma_2(B) \tag{10}$$

Lo scenario adesso è predisposto e le questioni fondamentali sono:

(P3) *Quali operatori su uno spazio di* Hilbert *hanno una traccia?*

(P4) *Quando la traccia di un operatore è la somma degli autovalori?*

3 - Operatori di Hilbert-Schmidt

Già i lavori di Hilbert e Schmidt contenevano le idee espresse nel seguente

TEOREMA 3 - *Sia* T *l'operatore su* $L^2(I)$ *definito dalla* (1) *con nucleo* $k(s,t)$ e $L^2(I \times I)$ *e tale che* $k(s,t) = k(t,s)$. *Allora:*

(a) T *ha una successione* $(\lambda_n(T))$ *di autovalori reali tali che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T)^2 = \int_{I \times I} |k(s,t)|^2 ds\ dt\ . \tag{11}$$

(b) Ogni $\lambda_n(T) \neq 0$ *ha molteplicità finita e* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(T) = 0$ *se la successione* $(\lambda_n(T))$ *è infinita.*

(c) *Per ogni autovalore* $\lambda_n(T)$, *contato secondo la sua molteplicità, esiste una autofunzione* ϕ_n *di* T *tale che*

(12) $$\int_I \phi_n(t)\, \phi_m(t)\, dt = 0 \qquad \text{per } m \neq n.$$

(d) *Per ogni coppia di funzioni* $x, y \in L^2(I)$ *risulta*

(13) $$\int_{I\times I} k(s,t)x(s)\overline{y(t)}\,ds\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T) \int_I x(t)\overline{\phi_n(t)}\,dt \int_I \phi_n(t)\overline{y(t)}\,dt.$$

Applicando allora la (11), (12) e (13) si ottiene

(14) $$\sum_{n,m}^{1,\infty} |(T\phi_n, \phi_m)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T\phi_n\|^2 < \infty,$$

non solo, ma si riconosce poi che il valore comune di tali serie è indipendente dal sistema ortogonale completo (ϕ_n) scelto in $L^2(I)$, ciò che induce a dare le seguente definizione: un operatore T su uno spazio di Hilbert H è detto *operatore di Hilbert-Schmidt* se esiste un sistema ortonormale completo $(e_\alpha : \alpha \in \mathbb{A})$ in H tale che

(15) $$\sigma_2(T) \equiv \Big(\sum_{\alpha \in \mathbb{A}} \|Te_\alpha\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty .$$

Sussistono allora le seguenti caratterizzazioni, nelle quali indichiamo con T^* *l'operatore aggiunto*, nel senso della teoria degli spazi di Hilbert, dell'operatore T. (Si noti che un operatore di Hilbert-Schmidt è necessariamente limitato, come conseguenza immediata della definizione, e pertanto l'operatore aggiunto esiste ed è anche esso limitato).

TEOREMA 4. *Sia* T *un operatore su uno spazio di Hilbert* H. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) T *è un operatore di Hilbert-Schmidt.*

(ii) *Per ogni sistema ortonormale completo* $(e_\alpha : \alpha \in \mathbb{A})$ *in* H *si ha:*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{A}} \|Te_\alpha\|^2 = \sigma_2(T)^2 < \infty$$

(iii) *Per due (risp. per ogni coppia di) sistemi ortonormali completi* $(e_\alpha : \alpha \in \mathbb{A})$ *e* $(f_\alpha : \alpha \in \mathbb{A})$ *in* H *si ha*

$$\sum_{\alpha\in A}\ \sum_{\beta\in A} |(T e_\alpha, f_\beta)|^2 = \sigma_2(T) < \infty .$$

(iv) T* *è un operatore di Hilbert-Schmidt e*

$$\sigma_2(T^*) = \sigma_2(T) .$$

(v) *Lo spettro dell'operatore* T*T *consiste dello zero più una successione* $(\lambda_n(T^*T))$ *di autovalori tali che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T^*T) = \sigma_2(T)^2 < \infty .$$

Naturalmente le uguaglianze in (ii)-(v) sono parte delle affermazioni, cosicché il Teorema 4 fornisce una varietà di metodi per calcolare la quantità $\sigma_2(T)$ (per la nozione di spettro di un operatore rimandiamo al §5). E' bene osservare che nella somma a secondo membro della (15) solo al più un numero numerabile di termini può essere diverso da 0.

Indichiamo con $\mathcal{S}_2$, per ragioni che saranno chiare in seguito, *l'insieme degli operatori di Hilbert-Schmidt su* H. Si riconosce che $\mathcal{S}_2$ è uno spazio di Hilbert per il prodotto scalare

(16) $$(S,T) \equiv \sum_{\alpha\in A}(S e_\alpha, T e_\alpha) \qquad \text{se } S,T \in \mathcal{S}_2,$$

ove $(e_\alpha : \alpha \in A)$ è un qualsiasi sistema ortonormale completo in H. Inoltre

(17) $$\sigma_2(T) = (T,T)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{e} \qquad \sigma_2(ST) \leq \sigma_2(S)\, \sigma_2(T),$$

il che mostra che $\mathcal{S}_2$ è un'algebra di Banach per la norma σ_2 .

Sia ora $\mathcal{L}(H,H)$ *l'insieme degli operatori limitati (o continui) su* H. E' ben noto che $\mathcal{L}(H,H)$ è uno spazio di Banach per la norma operatoriale

$$\| T \| = \sup \{ \|Tx\| : \|x\| \leq 1 \} .$$

Indicando con $\mathscr{F}(H,H)$ il sottospazio di $\mathscr{L}(H,H)$ degli operatori di rango finito, è facile verificare che sussiste il seguente

TEOREMA 5. (a) *$\mathscr{S}_2$ è un sottospazio lineare di $\mathscr{L}(H,H)$ contenente $\mathscr{F}(H,H)$.*

(b) $\|T\| \leq \sigma_2(T)$ *per* $T \in \mathscr{S}_2$.

(c) *Se* $R,T \in \mathscr{L}(H,H)$ *e* $S \in \mathscr{S}_2$, *allora* $RST \in \mathscr{S}_2$.

(d) $\mathscr{F}(H,H)$ *è denso in* $\mathscr{S}_2$ *per la norma* σ_2, *e dunque anche per la norma* $\| \; \|$.

Poiché $\mathscr{L}(H,H)$ è un'algebra di Banach, le proprietà (a) e (c) del Teorema 5 mostrano che $\mathscr{S}_2$ è un *ideale* (bilatero) nell'algebra $\mathscr{L}(H,H)$ contenente $\mathscr{F}(H,H)$ (vedi anche il paragrafo seguente).

Notiamo infine che il Teorema 4 è solo una generalizzazione apparente del Teorema 3 dal momento che ogni spazio di Hilbert è congruente (cioé unitariamente equivalente) ad uno spazio $L^2(X,\mu)$ per un opportuno spazio X dotato di misura positiva μ , e che per tale spazi si ha il seguente

TEOREMA 6. *Sia* $\mu\times\mu$ *la misura prodotto su* $X\times X$. *Un operatore* T *su* $L^2(X,\mu)$ *è di Hilbert-Schmidt se e solo se esiste* $k \in L^2(X\times X,\mu\times\mu)$ *tale che*

$$(Tx)(s) = \int_X k(s,t)x(t)d\mu(t), \qquad x\in L^2(X,\mu) .$$

La funzione k *è necessariamente unica ed inoltre*

$$\sigma_2(T) = \|k\|_{L^2(X\times X,\mu\times\mu)} .$$

Il Teorema 6 dunque non solo stabilisce una equivalenza (essenzialmente) tra i Teoremi 3 e 4, ma anche fornisce una prima risposta parziale al problema (P1) del §1.

Per le dimostrazioni dei Teoremi 4 e 5 vedi [9] (II pp. 1010-1013) o [27] (pp. 55-59) mentre il Teorema 6 è un esercizio in [9](II, p. 1083).

Osservazione - In questo paragrafo ci siano limitati a trattare operatori su uno spazio di Hilbert H, ma ciò non è in realtà una restrizione. Infatti, se è dato un operatore $T : H_1 \to H_2$ tra due spazi di Hilbert diversi, è sufficiente "ampliare" l'uno o l'altro in modo da ottenere due spazi della stessa "dimensione hilbertiana". Ma allora tali spazi sono congruenti, quindi possono essere identificati e si ricade nel caso precedente. Questo punto di vista verrà mantenuto in seguito ogni qual volta avremo a che fare esclusivamente con spazi di Hilbert.

4. Ideali di operatori

In questo paragrafo apriamo una parentesi e, anticipando idee che verranno formalizzate solo nell'ultima decade attraverso il lavoro di Pietsch negli anni '60 (cf.[50]), introduciamo la nozione astratta di ideale di operatori. Ciò ci sarà di grandissima utilità in seguito specialmente per quanto riguarda la terminologia e le notazioni.

Indichiamo con $\mathscr{L}$ *la classe di "tutti" gli operatori lineari limitati tra spazi di Banach* e con $\mathscr{L}(E,F)$ *l'insieme di tali operatori dallo spazio di Banach* E *allo spazio di Banach* F. Indichiamo inoltre con $\mathscr{F}$ *la sottoclasse di* $\mathscr{L}$ *costituita dagli operatori di rango finito.*

Per ogni sottoclasse $\mathscr{I}$ di $\mathscr{L}$ poniamo per definizione

$$\mathscr{I}(E,F) \equiv \mathscr{I} \cap \mathscr{L}(E,F).$$

La sottoclasse $\mathscr{I}$ sarà detta un *ideale di operatori* se si verificano le condizioni seguenti:

(I1) $\mathcal{F} \subset \mathcal{I}$.

(I2) *Se* $S,T \in \mathcal{I}(E,F)$, *allora* $S+T \in \mathcal{I}(E,F)$.

(I3) *Se* $S \in \mathcal{I}(E,F)$, $T \in \mathcal{L}(E_0,E)$ *e* $R \in \mathcal{L}(F,F_0)$, *allora* $RST \in \mathcal{I}(E_0,F_0)$.

Ovviamente $\mathcal{F}$ è il più piccolo ideale di operatori ($\mathcal{L}$ è il più grande ma non lo considereremo un ideale, essendo improprio).

Dato un ideale $\mathcal{I}$, gli insiemi $\mathcal{I}(E,F)$ si chiamano le *componenti* di $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}$ si dice *chiuso* se ogni componente $\mathcal{I}(E,F)$ è chiusa in $\mathcal{L}(E,F)$ per la norma operatoriale. Ovviamente $\mathcal{F}$ non è chiuso e come vedremo il problema di determinare la "chiusura" di $\mathcal{F}$ avrà un'importanza assolutamente determinante nello sviluppo della teoria.

Supponiamo che, dato un ideale $\mathcal{I}$, esista una funzione ν a valori reali tale che, dati comunque spazi di Banach E_0,E,F,F_0, si abbia:

(Q1) *Se* $x' \in E'$, $y \in F$ *e* $T : E \to F$ *è l'operatore definito da* $Tx = \langle x,x' \rangle y$ $(x \in E)$, *allora* $\nu(T) = \|x'\| \, \|y\|$.

(Q2) *Esiste una costante* $c \geq 1$, *che non dipende da* E *e* F, *tale che* $\nu(S+T) \leq c(\nu(S) + \nu(T))$ *per ogni coppia* $S,T \in \mathcal{I}(E,F)$.

(Q3) *Se* $R \in \mathcal{L}(F,F_0)$, $S \in \mathcal{I}(E,F)$ *e* $T \in \mathcal{L}(E_0,E)$, *allora* $\nu(RST) \leq \|R\| \nu(S) \|T\|$.

Si noti che queste condizioni implicano $\|T\| \leq \nu(T)$.

Diremo allora che ν è una *quasi-norma* per l'ideale $\mathcal{I}$ e che la coppia $(\mathcal{I},\nu)$ è un *ideale quasi-normato*. Tale ideale sarà poi detto *completo* se ciascuna componente $[\mathcal{I}(E,F),\nu]$ (che è chiaramente uno spazio lineare topologico metrizabile) è completa. Se poi in (Q2) è possibile scegliere $c=1$, allora ν è ovviamente una norma e in tal caso diremo che $(\mathcal{I},\nu)$ è un *ideale normato*.

Infine, chiameremo *ideale hilbertiano* una sottoclasse $\mathcal{I}$ della classe di tutti gli operatori lineari limitati tra spazi di Hilbert che verifichi le condizioni (I1)-(I3), ove naturalmente gli spazi che intervengono saranno ora tutti spazi di Hilbert. In generale, ometteremo il simbolo dello spazio e indicheremo pure con $\mathcal{I}$ le componenti $\mathcal{I}(H,H)$. Con riferimento al paragrafo precedente, possiamo allora enunciare il Teorema 5 al modo seguente:

TEOREMA 5' - $(\mathcal{S}_2,\sigma_2)$ *è un ideale hilbertiano normato e completo.*

5 - Operatori compatti, debolmente compatti e completamente continui.

Il concetto di operatore compatto (o completamente continuo) è essenzialmente dovuto a Hilbert [26], che lo usava per forme bilineari in ℓ^2. In termini di operatori, Hilbert richiede che l'operatore trasformi successioni debolmente convergenti in successioni fortemente convergenti, cioè convergenti in norma o, semplicemente, "convergenti". Ma fu F. Riesz (cf. [53]) nel 1918 a dare una definizione equivalente usando il concetto generale di compattezza introdotto da Fréchet e a chiamare *compatto* un operatore $T : E \to F$ tra spazi di Banach che trasformi insiemi limitati di E in insiemi relativamente compatti in F. Naturalmente tale definizione è equivalente a quella di Hilbert se E è riflessivo (e quindi per ℓ^2), perché allora ogni insieme limitato di E è relativamente debolmente compatto. In generale, chiameremo *completamente continuo* un operatore tra spazi di Banach che soddisfi la definizione di Hilbert. Infine, seguendo Kakutani [30] e Yosida [65], chiameremo *debolmente compatto* un operatore tra spazi di Banach che trasformi insiemi limitati in insiemi debolmente relativamente compatti. Tali operatori furono introdotti nel 1938 in collegamento con la teoria ergodica e un estesissimo studio di essi e degli operatori completamente continui fu poi compiuto da Grothendieck [20] nel 1953.

Indicando allora con $\mathcal{K}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ *le classi degli operatori compatti, completamente continui e debolmente compatti*, rispettivamente, possiamo riassumere le loro proprietà nel seguente:

TEOREMA 7 - $\mathcal{K}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ *sono ideali chiusi e* $\mathcal{K} \subset \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.

A questo va aggiunto il notevole

TEOREMA 8 - (a) $T \in \mathcal{K}$ *se e solo se* $T' \in \mathcal{K}$.

(b) $T \in \mathcal{W}$ *se e solo se* $T' \in \mathcal{W}$.

T' è naturalmente *l'operatore aggiunto* (o *duale*) dell'operatore T.

(a) è il classico risultato stabilito da Schauder [57] nel 1930 e (b) è stato dimostrato da Gantmacher [16] nel 1940.

Si noti che in generale non vi è nessuna relazione di inclusione tra gli ideali $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$. Infatti per due spazi di Banach E e F abbiamo che, se E è riflessivo, allora $\mathcal{V}(E,F) = \mathcal{K}(E,F)$ e $\mathcal{W}(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$ e dunque $\mathcal{V}(E,F) \subsetneq \mathcal{W}(E,F)$. D'altra parte, Grothendieck [20] ha mostrato che $\mathcal{K}[C(I),C(I)] \subsetneq \mathcal{W}[C(I),C(I)] = \mathcal{V}[C(I),C(I)]$, mentre $\mathcal{K}[L^1(I),L^1(I)] \subsetneq \mathcal{W}[L^1(I),L^1(I)] \subsetneq \mathcal{V}[L^1(I),L^1(I)]$.

Infine, vogliamo qui ricordare che il lavoro di Riesz ha portato a quella che oggi è conosciuta come la "teoria di Riesz-Schauder" degli operatori compatti. Richiamiamo che, dato un operatore lineare T (continuo o no) definito su un sottospazio di uno spazio di Banach complesso E e a valori in E, si dice *insieme risolvente* dell'operatore T l'insieme di tutti i numeri complessi λ per i quali l'operatore $(\lambda I-T)^{-1}$ esiste, è definito su tutto E ed è continuo (I denota l'identità di E). Tale insieme si indica con $\rho(T)$ e il suo complementare $\sigma(T)$ in $\mathbb{C}$ si chiama *spettro* dell'operatore T. Se $T \in \mathcal{L}(E,E)$, allora $\sigma(T)$ è un insieme compatto non vuoto e vale la *formula del raggio spettrale*:

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \|T\|,$$

dimostrata in generale da Gelfand [17] nel 1941. Ogni $\lambda \in \sigma(T)$ per il quale l'operatore $\lambda I-T$ non è iniettivo si dice *autovalore di* T ed ogni $x \in E$, $x \neq 0$ tale che $(\lambda I-T)x = 0$ è un *autovettore* di T corrispondente all'autovalore λ. Forse il più importante risultato della teoria di Riesz è espresso dal seguente

TEOREMA 9 - *Se* $T \in \mathscr{K}(E,E)$ *allora:*

(a) $0 \in \sigma(T)$ **e** $\sigma(T)$ *è un insieme al più numerabile.*

(b) *Ogni* $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ *è un autovalore ed un punto isolato di* $\sigma(T)$.

(c) *Se* $\sigma(T)$ *è numerabile, allora l'insieme* $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *può essere ordinato in una successione che converge a zero.*

(d) *Per ogni* $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ *la dimensione del sottospazio* $N(\lambda) = \{x \in E : (\lambda I - T)x = 0\}$ *è finita ed è chiamata la molteplicità geometrica di* λ.

(e) *Per ogni* $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ *esiste una proiezione* P_λ *tale che* $TP_\lambda = P_\lambda T$. *La dimensione del sottospazio* $P_\lambda(E)$ *è finita ed è chiamata la molteplicità algebrica di* λ.

6 - Il problema dell'approssimazione.

Durante gli anni '20 Banach frattanto intraprendeva uno studio sistematico degli spazi di Banach ottenendo una tale varietà di risultati di vastissima portata (cf. [1] e [2]) da far compiere all'Analisi Funzionale il più gran balzo in avanti dai tempi del lavoro pionieristico di Hilbert. In tale studio Banach si era accorto di quanto fosse importante, ai sensi della struttura dello spazio, il sapere se un dato spazio di Banach E avesse o meno una *base*. Con ciò si intende una successione $(x_n) \subset E$ tale che ogni elemento $x \in E$ abbia un'unica rappresentazione della forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n ,$$

ove (ξ_n) è una successione scalare e la serie converge nella norma di E. In corrispondenza ad una tale base esiste una unica successione (f_n) di funzionali lineari, che nel caso di uno spazio di Banach sono automaticamente continui, tali che

$$f_n(x_n) = 1 \quad \text{e} \quad f_n(x_k) = 0 \quad \text{per} \quad k \neq n,$$

cosicché possiamo scrivere

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)x_n \qquad \text{per ogni } x \in E.$$

Definiamo ora gli operatori $P_k : E \to E$ al modo seguente:

$$P_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)x_n \ .$$

E' chiaro che ciascun P_k è una proiezione continua e, poiché $P_k(x) \to x$ (per $k \to \infty$) per ogni $x \in E$, ne segue per il Teorema della Limitatezza Uniforme (Banach-Steinhaus) che $P_k \to I$ (= identità di E) uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di E. Se allora F è un altro spazio di Banach e $T \in \mathscr{K}(F,E)$ avremo che $P_kT \to T$ uniformemente su ogni insieme T(B) con B limitato in F, cioé $P_kT \to T$ in $\mathscr{L}(F,E)$ e quindi, poiché $P_kT \in \mathscr{F}(F,E)$ per ogni k, $T \in \bar{\mathscr{F}}(F,E)$ (la chiusura essendo presa in $\mathscr{L}(F,E)$). Dunque $\mathscr{K}(F,E) \subset \bar{\mathscr{F}}(F,E)$ il che, assieme al Teorema 7, ci permette di concludere che $\mathscr{K}(F,E) = \bar{\mathscr{F}}(F,E)$. Abbiamo così determinato la chiusura di $\mathscr{F}(F,E)$ se E ha una base. Ciò indusse Banach a porre il seguente problema:

(P5) *Esiste una base in ogni spazio di Banach separabile?*

Osserviamo che tutti gli spazi di Banach classici hanno una base. Per spazi di Banach classici si intendono i seguenti spazi (ove indichiamo una base tra parentesi): $\ell^p((e_n))$ $(1 \leq p < \infty)$, $c_o((e_n))$, C(I) (la base di Schauder), $L^p(I)$ (il sistema di Haar) $(1 \leq p < \infty)$, (cf. [38], vol. I, p.3).

Consideriamo adesso uno spazio di Hilbert H non separabile e sia $(e_\alpha : \alpha \in \mathbb{A})$ un sistema ortonormale completo in H. Si ha

$$x = \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} (x,e_\alpha)e_\alpha$$

per ogni $x \in H$ e dal momento che

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} |(x,e_\alpha)|^2 < \infty,$$

per ciascun x solo un numero al più numerabile di coefficienti (x,e_α) è diverso da zero. Dunque, se $\mathbb{F}$ è un sottoinsieme finito di $\mathbb{A}$ e $P_{\mathbb{F}}: H \to H$ è la proiezione ortogonale data da

$$P_{\mathbb{F}}(x) = \sum_{x\in\mathbb{F}}(x,e_\alpha)e_\alpha ,$$

allora $P_{\mathbb{F}}(x) \longrightarrow x$ al variare di $\mathbb{F}$ tra tutti i sottoinsiemi finiti di $\mathbb{A}$ e quindi, come prima, $P_{\mathbb{F}} \longrightarrow I$ uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di H. Ciò implica, come nel caso degli spazi di Banach con base, $\overline{\mathcal{K}} = \overline{\overline{\mathcal{F}}}$. Anticipando un po' i tempi, possiamo allora generalizzare il problema (P5) a tutti gli spazi di Banach (separabili o no) ponendo ilcosiddetto *problema dell'approssimazione di Banach-Grothendieck:*

(P6) *Dato uno spazio di Banach* E , *è possibile approssimare l'identità di* E *con operatori di rango finito uniformemente su ogni sottoinsieme compatto?*

Si dirà allora che E *ha la proprietà di approssimazione* se per E il problema (P6) ha risposta affermativa.

Come vedremo, il problema (P6) motiverà gran parte della teoria degli operatori, ma sarà risolto soltanto nel 1973.

7 - Operatori a traccia.

Riprendiamo adesso il problema della traccia discusso nel §2. Carlemann [4] dimostrò nel 1921 che, se T appartiene alla classe di Hilbert-Schmidt $\mathcal{S}_2$ (cf.§3), allora T^2 ha traccia e

$$\mathrm{tr}(T^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T)^2.$$

Purtroppo, ciò non assicura l'esistenza della traccia per T, come il seguente semplice esempio mostra. Sia $T : \ell^2 \to \ell^2$ l'operatore definito da $T(\xi_n) = (n^{-1}\xi_n)$ per ogni $(\xi_n) \in \ell^2$. Se (e_n) è la base ortonormale consueta di ℓ^2, allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T\, e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge e quindi $T \in \mathcal{S}_2(\ell^2,\ell^2)$. D'altra parte, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T\, e_n, e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} ,$$

che potremmo essere indotti ad usare per definire la traccia tr(T), diverge. Pertanto, la traccia non può essere così definita per ogni operatore $T \in \mathscr{S}_2$. Abbiamo però visto nel §3 che, se S e T sono operatori di Hilbert-Schmidt su uno spazio di Hilbert H qualsiasi con base ortonormale $(e_\alpha : \alpha \in A)$, allora la serie $\sum_{\alpha \in A}(Se_\alpha, Te_\alpha)$ converge assolutamente a un limite che non dipende dalla base (e_α) ed infatti, per la (16), tale limite è proprio il prodotto scalare (S,T). E' questa osservazione che, nel 1936, indusse von Neumann, con il contributo parziale di Murray (cf. [43]) a studiare il problema della traccia e a definire *la traccia di* R *e* S, con $R,S \in \mathscr{S}_2$, come la quantità

(18) $$tr(R,S) \equiv \sum_\alpha (Se_\alpha, R^* e_\alpha) .$$

Naturalmente ciò equivale a definire la traccia tr(T) per ogni operatore T della forma T = RS, con $R,S \in \mathscr{S}_2$, ciò che appunto permise a Murray e von Neumann di identificare in $\mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_2$ una classe di operatori su spazi di Hilbert per i quali la traccia può essere definita in accordo con i requisiti richiesti dai problemi (P2) e (P3) del §2, perché infatti si ha per la (16), (17), (18) e il Teorema 4 (iv),

(19) $$|tr(T)| = |tr(R,S)| = |(S,R^*)| \leq \sigma_2(S)\, \sigma_2(R^*) = \sigma_2(R)\, \sigma_2(S) .$$

In verità, Murray e von Neumann definirono *gli operatori a traccia* come quegli operatori T su uno spazio di Hilbert H che ammettono una rappresentazione del tipo

(20) $$T = \sum_{k=1}^{n} R_k S_k$$

con n un intero opportuno e $R_k, S_k \in \mathscr{S}_2(H,H)$. Ma è facile vedere che la classe $\mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_2$, ottenuta per composizione, è un ideale nel senso del §4 e quindi può sempre prendersi n=1 nella (20).

Conveniamo di porre $\mathscr{S}_1 \equiv \mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_2$, cioé di indicare con $\mathscr{S}_1$ l'ideale degli "operatori a traccia". Sussiste allora il seguente importante

TEOREMA 10 - *Se* $T \in \mathscr{S}_1(H,H)$, *allora esistono sistemi ortogonali* (e_n) *e* (f_n) *in* H *tali che*

$$Tx = \sum_n (x,e_n)f_n \qquad \textit{per ogni} \quad x \in H,$$

con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| \, \|e_n\| < \infty$$

e

$$tr(T) = \sum_{n=1}^{\infty}(f_n,e_n) \ ,$$

ove l'ultima somma non dipende dalla particolare rappresentazione di T.

Però, il problema (P4), cioé se la traccia di $T \in \mathscr{S}_1$ è uguale alla somma degli autovalori (e tale somma esiste per il risultato (10) di Lalesco e per il Teorema 5) dovrà rimanere senza risposta ancora per molto tempo, perché sfortunatamente il risultato di Carleman si applica solo a T^2 e non al prodotto $S\,T (S,T \in \mathscr{S}_2)$. La risposta è positiva, ma fu solo ottenuta nel 1959 da Lidskij [36] per mezzo di una dimostrazione sorprendentemente difficile (vedi anche [61], §3 o [9], II, pp. 1096-1105). In altre parole, vale l'uguaglianza

$$tr(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T) \qquad \text{per} \quad T \in \mathscr{S}_1! \tag{21}$$

8 - Teorema Spettrale, Algebra di Calkin e Classi di von Neumann

In uno spazio di Hilbert H, il Teorema 9 di F. Riesz può essere rafforzato nel senso che *ogni operatore compatto autoaggiunto su* H *ha un sistema di autovettori che formano una base ortonormale per* H. Ne segue il seguente notevolissimo *Teorema della Rappresentazione Spettrale* (cf. [27], pp: 52-55 o [28],§20.1):

TEOREMA 11 - *Ogni operatore* $T \in \mathcal{K}(H,H)$ *ha una rappresentazione del tipo*

$$(22) \qquad Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T)(x,e_n)f_n \qquad (x \in H),$$

ove (e_n), (f_n) *sono sistemi ortonormali (non necessariamente completi) in* H *e* $(a_n(T))$ *è una successione decrescente di numeri reali non negativi. Tale successione è inoltre unica, mentre i sistemi* (e_n) *e* (f_n) *sono "essenzialmente" unici.*

Tale teorema è conseguenza del fatto che l'operatore T^*T è autoaggiunto e compatto e pertanto ha una (unica) successione decrescente di autovalori non negativi $a_n(T)^2$. La mancanza di unicità per i sistemi (e_n) e (f_n) deriva dalla possibilità di autovalori non semplici di T^*T.

I numeri $a_n(T)$ sono detti *numeri caratteristici di* T ed hanno le proprietà dei numeri di approssimazione enunciate in Parte III, §1. La loro importanza risiede, oltre naturalmente che nel loro legame con i numeri di approssimazione, nel fatto che tali valori caratterizzano completamente, assieme ai sistemi (e_n) e (f_n), l'operatore T e pertanto per mezzo di essi è possibile dare una descrizione completa dell'algebra $\mathcal{L}(H,H)$ nel caso di uno spazio di Hilbert H separabile (cioé dell'algebra $\mathcal{L}(\ell^2,\ell^2)$), come dimostrato da Calkin [3] nel 1941.

Per tratteggiare brevemente i punti salienti della teoria di Calkin (per le dimostrazioni dei quali rimandiamo a [3] o a [61],§2) assumeremo da ora in poi che H sia uno spazio di Hilbert separabile, ciò essendo essenziale per la verità di quanto affermeremo. Inoltre, ometteremo per brevità il simbolo H.

Il primo passo nella teoria consiste nell'osservare che, *se* $\mathcal{I}$ *è un ideale in* $\mathcal{L}$ *contenente un operatore non compatto, allora* $\mathcal{I} = \mathcal{L}$. Ne segue che ogni ideale massimale $\mathcal{Y}$, essendo chiuso (e naturalmente proprio), deve essere contenuto in $\mathcal{K}$, per il Teorema 7 . D'altronde $\mathcal{Y} \supset \mathcal{F}$ e $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{K}$ (cf. §6) e pertanto deve risultare necessariamente $\mathcal{Y} = \mathcal{K}$. Se ne conclude che $\mathcal{K}$ *è l'unico ideale* *(proprio) chiuso di* $\mathcal{L}$ e che, pertanto, per ogni ideale $\mathcal{I} \subset \mathcal{L}$, risulta $\mathcal{F} \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{K}$ (dal momento che ogni ideale è contenuto in un ideale massimale). Possiamo a questo punto invocare il Teorema 11 e, fissata una base ortonormale (e_n) in H, formare lo spazio di successioni

(23) $\lambda(\mathcal{I}) = \{(\xi_n)$: se T è l'operatore definito da

$$Tx = \sum_n \xi_n(x,e_n)e_n \quad (x \in H), \text{ allora } T \in \mathcal{I}\} .$$

Per le proprietà (I1),(I2) e (I3) di un ideale, è chiaro che $\lambda(\mathcal{I})$ è uno spazio vettoriale di successioni contenente lo spazio ϕ delle successioni finite. Inoltre, si vede subito, per il Teorema 11 e il Teorema 9(c), che se $(\xi_n) \in \lambda(\mathcal{I})$, allora o (ξ_n) è una successione finita o $\xi_n \to 0$. In ogni caso $\lambda(\mathcal{I}) \subset c_0$. Inoltre, se $(\xi_n) \in \lambda(\mathcal{I})$ e π è una qualsiasi permutazione di $\mathbb{N}$, allora anche $(\xi_{\pi(n)}) \in \lambda(\mathcal{I})$.

Infine, segue facilmente dalla definizione di $\lambda(\mathcal{I})$ e dall'essere $\mathcal{I}$ un ideale che, se $(\xi_n) \in \lambda(\mathcal{I})$ e (η_n) è una successione tale che $|\eta_n| \leq |\xi_n|$, allora si ha pure $(\eta_n) \in \lambda(\mathcal{I})$. Tutto ciò ci induce a definire un *ideale di successioni* (o *spazio di Calkin*) come uno spazio vettoriale λ di successioni (complesse) verificante le seguenti proprietà:

(S1) $\phi \subset \lambda \subset c_0$.

(S2) *Se* $(\xi_n) \in \lambda$ *e* (η_n) *è tale che* $|\eta_n| \leq |\xi_n|$ *per ogni* n , *allora* $(\eta_n) \in \lambda$.

(S3) $(\xi_n) \in \lambda$, *implica* $(\xi_{\pi(n)}) \in \lambda$ *per ogni permutazione* π *di* $\mathbb{N}$.

Possiamo allora riassumere quanto sopra dicendo che $\lambda(\mathcal{I})$ è un ideale di successioni. Viceversa, dato uno spazio di successioni λ verificante (S1) e denotando con $\mathcal{I}(\lambda)$ l'insieme degli operatori T tali che $(a_n(T)) \in \lambda$, possiamo domandarci quando accade che $\mathcal{I}(\lambda)$ sia un ideale in $\mathcal{L}$. Che ciò si verifichi esattamente quando λ è un ideale di successioni è il punto centrale della teoria e può essere riassunto nel seguente teorema che stabilisce una corrispondenza biunivoca tra gli ideali di successioni e gli ideali propri di $\mathcal{L}$.

TEOREMA 12 - (a) *Se* $\mathscr{I}$ *è un ideale proprio in* $\mathscr{L}$, *allora* $\lambda(\mathscr{I})$ *è un ideale di successioni e* $\mathscr{I}[\lambda(\mathscr{I})] = \mathscr{I}$.

(b) *Se* λ *è un ideale di successioni, allora* $\mathscr{I}(\lambda)$ *è un ideale proprio in* $\mathscr{L}$ *e* $\lambda[\mathscr{I}(\lambda)] = \lambda$.

Naturalmente, gli spazi ϕ e c_0 corrispondono rispettivamente all'ideale minimo $\mathscr{F}$ e massimo $\mathscr{K}$, mentre ℓ^2 corrisponde a $\mathscr{S}_2$ per il Teorema 4(v) e ℓ^1 corrisponde all'ideale $\mathscr{S}_1$ degli operatori a traccia per il Teorema 10. Inoltre è evidente che $\mathscr{I}$ sarà un ideale normato o quasinormato con (quasi-) norma ν se e solo se $\mathscr{I} = \mathscr{I}(\lambda)$ con λ un ideale di successioni normato o quasi-normato con (quasi-) norma q, avendosi $\nu(T) = q\,[(a_n(T))]$.

A questo punto, essendo stata stabilita per mezzo del Teorema 12 l'importanza e maggiore trattabilità dei numeri caratteristici $a_n(T)$ di un operatore compatto T, viene naturale domandarsi quali siano le relazioni tra gli autovalori $\lambda_n(T)$ e gli $a_n(T)$, anche in connessione con il problema (P4) sulla traccia. Fu in questo senso che si mossero le ricerche di von Neumann e Schatten [44] negli anni 1946-48 e che portarono all'introduzione degli ideali $\mathscr{S}_p$. Questi non sono altro che gli ideali $\mathscr{I}(\ell^p)$ corrispondenti agli spazi ℓ^p per $0<p<\infty$ e $\mathscr{I}(c_0)$ per $p = \infty$, con quasi-norme

$$(24) \qquad \sigma_p(T) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(T)^p\right)^{1/p} \quad \text{e} \quad \sigma_\infty(T) = a_1(T) = \|T\| \qquad (T\in\mathscr{S}_p).$$

Pertanto $(\mathscr{S}_p, \sigma_p)$ è un ideale quasi-normato che è normato per $1 \leq p \leq \infty$. Rimandiamo a [28] (§20.2) per uno studio dettagliato delle classi $\mathscr{S}_p$. Qui ci limitiamo a osservare il seguente

TEOREMA 13 - *Supponiamo* $0 < p,\, q \leq \infty$.

(a) *Se* $p < q$, *allora* $\mathscr{S}_p \subset \mathscr{S}_q$ *e* $\sigma_q(T) \leq \sigma_p(T)$ *per* $T \in \mathscr{S}_p$.

(b) *Se* $S \in \mathscr{S}_p$ *e* $T \in \mathscr{S}_q$, *allora* $ST \in \mathscr{S}_r$ *con* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ *e* $\sigma_r(ST) \leq \sigma_p(S)\sigma_q(T)$.

Comunque, di tutte le relazioni tra $\lambda_n(T)$ e $a_n(T)$ quella fondamentale fu scoperta da Weyl [64] nel 1949 ed è la seguente, conosciuta come *la disuguaglianza di Weyl*:

(25) $$\prod_{n=1}^{k} |\lambda_n(T)| \leq \prod_{n=1}^{k} a_n(T) \qquad (T \in \mathscr{K})$$

ove gli autovalori $\lambda_n(T)$ sono ordinati secondo moduli non crescenti e contando le loro molteplicità algebriche. Dalla (24) e (25) segue allora

(26) $$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T)^p \leq \sigma_p(T)^p \qquad (T \in \mathscr{S}_p)$$

per tutti i p con $0 < p < \infty$, cioé $(\lambda_n(T)) \in \ell^p$ se $T \in \mathscr{S}_p$. Questo risultato ha molte conseguenze ed è una pietra miliare nella storia del problema (P4).

Concludiamo questo paragrafo con alcuni commenti sulle condizioni (S1),(S2) e (S3) e sugli ideali di successioni e con una osservazione sul caso di spazi di Hilbert non separabili.

In pratica, ogni spazio di successioni di un qualche interesse in Analisi deve perlomeno contenere ϕ (ciò d'altronde segue anche dalla (S2)). Uno spazio che soddisfi la (S2) si chiama *normale* ed uno che soddisfi la (S3) *simmetrico*. Gli spazi normali hanno grande importanza e utilità nella teoria degli spazi vettoriali topologici localmente convessi (cf. [32], §30), in quanto gli ideali di successioni sono basici per le varie generalizzazioni della nuclearità che sono state sviluppate recentemente (cf., per esempio, [8]).

Osservazione - Se H è uno spazio di Hilbert non separabile, denotiamo con $\dim H$ la sua dimensione hilbertiana, cioé la cardinalità di un sistema ortonormale e completo in H. Per ogni cardinale infinito $c \leq \dim H$, sia $\mathscr{I}_c(H,H)$

l'insieme degli operatori $T \in \mathscr{L}(H,H)$ tali che $\dim \overline{T(H)} < c$. Si riconosce facilmente che $\mathscr{I}_c(H,H)$ è un ideale in $\mathscr{L}(H,H)$ e che $\bar{\mathscr{I}}_c(H,H)$ è un ideale chiuso. Chiaramente, $\bar{\mathscr{I}}_c(H,H) \neq \mathscr{L}(H,H)$ perché l'identità I non appartiene a $\bar{\mathscr{I}}_c(H,H)$. Inoltre, $\bar{\mathscr{I}}_c(H,H) \supset \mathscr{K}(H,H)$, quest'ultimo essendo contenuto nell'ideale corrispondente alla cardinalità del numerabile. Se quindi dim H non è numerabile, esisteranno in $\mathscr{L}(H,H)$ degli ideali chiusi $\bar{\mathscr{I}}_c(H,H)$ contenenti propriamente $\mathscr{K}(H,H)$, dal momento che vi saranno in $\mathscr{L}(H,H)$ operatori T non compatti, ma tali che $\dim \overline{T(H)}$ sia separabile (per esempio, proiezioni). Gli ideali $\bar{\mathscr{I}}_c(H,H)$ sono tutti e soli gli ideali chiusi di $\mathscr{L}(H,H)$. Naturalmente se c non è numerabile nessun ideale $\mathscr{I}_c$ sarà proprio in $\mathscr{L}$, dato che $I \in \mathscr{I}_c$ se I è l'identità di uno spazio di Hilbert H con $\dim H < c$. Per i dettagli, vedi [18], [39] o [50] (§5.4).