I N T R O D U Z I O N E

Questo articolo è una versione notevolmente estesa e accresciuta, essenzialmente dovuta al secondo autore, di un ciclo di conferenze tenute dal primo autore presso il Seminario di Analisi dell'Università di Lecce nel febbraio 1982.

Le conferenze sono state apposta disegnate per essere accessibili a coloro i quali, pur non essendo cultori della materia, hanno una modesta conoscenza dei principi elementari dell'Analisi Funzionale, e perfino a (buoni) studenti del secondo biennio di Matematica. In questa ottica, l'esposizione inizia con una rapida panoramica sulla nascita della teoria degli operatori tra spazi di Banach e sua evoluzione fino all'avvento di Grothendieck, per soffermarsi poi in maggiore dettaglio sul fondamentale lavoro di Grothendieck e sul successivo sviluppo della teoria, dovuto in larga misura a Pietsch, fino al suo stato attuale.

A causa della mole del materiale, gli autori si sono dovuti necessariamente limitare a presentare gli enunciati più rilevanti e a dare solo le dimostrazioni più semplici, sacrificando quindi la completezza alla compattezza e rinviando al fondamentale trattato di Pietsch [50] il lettore desideroso di intraprendere uno studio serio e approfondito dell'argomento.

I - LA TEORIA CLASSICA.

Introduzione

Lo scopo di questa prima parte è di tratteggiare brevemente lo sviluppo della teoria classica degli operatori, cioé di quella parte della teoria degli operatori che precede l'avvento di Grothendieck. Così, dalla nascita della teoria agli inizi del secolo ad opera di Fredholm, che non a caso coincide con la nascita dell'Analisi Funzionale, si procede, attraverso i lavori di Hilbert, Schmidt, Lebesgue e Fréchet, verso una formulazione precisa di una "teoria" degli operatori che si concretizza nei lavori di F. Riesz e, soprattutto, Banach. Emergono così gli operatori "classici", cioé gli operatori di Hilbert-Schmidt, compatti, debolmente compatti e completamente continui. I principi motori della teoria, oltre naturalmente al principio primario di "risolvere equazioni", sono chiaramente individuati nel *problema della traccia* e nel (più recente) *problema dell'approssimazione* di Banach, fino a giungere, attraverso l'algebra di Calkin, ad erigere lo scenario nel quale si svilupperà poi la teoria moderna degli operatori, basata sul lavoro di Grothendieck e sull'uso sistematico del concetto di "ideale" da parte di Pietsch.

Il lettore potrà consultare i trattati [7] e [9] per gli argomenti esposti in questa prima parte.

1 - Nascita dell'Analisi Funzionale.

Sebbene i processi di derivazione e integrazione possano essere considerati come operazioni definite su classi di funzioni, fino alla fine del secolo scorso questo punto di vista venne usato essenzialmente solo per convenienza di notazione. Ricordiamo che fu Pincherle (cf. [52], vol. I, p.92-141), nel 1886, il primo matematico a insistere sul fatto che una funzione dovrebbe essere considerata come un "punto" in un qualche insieme e ad usare una notazione operatoriale per l'applicazione che associa, ad un funzione olomorfa ϕ, la funzione

$$s \to \int_{\Gamma} A(s,t)\phi(t)dt \quad ,$$

ove Γ è una curva nel dominio di olomorfia di ϕ e la funzione A è olomorfa. Questo primo accenno all'Analisi Funzionale fu immediatamente perseguito da Volterra nel 1887 (cf. [63], vol. I, p. 294-314)) con le sue "funzioni di linee", arrivando poi, nel 1896 (cf. [63], vol. II, p. 216-262) al concetto generale di ciò che Hilbert chiamerà in seguito "equazione integrale del secondo tipo",

$$\phi(t) - \int_a^t S_0(s,t)\phi(s)ds = f(t) \quad ,$$

nella funzione incognita ϕ (cf. anche [62]).

Fu però con l'inizio del secolo che incominciò a svilupparsi nell'Analisi quella tendenza astratta che si è poi evoluta in quella che oggi è conosciuta come l'Analisi Funzionale. Infatti, tra il 1900 e il 1910 si verificò una improvvisa cristallizzazione di tutte le idee e metodi che si erano accumulati nell'Analisi durante il XIX secolo. Questo fu dovuto essenzialmente alla pubblicazione di quattro lavori fondamentali:

(i) L'articolo di Fredholm [15] del 1903 sulle equazioni integrali;
(ii) La tesi di Lebesgue [35] del 1904 sull'integrazione;
(iii) L'articolo di Hilbert [26] del 1906 sulla teoria spettrale;

(iv) La tesi di Fréchet [13] del 1906 sugli spazi metrici.

L'articolo di Fredholm, ispirato dal lavoro di Volterra, inizia la teoria delle equazioni integrali e può essere considerato come la sorgente di tutti i successivi sviluppi della teoria spettrale. Il suo effetto sul mondo matematico fu profondo e, d'improvviso, la teoria delle equazioni integrali divenne uno tra gli argomenti favoriti degli analisti. Uno dei più attivi assertori della nuova teoria fu David Hilbert che, tra il 1904 e il 1906, pubblicò sei lavori sulle equazioni integrali tra i quali spicca il lavoro [26] che può essere considerato il primo articolo scritto in Analisi Funzionale. In esso Hilbert addirittura abbandona il punto di vista delle equazioni integrali per ritornare al concetto dei sistemi infiniti di equazioni lineari, comprendendo che le prime possono essere considerate come casi speciali dei secondi. Ed è proprio in questo studio che Hilbert comincia a gettare le basi della teoria degli spazi di Hilbert e di quegli operatori che saranno poi detti *operatori di Hilbert-Schmidt*.

Allo stesso tempo Fréchet, nella sua famosa tesi, introduceva in Analisi il concetto di *struttura*, definendo assiomaticamente gli *spazi metrici* e facendo così confluire insieme Geometria, Topologia e Analisi. Ciò è rafforzato anche dalla grande enfasi posta da Fréchet su tre nozioni assolutamente fondamentali, cioé *compattezza, completezza* e *separabilità*, aprendo così la possibilità di trasferire la geometria euclidea in dimensione infinita. Ed infatti, questo è proprio ciò che viene realizzato dallo stesso Fréchet [14] e da Schmidt [58] nel 1908. Nell'articolo di Schmidt troviamo la definizione dello spazio ℓ^2, con le nozioni di prodotto scalare, norma, ortogonalità, insiemi chiusi e sottospazi vettoriali.

Questo punto di vista geometrico era già stato adottato nel 1906-1907 da Fischer [12] e F. Riesz [54] (vol. I, p. 378-395) che, indipendentemente, erano arrivati a quello che è oggi conosciuto come il *teorema di Fischer-Riesz* e che stabilì un legame fino ad allora insospettato tra la teoria degli spazi di Hilbert e la teoria dell'integrazione. Quest'ultima, da Cauchy a Jordan e Peano, si era evoluta in maniera completamente indipendente dalla teoria spettrale ed è molto probabile che lo sviluppo dell'Analisi Funzionale sarebbe stato considerevolmente ritardato se l'integrale di Lebesgue [35] non fosse fortunatamente apparso sulla scena esattamente all'inizio del lavoro di Hilbert sulle equazioni integrali. Con l'aiuto di questo formidabile strumento, Fischer e F. Riesz potevano definire lo spazio $L^2(I)$ su un intervallo compatto $I \subset \mathbb{R}$, che da ora in poi possiamo supporre, per comodità, essere l'intervallo $[0,1]$, e dimostrare l'isomorfismo tra $L^2(I)$ e ℓ^2 associando ad ogni "funzione" $f \in L^2(I)$ la successione (ξ_n) dei suoi coefficienti di Fourier rispetto ad un sistema ortonormale e completo. Ne conseguiva immediatamente che i risultati di Fredholm e Schmidt si potevano applicare senza alcun cambiamento ad operatori "integrali"

$$(1) \qquad (Tf)(s) = \int_I k(s,t)f(t)dt$$

con *nucleo* $k(s,t) \in L^2(I \times I)$.

Ma la conseguenza più importante del teorema di Fischer-Riesz fu che aprì la strada alla definizione degli spazi L^p, dovuta a F. Riesz nel 1910 [54] (vol. I, p. 403 e pp. 441-497), e alla teoria generale degli spazi normati intrapresa da Helly nel 1921 [25] e formalizzata da Banach nella sua fondamentale monografia [2].

Sin dai tempi di Hilbert e Riesz si era notato che gli operatori integrali definiti dalla (1) per mezzo di una "funzione nucleo" non esaurivano certo il concetto generale di operatore lineare, dal momento che nemmeno l'identità poteva essere espressa in tal modo. Nasce così il problema seguente:

(P1) *Determinare quali operatori* T *possono essere rappresentati da una formula del tipo* (1).

Tale problema dovrà attendere fino al 1950 per avere una risposta soddisfacente ! (cf. [60]).

2 - Il problema della traccia.

L'articolo di Fredholm già citato nel § 1 ebbe il merito di avviare Hilbert e la sua scuola sulla strada degli spazi di Hilbert e degli operatori di Hilbert-Schmidt. Si dà il caso che tali nozioni siano strettamente collegate ad un altro problema di fondamentale importanza. Per formulare tale problema ricordiamo che, se $A = ((a_{ij}))$ è una matrice $n \times n$, si definisce *polinomio caratteristico* di A il polinomio

$$p(\lambda) \equiv \det(\lambda I - A) \equiv \lambda^n - t_1\lambda^{n-1} + \dots + t_n \tag{2}$$

e *traccia* di A il numero

$$\operatorname{tr}(A) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \,. \tag{3}$$

Già nel 1840 Cauchy [5] aveva dimostrato che

$$t_1 = \operatorname{tr}(A) \,,$$

il che implica, essendo ovviamente t_1 la somma degli zeri del polinomio $p(\lambda)$ in (2), l'uguaglianza fondamentale

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) \tag{4}$$

ove le quantità $\lambda_i(A)$ sono gli autovalori di A contati secondo la loro molteplicità algebriche. L'espressione a secondo membro della (4) è comunemente chiamata la *traccia spettrale* di A. Pertanto, nel contesto delle matrici, è evidente che la traccia (definita dalla (3)) è lineare, essendo la somma degli elementi diagonali, e coincide con la traccia spettrale.

Denotiamo ora con $\mathbb{C}^n$ lo spazio euclideo complesso ad n dimensioni e sia T un operatore in $\mathbb{C}^n$. Se $(x_1,\dots,x_n)$ è una base per $\mathbb{C}^n$ e $Tx_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ $(i=1,\dots,n)$, la matrice $A = ((a_{ij}))$ si chiama una *rappresentazione* di T e, da quanto detto sopra, è facile dimostrare (cf. [9], II, pp. 1016-1017) il seguente

TEOREMA 1 - (a) *La quantità* tr(A) *non dipende dalla rappresentazione* A *di* T *e quindi definisce la traccia* tr(T) *dell'operatore* T.

(b) $tr(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(T)$, *ove i* $\lambda_i(T)$ *sono gli autovalori di* T *contati secondo le loro molteplicità algebriche.*

(c) tr(T) = 0 *se* T *è un operatore nilpotente.*

(d) tr(TS) = tr(ST) *se* S *e* T *sono due operatori su* $\mathbb{C}^n$.

Il problema 1 richiede le seguenti osservazioni.

Osservazione 1 - (a) motiva la definizione di *traccia funzionale* per la traccia di un operatore definita per mezzo della (3) poiché mostra che tale traccia è un funzionale lineare in T. Per semplicità, noi continueremo a usare il termine "traccia" per la traccia funzionale.

Osservazione 2 - (b) mostra che *la traccia di un operatore coincide con la sua traccia spettrale*. Questo semplice fatto, insieme all'Osservazione 1, è stato tenuto presente da grandi (e non tanto grandi) matematici sin dal tempo di Cauchy ed ha contribuito a delineare l'evoluzione dell'Analisi Funzionale moderna.

Osservazione 3 - (c) è un'ovvia conseguenza di (b) ma, come vedremo più tardi, le cose andranno orribilmente storte in un contesto più generale.

Il Teorema 1 si estende immediatamente a operatori di rango finito da spazi lineari in dualità $\langle E,E'\rangle$ a uno spazio lineare F. Infatti, se $x' \in E'$ e $y \in F$, si ottiene un operatore T di rango 1 ponendo

$$Tx = \langle x,x'\rangle y , \qquad x \in E.$$

Ne segue che ogni operatore T di rango finito è dato da un'espressione del tipo

$$(5)\qquad Tx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i' \rangle y_i, \qquad x \in E,$$

ove $x_i' \in E'$ e $y_i \in F$ $(i = 1,\dots,n)$. Se $F = E$, il numero

$$(6)\qquad tr(T) = \sum_{i=1}^{n} \langle y_i, x_i' \rangle$$

non dipende dalla rappresentazione finita di T: ciò è ovvio per $n=1$ e si estende al caso generale per linearità. Pertanto, denotando con $\mathscr{F}(E,E)$ *l'insieme degli operatori di rango finito su* E, abbiamo che la traccia (6) (che è ovviamente la stessa del Teorema 1(a)) è un funzionale lineare su $\mathscr{F}(E,E)$. E' naturale allora porsi il seguente problema:

(P2) *Quali topologie si possono considerare su* $\mathscr{F}(E,E)$ *per le quali la traccia risulti continua, e quindi si estenda ad un funzionale lineare e continuo sul completamento di* $\mathscr{F}(E,E)$ *rispetto a tali topologie?*

Questa domanda innocente segna il corso della storia!

Nel 1909 I. Schur [59] dimostrò il seguente

TEOREMA 2 - *Se* $A = ((a_{ij}))$ *è una matrice* $n \times n$, *si ha:*

$$(7)\qquad \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)|^2 \leq \sum_{i,j}^{1,n} |a_{ij}|^2 .$$

In vista dell'importanza che assumerà in seguito il secondo membro della (7), conveniamo di porre

$$(8)\qquad \sigma_2(A) \equiv \Big(\sum_{i,j}^{1,n} |a_{ij}|^2\Big)^{\frac{1}{2}} .$$

Allora, se A e B sono due matrici nxn, Lalesco [34] nel 1914 mostrò che

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(AB)| \leq \sigma_2(A)\ \sigma_2(B) \ .$$

Ne segue che, se H è uno spazio di Hilbert e T = AB con $A,B \in \mathscr{F}(H,H)$ si ha

$$(10) \qquad |tr(T)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i(AB)| \leq \sigma_2(A)\sigma_2(B)$$

Lo scenario adesso è predisposto e le questioni fondamentali sono:

(P3) *Quali operatori su uno spazio di* Hilbert *hanno una traccia?*

(P4) *Quando la traccia di un operatore è la somma degli autovalori?*

3 - Operatori di Hilbert-Schmidt

Già i lavori di Hilbert e Schmidt contenevano le idee espresse nel seguente

TEOREMA 3 - *Sia* T *l'operatore su* $L^2(I)$ *definito dalla* (1) *con nucleo* $k(s,t) \in L^2(I\times I)$ *e tale che* $k(s,t) = k(t,s)$. *Allora:*

(a) T *ha una successione* $(\lambda_n(T))$ *di autovalori reali tali che*

$$(11) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T)^2 = \int_{I\times I} |k(s,t)|^2 ds\ dt \ .$$

(b) Ogni $\lambda_n(T) \neq 0$ *ha molteplicità finita e* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(T) = 0$ *se la successione* $(\lambda_n(T))$ *è infinita.*

(c) *Per ogni autovalore* $\lambda_n(T)$, *contato secondo la sua molteplicità, esiste una autofunzione* ϕ_n *di* T *tale che*

(12) $$\int_I \phi_n(t)\, \phi_m(t)\, dt = 0 \qquad \text{per } m \neq n.$$

(d) *Per ogni coppia di funzioni* $x, y \in L^2(I)$ *risulta*

(13) $$\int_{I\times I} k(s,t)x(s)\overline{y(t)}dsdt = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T) \int_I x(t)\overline{\phi_n(t)}dt \int_I \phi_n(t)\overline{y(t)}dt.$$

Applicando allora la (11), (12) e (13) si ottiene

(14) $$\sum_{n,m}^{1,\infty} |(T\phi_n, \phi_m)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T\phi_n\|^2 < \infty,$$

non solo, ma si riconosce poi che il valore comune di tali serie è indipendente dal sistema ortogonale completo (ϕ_n) scelto in $L^2(I)$, ciò che induce a dare le seguente definizione: un operatore T su uno spazio di Hilbert H è detto *operatore di Hilbert-Schmidt* se esiste un sistema ortonormale completo $(e_\alpha : \alpha \in A)$ in H tale che

(15) $$\sigma_2(T) \equiv \Big(\sum_{\alpha \in A} \|Te_\alpha\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty .$$

Sussistono allora le seguenti caratterizzazioni, nelle quali indichiamo con T^* *l'operatore aggiunto*, nel senso della teoria degli spazi di Hilbert, dell'operatore T. (Si noti che un operatore di Hilbert-Schmidt è necessariamente limitato, come conseguenza immediata della definizione, e pertanto l'operatore aggiunto esiste ed è anche esso limitato).

TEOREMA 4. *Sia* T *un operatore su uno spazio di Hilbert* H. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) T *è un operatore di Hilbert-Schmidt.*

(ii) *Per ogni sistema ortonormale completo* $(e_\alpha : \alpha \in A)$ *in* H *si ha:*

$$\sum_{\alpha \in A} \|Te_\alpha\|^2 = \sigma_2(T)^2 < \infty$$

(iii) *Per due (risp. per ogni coppia di) sistemi ortonormali completi* $(e_\alpha : \alpha \in A)$ *e* $(f_\alpha : \alpha \in A)$ *in* H *si ha*

$$\sum_{\alpha \in A} \sum_{\beta \in A} |(T e_\alpha, f_\beta)|^2 = \sigma_2(T) < \infty .$$

(iv) T^* *è un operatore di Hilbert-Schmidt e*

$$\sigma_2(T^*) = \sigma_2(T) .$$

(v) *Lo spettro dell'operatore* T^*T *consiste dello zero più una successione* $(\lambda_n(T^*T))$ *di autovalori tali che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T^*T) = \sigma_2(T)^2 < \infty .$$

Naturalmente le uguaglianze in (ii)-(v) sono parte delle affermazioni, cosicché il Teorema 4 fornisce una varietà di metodi per calcolare la quantità $\sigma_2(T)$ (per la nozione di spettro di un operatore rimandiamo al §5). E' bene osservare che nella somma a secondo membro della (15) solo al più un numero numerabile di termini può essere diverso da 0.

Indichiamo con $\mathscr{S}_2$, per ragioni che saranno chiare in seguito, *l'insieme degli operatori di Hilbert-Schmidt su* H. Si riconosce che $\mathscr{S}_2$ è uno spazio di Hilbert per il prodotto scalare

(16) $$(S,T) \equiv \sum_{\alpha \in A} (S e_\alpha, T e_\alpha) \qquad \text{se } S,T \in \mathscr{S}_2,$$

ove $(e_\alpha : \alpha \in A)$ è un qualsiasi sistema ortonormale completo in H. Inoltre

(17) $$\sigma_2(T) = (T,T)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \sigma_2(ST) \leq \sigma_2(S)\, \sigma_2(T),$$

il che mostra che $\mathscr{S}_2$ è un'algebra di Banach per la norma σ_2 .

Sia ora $\mathscr{L}(H,H)$ *l'insieme degli operatori limitati (o continui) su* H. E' ben noto che $\mathscr{L}(H,H)$ è uno spazio di Banach per la norma operatoriale

$$\| T \| = \sup \{ \|Tx\| : \|x\| \leq 1\} .$$

Indicando con $\mathscr{F}(H,H)$ il sottospazio di $\mathscr{L}(H,H)$ degli operatori di rango finito, è facile verificare che sussiste il seguente

TEOREMA 5. (a) $\mathscr{S}_2$ *è un sottospazio lineare di* $\mathscr{L}(H,H)$ *contenente* $\mathscr{F}(H,H)$.

(b) $\|T\| \leq \sigma_2(T)$ *per* $T \in \mathscr{S}_2$.

(c) *Se* $R,T \in \mathscr{L}(H,H)$ *e* $S \in \mathscr{S}_2$, *allora* $RST \in \mathscr{S}_2$.

(d) $\mathscr{F}(H,H)$ *è denso in* $\mathscr{S}_2$ *per la norma* σ_2, *e dunque anche per la norma* $\| \ \|$.

Poiché $\mathscr{L}(H,H)$ è un'algebra di Banach, le proprietà (a) e (c) del Teorema 5 mostrano che $\mathscr{S}_2$ è un *ideale* (bilatero) nell'algebra $\mathscr{L}(H,H)$ contenente $\mathscr{F}(H,H)$ (vedi anche il paragrafo seguente).

Notiamo infine che il Teorema 4 è solo una generalizzazione apparente del Teorema 3 dal momento che ogni spazio di Hilbert è congruente (cioé unitariamente equivalente) ad uno spazio $L^2(X,\mu)$ per un opportuno spazio X dotato di misura positiva μ , e che per tale spazi si ha il seguente

TEOREMA 6. *Sia* $\mu\times\mu$ *la misura prodotto su* $X\times X$. *Un operatore* T *su* $L^2(X,\mu)$ *è di Hilbert-Schmidt se e solo se esiste* $k \in L^2(X\times X,\mu\times\mu)$ *tale che*

$$(Tx)(s) = \int_X k(s,t)x(t)d\mu(t), \qquad x \in L^2(X,\mu) .$$

La funzione k *è necessariamente unica ed inoltre*

$$\sigma_2(T) = \|k\|_{L^2(X\times X,\mu\times\mu)} .$$

Il Teorema 6 dunque non solo stabilisce una equivalenza (essenzialmente) tra i Teoremi 3 e 4, ma anche fornisce una prima risposta parziale al problema (P1) del §1.

Per le dimostrazioni dei Teoremi 4 e 5 vedi [9] (II pp. 1010-1013) o [27] (pp. 55-59) mentre il Teorema 6 è un esercizio in [9](II, p. 1083).

Osservazione - In questo paragrafo ci siano limitati a trattare operatori su uno spazio di Hilbert H, ma ciò non è in realtà una restrizione. Infatti, se è dato un operatore $T : H_1 \to H_2$ tra due spazi di Hilbert diversi, è sufficiente "ampliare" l'uno o l'altro in modo da ottenere due spazi della stessa "dimensione hilbertiana". Ma allora tali spazi sono congruenti, quindi possono essere identificati e si ricade nel caso precedente. Questo punto di vista verrà mantenuto in seguito ogni qual volta avremo a che fare esclusivamente con spazi di Hilbert.

4. Ideali di operatori

In questo paragrafo apriamo una parentesi e, anticipando idee che verranno formalizzate solo nell'ultima decade attraverso il lavoro di Pietsch negli anni '60 (cf. [50]), introduciamo la nozione astratta di ideale di operatori. Ciò ci sarà di grandissima utilità in seguito specialmente per quanto riguarda la terminologia e le notazioni.

Indichiamo con $\mathscr{L}$ *la classe di "tutti" gli operatori lineari limitati tra spazi di Banach* e con $\mathscr{L}(E,F)$ *l'insieme di tali operatori dallo spazio di Banach* E *allo spazio di Banach* F. Indichiamo inoltre con $\mathscr{F}$ *la sottoclasse di* $\mathscr{L}$ *costituita dagli operatori di rango finito.*

Per ogni sottoclasse $\mathscr{I}$ di $\mathscr{L}$ poniamo per definizione

$$\mathscr{I}(E,F) \equiv \mathscr{I} \cap \mathscr{L}(E,F).$$

La sottoclasse $\mathscr{I}$ sarà detta un *ideale di operatori* se si verificano le condizioni seguenti:

(I1) $\mathscr{F} \subset \mathscr{I}$.

(I2) *Se* $S,T \in \mathscr{I}(E,F)$, *allora* $S+T\in\mathscr{I}(E,F)$.

(I3) *Se* $S\in\mathscr{I}(E,F)$, $T\in\mathscr{L}(E_0,E)$ *e* $R\in\mathscr{L}(F,F_0)$, *allora* $RST\in\mathscr{I}(E_0,F_0)$.

Ovviamente $\mathscr{F}$ è il più piccolo ideale di operatori ($\mathscr{L}$ è il più grande ma non lo considereremo un ideale, essendo improprio).

Dato un ideale $\mathscr{I}$, gli insiemi $\mathscr{I}(E,F)$ si chiamano le *componenti* di $\mathscr{I}$ e $\mathscr{I}$ si dice *chiuso* se ogni componente $\mathscr{I}(E,F)$ è chiusa in $\mathscr{L}(E,F)$ per la norma operatoriale. Ovviamente $\mathscr{F}$ non è chiuso e come vedremo il problema di determinare la "chiusura" di $\mathscr{F}$ avrà un'importanza assolutamente determinante nello sviluppo della teoria.

Supponiamo che, dato un ideale $\mathscr{I}$, esista una funzione ν a valori reali tale che, dati comunque spazi di Banach E_0,E,F,F_0, si abbia:

(Q1) *Se* $x'\in E'$, $y\in F$ *e* $T : E \to F$ *è l'operatore definito da* $Tx = \langle x,x'\rangle y$ $(x \in E)$, *allora* $\nu(T) = \|x'\| \, \|y\|$.

(Q2) *Esiste una costante* $c \geq 1$, *che non dipende da* E *e* F, *tale che* $\nu(S+T) \leq c(\nu(S) + \nu(T))$ *per ogni coppia* $S,T \in\mathscr{I}(E,F)$.

(Q3) *Se* $R\in\mathscr{L}(F,F_0)$, $S \in\mathscr{I}(E,F)$ *e* $T \in\mathscr{L}(E_0,E)$, *allora* $\nu(RST) \leq \|R\|\nu(S)\|T\|$.

Si noti che queste condizioni implicano $\|T\| \leq \nu(T)$.

Diremo allora che ν è una *quasi-norma* per l'ideale $\mathscr{I}$ e che la coppia $(\mathscr{I},\nu)$ è un *ideale quasi-normato*. Tale ideale sarà poi detto *completo* se ciascuna componente $[\mathscr{I}(E,F),\nu]$ (che è chiaramente uno spazio lineare topologico metrizabile) è completa. Se poi in (Q2) è possibile scegliere $c=1$, allora ν è ovviamente una norma e in tal caso diremo che $(\mathscr{I},\nu)$ è un *ideale normato*.

Infine, chiameremo *ideale hilbertiano* una sottoclasse $\mathscr{I}$ della classe di tutti gli operatori lineari limitati tra spazi di Hilbert che verifichi le condizioni (I1)-(I3), ove naturalmente gli spazi che intervengono saranno ora tutti spazi di Hilbert. In generale, ometteremo il simbolo dello spazio e indicheremo pure con $\mathcal{I}$ le componenti $\mathcal{I}(H,H)$. Con riferimento al paragrafo precedente, possiamo allora enunciare il Teorema 5 al modo seguente:

TEOREMA 5' - $(\mathcal{S}_2,\sigma_2)$ *è un ideale hilbertiano normato e completo.*

5 - Operatori compatti, debolmente compatti e completamente continui.

Il concetto di operatore compatto (o completamente continuo) è essenzialmente dovuto a Hilbert [26], che lo usava per forme bilineari in ℓ^2. In termini di operatori, Hilbert richiede che l'operatore trasformi successioni debolmente convergenti in successioni fortemente convergenti, cioè convergenti in norma o, semplicemente, "convergenti". Ma fu F. Riesz (cf. [53]) nel 1918 a dare una definizione equivalente usando il concetto generale di compattezza introdotto da Fréchet e a chiamare *compatto* un operatore $T : E \to F$ tra spazi di Banach che trasformi insiemi limitati di E in insiemi relativamente compatti in F. Naturalmente tale definizione è equivalente a quella di Hilbert se E è riflessivo (e quindi per ℓ^2), perché allora ogni insieme limitato di E è relativamente debolmente compatto. In generale, chiameremo *completamente continuo* un operatore tra spazi di Banach che soddisfi la definizione di Hilbert. Infine, seguendo Kakutani [30] e Yosida [65], chiameremo *debolmente compatto* un operatore tra spazi di Banach che trasformi insiemi limitati in insiemi debolmente relativamente compatti. Tali operatori furono introdotti nel 1938 in collegamento con la teoria ergodica e un estesissimo studio di essi e degli operatori completamente continui fu poi compiuto da Grothendieck [20] nel 1953.

Indicando allora con $\mathcal{K}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ *le classi degli operatori compatti, completamente continui e debolmente compatti*, rispettivamente, possiamo riassumere le loro proprietà nel seguente:

TEOREMA 7 - $\mathcal{K}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ *sono ideali chiusi e* $\mathcal{K} \subset \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.

A questo va aggiunto il notevole

TEOREMA 8 - (a) $T\in\mathcal{K}$ *se e solo se* $T'\in\mathcal{K}$.

(b) $T\in\mathcal{W}$ *se e solo se* $T'\in\mathcal{W}$.

T' è naturalmente *l'operatore aggiunto* (o *duale*) dell'operatore T.

(a) è il classico risultato stabilito da Schauder [57] nel 1930 e (b) è stato dimostrato da Gantmacher [16] nel 1940.

Si noti che in generale non vi è nessuna relazione di inclusione tra gli ideali $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$. Infatti per due spazi di Banach E e F abbiamo che, se E è riflessivo, allora $\mathcal{V}(E,F) = \mathcal{K}(E,F)$ e $\mathcal{W}(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$ e dunque $\mathcal{V}(E,F) \subsetneqq \mathcal{W}(E,F)$. D'altra parte, Grothendieck [20] ha mostrato che $\mathcal{K}[C(I),C(I)] \subsetneqq \mathcal{W}[C(I),C(I)] = \mathcal{V}[C(I),C(I)]$, mentre $\mathcal{K}[L^1(I),L^1(I)] \subsetneqq \mathcal{W}[L^1(I),L^1(I)] \subsetneqq \mathcal{V}[L^1(I),L^1(I)]$.

Infine, vogliamo qui ricordare che il lavoro di Riesz ha portato a quella che oggi è conosciuta come la "teoria di Riesz-Schauder" degli operatori compatti. Richiamiamo che, dato un operatore lineare T (continuo o no) definito su un sottospazio di uno spazio di Banach complesso E e a valori in E, si dice *insieme risolvente* dell'operatore T l'insieme di tutti i numeri complessi λ per i quali l'operatore $(\lambda I-T)^{-1}$ esiste, è definito su tutto E ed è continuo (I denota l'identità di E). Tale insieme si indica con $\rho(T)$ e il suo complementare $\sigma(T)$ in $\mathbb{C}$ si chiama *spettro* dell'operatore T. Se $T\in\mathcal{L}(E,E)$, allora $\sigma(T)$ è un insieme compatto non vuoto e vale la *formula del raggio spettrale*:

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \|T\|,$$

dimostrata in generale da Gelfand [17] nel 1941. Ogni $\lambda \in \sigma(T)$ per il quale l'operatore $\lambda I-T$ non è iniettivo si dice *autovalore di* T ed ogni $x\in E$, $x\neq 0$ tale che $(\lambda I-T)x = 0$ è un *autovettore* di T corrispondente all' autovalore λ. Forse il più importante risultato della teoria di Riesz è espresso dal seguente

TEOREMA 9 - *Se* $T \in \mathcal{K}(E,E)$ *allora:*

(a) $0 \in \sigma(T)$ **e** $\sigma(T)$ *è un insieme al più numerabile.*

(b) *Ogni* $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ *è un autovalore ed un punto isolato di* $\sigma(T)$.

(c) *Se* $\sigma(T)$ *è numerabile, allora l'insieme* $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *può essere ordinato in una successione che converge a zero.*

(d) *Per ogni* $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ *la dimensione del sottospazio* $N(\lambda) = \{x \in E : (\lambda I - T)x = 0\}$ *è finita ed è chiamata la molteplicità geometrica di* λ.

(e) *Per ogni* $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ *esiste una proiezione* P_λ *tale che* $TP_\lambda = P_\lambda T$. *La dimensione del sottospazio* $P_\lambda(E)$ *è finita ed è chiamata la molteplicità algebrica di* λ .

6 - Il problema dell'approssimazione.

Durante gli anni '20 Banach frattanto intraprendeva uno studio sistematico degli spazi di Banach ottenendo una tale varietà di risultati di vastissima portata (cf. [1] e [2]) da far compiere all'Analisi Funzionale il più gran balzo in avanti dai tempi del lavoro pionieristico di Hilbert. In tale studio Banach si era accorto di quanto fosse importante, ai sensi della struttura dello spazio, il sapere se un dato spazio di Banach E avesse o meno una *base*. Con ciò si intende una successione $(x_n) \subset E$ tale che ogni elemento $x \in E$ abbia un'unica rappresentazione della forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n ,$$

ove (ξ_n) è una successione scalare e la serie converge nella norma di E. In corrispondenza ad una tale base esiste una unica successione (f_n) di funzionali lineari, che nel caso di uno spazio di Banach sono automaticamente continui, tali che

$$f_n(x_n) = 1 \qquad \text{e} \qquad f_n(x_k) = 0 \qquad \text{per} \quad k \neq n,$$

cosicché possiamo scrivere

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)x_n \qquad \text{per ogni } x \in E.$$

Definiamo ora gli operatori $P_k : E \to E$ al modo seguente:

$$P_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)x_n \; .$$

E' chiaro che ciascun P_k è una proiezione continua e, poiché $P_k(x) \to x$ (per $k \to \infty$) per ogni $x \in E$, ne segue per il Teorema della Limitatezza Uniforme (Banach-Steinhaus) che $P_k \to I$ (= identità di E) uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di E. Se allora F è un altro spazio di Banach e $T \in \mathscr{K}(F,E)$ avremo che $P_kT \to T$ uniformemente su ogni insieme T(B) con B limitato in F, cioé $P_kT \to T$ in $\mathscr{L}(F,E)$ e quindi, poiché $P_kT \in \mathscr{F}(F,E)$ per ogni k, $T \in \bar{\mathscr{F}}(F,E)$ (la chiusura essendo presa in $\mathscr{L}(F,E)$). Dunque $\mathscr{K}(F,E) \subset \bar{\mathscr{F}}(F,E)$ il che, assieme al Teorema 7, ci permette di concludere che $\mathscr{K}(F,E) = \bar{\mathscr{F}}(F,E)$. Abbiamo così determinato la chiusura di $\mathscr{F}(F,E)$ se E ha una base. Ciò indusse Banach a porre il seguente problema:

(P5) *Esiste una base in ogni spazio di Banach separabile?*

Osserviamo che tutti gli spazi di Banach classici hanno una base. Per spazi di Banach classici si intendono i seguenti spazi (ove indichiamo una base tra parentesi): $\ell^p((e_n))$ $(1 \leq p < \infty)$, $c_0((e_n))$, C(I) (la base di Schauder), $L^p(I)$ (il sistema di Haar) $(1 \leq p < \infty)$, (cf. [38], vol. I,p.3).

Consideriamo adesso uno spazio di Hilbert H non separabile e sia $(e_\alpha : \alpha \in \mathbb{A})$ un sistema ortonormale completo in H. Si ha

$$x = \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} (x,e_\alpha)e_\alpha$$

per ogni $x \in H$ e dal momento che

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} |(x,e_\alpha)|^2 < \infty,$$

per ciascun x solo un numero al più numerabile di coefficienti (x,e_α) è diverso da zero. Dunque, se $\mathbb{F}$ è un sottoinsieme finito di $\mathbb{A}$ e $P_{\mathbb{F}}: H \to H$ è la proiezione ortogonale data da

$$P_{\mathbb{F}}(x) = \sum_{x \in \mathbb{F}} (x,e_\alpha)e_\alpha \quad ,$$

allora $P_{\mathbb{F}}(x) \longrightarrow x$ al variare di $\mathbb{F}$ tra tutti i sottoinsiemi finiti di $\mathbb{A}$

e quindi, come prima, $P_{\mathbb{F}} \longrightarrow I$ uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di H. Ciò implica, come nel caso degli spazi di Banach con base, $\mathcal{K} = \bar{\bar{\mathcal{F}}}$. Anticipando un po' i tempi, possiamo allora generalizzare il problema (P5) a tutti gli spazi di Banach (separabili o no) ponendo ilcosiddetto *problema dell'approssimazione di Banach-Grothendieck:*

(P6) *Dato uno spazio di Banach* E , *è possibile approssimare l'identità di* E *con operatori di rango finito uniformemente su ogni sottoinsieme compatto?*

Si dirà allora che E *ha la proprietà di approssimazione* se per E il problema (P6) ha risposta affermativa.

Come vedremo, il problema (P6) motiverà gran parte della teoria degli operatori, ma sarà risolto soltanto nel 1973.

7 - Operatori a traccia.

Riprendiamo adesso il problema della traccia discusso nel §2. Carlemann [4] dimostrò nel 1921 che, se T appartiene alla classe di Hilbert-Schmidt $\mathcal{S}_2$ (cf.§3), allora T^2 ha traccia e

$$\operatorname{tr}(T^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T)^2 .$$

Purtroppo, ciò non assicura l'esistenza della traccia per T, come il seguente semplice esempio mostra. Sia $T : \ell^2 \to \ell^2$ l'operatore definito da $T(\xi_n) = (n^{-1}\xi_n)$ per ogni $(\xi_n) \in \ell^2$. Se (e_n) è la base ortonormale consueta di ℓ^2, allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T\, e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge e quindi $T \in \mathcal{S}_2(\ell^2,\ell^2)$. D'altra parte, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T e_n, e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} ,$$

che potremmo essere indotti ad usare per definire la traccia tr(T), diverge. Pertanto, la traccia non può essere così definita per ogni operatore $T \in \mathscr{S}_2$. Abbiamo però visto nel §3 che, se S e T sono operatori di Hilbert-Schmidt su uno spazio di Hilbert H qualsiasi con base ortonormale $(e_\alpha : \alpha \in A)$, allora la serie $\sum_{\alpha \in A} (Se_\alpha, Te_\alpha)$ converge assolutamente a un limite che non dipende dalla base (e_α) ed infatti, per la (16), tale limite è proprio il prodotto scalare (S,T). E' questa osservazione che, nel 1936, indusse von Neumann, con il contributo parziale di Murray (cf. [43]) a studiare il problema della traccia e a definire *la traccia di* R *e* S, con $R,S \in \mathscr{S}_2$, come la quantità

(18) $$\mathrm{tr}(R,S) \equiv \sum_\alpha (Se_\alpha, R^* e_\alpha) .$$

Naturalmente ciò equivale a definire la traccia tr(T) per ogni operatore T della forma T = RS, con $R,S \in \mathscr{S}_2$, ciò che appunto permise a Murray e von Neumann di identificare in $\mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_2$ una classe di operatori su spazi di Hilbert per i quali la traccia può essere definita in accordo con i requisiti richiesti dai problemi (P2) e (P3) del §2, perché infatti si ha per la (16), (17), (18) e il Teorema 4 (iv),

(19) $$|\mathrm{tr}(T)| = |\mathrm{tr}(R,S)| = |(S,R^*)| \leq \sigma_2(S)\, \sigma_2(R^*) = \sigma_2(R)\, \sigma_2(S) .$$

In verità, Murray e von Neumann definirono *gli operatori a traccia* come quegli operatori T su uno spazio di Hilbert H che ammettono una rappresentazione del tipo

(20) $$T = \sum_{k=1}^{n} R_k S_k$$

con n un intero opportuno e $R_k, S_k \in \mathscr{S}_2(H,H)$. Ma è facile vedere che la classe $\mathscr{S}_2 \circ \mathscr{S}_2$, ottenuta per composizione, è un ideale nel senso del §4 e quindi può sempre prendersi n=1 nella (20).

Conveniamo di porre $\mathcal{S}_1 \equiv \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_2$, cioé di indicare con $\mathcal{S}_1$ l'ideale degli "operatori a traccia". Sussiste allora il seguente importante

TEOREMA 10 - *Se* $T \in \mathcal{S}_1(H,H)$, *allora esistono sistemi ortogonali* (e_n) *e* (f_n) *in* H *tali che*

$$Tx = \sum_n (x,e_n)f_n \qquad \textit{per ogni} \quad x \in H,$$

con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| \, \|e_n\| < \infty$$

e

$$tr(T) = \sum_{n=1}^{\infty}(f_n,e_n) \ ,$$

ove l'ultima somma non dipende dalla particolare rappresentazione di T.

Però, il problema (P4), cioé se la traccia di $T \in \mathcal{S}_1$ è uguale alla somma degli autovalori (e tale somma esiste per il risultato (10) di Lalesco e per il Teorema 5) dovrà rimanere senza risposta ancora per molto tempo, perché sfortunatamente il risultato di Carleman si applica solo a T^2 e non al prodotto $S\,T(S,T \in \mathcal{S}_2)$. La risposta è positiva, ma fu solo ottenuta nel 1959 da Lidskij [36] per mezzo di una dimostrazione sorprendentemente difficile (vedi anche [61], §3 o [9], II, pp. 1096-1105). In altre parole, vale l'uguaglianza

$$tr(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T) \qquad \text{per} \quad T \in \mathcal{S}_1! \tag{21}$$

8 - Teorema Spettrale, Algebra di Calkin e Classi di von Neumann

In uno spazio di Hilbert H, il Teorema 9 di F. Riesz può essere rafforzato nel senso che *ogni operatore compatto autoaggiunto su* H *ha un sistema di autovettori che formano una base ortonormale per* H. Ne segue il seguente notevolissimo *Teorema della Rappresentazione Spettrale* (cf. [27], pp: 52-55 o [28],§20.1):

TEOREMA 11 - *Ogni operatore* $T \in \mathcal{K}(H,H)$ *ha una rappresentazione del tipo*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T)(x,e_n)f_n \qquad (x \in H), \tag{22}$$

ove $(e_n),(f_n)$ *sono sistemi ortonormali (non necessariamente completi) in* H *e* $(a_n(T))$ *è una successione decrescente di numeri reali non negativi. Tale successione è inoltre unica, mentre i sistemi* (e_n) *e* (f_n) *sono "essenzialmente" unici.*

Tale teorema è conseguenza del fatto che l'operatore T^*T è autoaggiunto e compatto e pertanto ha una (unica) successione decrescente di autovalori non negativi $a_n(T)^2$. La mancanza di unicità per i sistemi (e_n) e (f_n) deriva dalla possibilità di autovalori non semplici di T^*T.

I numeri $a_n(T)$ sono detti *numeri caratteristici di* T ed hanno le proprietà dei numeri di approssimazione enunciate in Parte III, §1. La loro importanza risiede, oltre naturalmente che nel loro legame con i numeri di approssimazione, nel fatto che tali valori caratterizzano completamente, assieme ai sistemi (e_n) e (f_n), l'operatore T e pertanto per mezzo di essi è possibile dare una descrizione completa dell'algebra $\mathcal{L}(H,H)$ nel caso di uno spazio di Hilbert H separabile (cioé dell'algebra $\mathcal{L}(\ell^2,\ell^2)$), come dimostrato da Calkin [3] nel 1941.

Per tratteggiare brevemente i punti salienti della teoria di Calkin (per le dimostrazioni dei quali rimandiamo a [3] o a [61],§2) assumeremo da ora in poi che H sia uno spazio di Hilbert separabile, ciò essendo essenziale per la verità di quanto affermeremo. Inoltre, ometteremo per brevità il simbolo H.

Il primo passo nella teoria consiste nell'osservare che, *se* $\mathcal{I}$ *è un ideale in* $\mathcal{L}$ *contenente un operatore non compatto, allora* $\mathcal{I} = \mathcal{L}$. Ne segue che ogni ideale massimale $\mathcal{Y}$, essendo chiuso (e naturalmente proprio), deve essere contenuto in $\mathcal{K}$, per il Teorema 7 . D'altronde $\mathcal{Y} \supset \mathcal{F}$ e $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{K}$ (cf. §6) e pertanto deve risultare necessariamente $\mathcal{Y} = \mathcal{K}$. Se ne conclude che $\mathcal{K}$ *è l'unico ideale* *(proprio) chiuso di* $\mathscr{L}$ e che, pertanto, per ogni ideale $\mathscr{I} \subset \mathscr{L}$, risulta $\mathscr{F} \subset \mathscr{I} \subset \mathscr{K}$ (dal momento che ogni ideale è contenuto in un ideale massimale). Possiamo a questo punto invocare il Teorema 11 e, fissata una base ortonormale (e_n) in H, formare lo spazio di successioni

(23) $\lambda(\mathscr{I}) = \{(\xi_n)$: se T è l'operatore definito da

$$Tx = \sum_n \xi_n (x,e_n)e_n \quad (x \in H), \text{ allora } T \in \mathscr{I}\} .$$

Per le proprietà (I1),(I2) e (I3) di un ideale, è chiaro che $\lambda(\mathscr{I})$ è uno spazio vettoriale di successioni contenente lo spazio ϕ delle successioni finite. Inoltre, si vede subito, per il Teorema 11 e il Teorema 9(c), che se $(\xi_n) \in \lambda(\mathscr{I})$, allora o (ξ_n) è una successione finita o $\xi_n \to 0$. In ogni caso $\lambda(\mathscr{I}) \subset c_o$. Inoltre, se $(\xi_n) \in \lambda(\mathscr{I})$ e π è una qualsiasi permutazione di $\mathbb{N}$, allora anche $(\xi_{\pi(n)}) \in \lambda(\mathscr{I})$.

Infine, segue facilmente dalla definizione di $\lambda(\mathscr{I})$ e dall'essere $\mathscr{I}$ un ideale che, se $(\xi_n) \in \lambda(\mathscr{I})$ e (η_n) è una successione tale che $|\eta_n| \leq |\xi_n|$, allora si ha pure $(\eta_n) \in \lambda(\mathscr{I})$. Tutto ciò ci induce a definire un *ideale di successioni* (o *spazio di Calkin*) come uno spazio vettoriale λ di successioni (complesse) verificante le seguenti proprietà:

(S1) $\phi \subset \lambda \subset c_o$.

(S2) *Se* $(\xi_n) \in \lambda$ *e* (η_n) *è tale che* $|\eta_n| \leq |\xi_n|$ *per ogni* n *, allora* $(\eta_n) \in \lambda$.

(S3) $(\xi_n) \in \lambda$, *implica* $(\xi_{\pi(n)}) \in \lambda$ *per ogni permutazione* π *di* $\mathbb{N}$.

Possiamo allora riassumere quanto sopra dicendo che $\lambda(\mathscr{I})$ è un ideale di successioni. Viceversa, dato uno spazio di successioni λ verificante (S1) e denotando con $\mathscr{I}(\lambda)$ l'insieme degli operatori T tali che $(a_n(T)) \in \lambda$, possiamo domandarci quando accade che $\mathscr{I}(\lambda)$ sia un ideale in $\mathscr{L}$. Che ciò si verifichi esattamente quando λ è un ideale di successioni è il punto centrale della teoria e può essere riassunto nel seguente teorema che stabilisce una corrispondenza biunivoca tra gli ideali di successioni e gli ideali propri di $\mathscr{L}$.

TEOREMA 12 - (a) *Se $\mathcal{I}$ è un ideale proprio in $\mathcal{L}$, allora $\lambda(\mathcal{I})$ è un ideale di successioni e $\mathcal{I}[\lambda(\mathcal{I})] = \mathcal{I}$.*

(b) *Se λ è un ideale di successioni, allora $\mathcal{I}(\lambda)$ è un ideale proprio in $\mathcal{L}$ e $\lambda[\mathcal{I}(\lambda)] = \lambda$.*

Naturalmente, gli spazi ϕ e c_0 corrispondono rispettivamente all'ideale minimo $\mathcal{F}$ e massimo $\mathcal{K}$, mentre ℓ^2 corrisponde a $\mathcal{S}_2$ per il Teorema 4(v) e ℓ^1 corrisponde all'ideale $\mathcal{S}_1$ degli operatori a traccia per il Teorema 10. Inoltre è evidente che $\mathcal{I}$ sarà un ideale normato o quasinormato con (quasi-) norma ν se e solo se $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\lambda)$ con λ un ideale di successioni normato o quasi-normato con (quasi-) norma q, avendosi $\nu(T) = q\,[(a_n(T))]$.

A questo punto, essendo stata stabilita per mezzo del Teorema 12 l'importanza e maggiore trattabilità dei numeri caratteristici $a_n(T)$ di un operatore compatto T, viene naturale domandarsi quali siano le relazioni tra gli autovalori $\lambda_n(T)$ e gli $a_n(T)$, anche in connessione con il problema (P4) sulla traccia. Fu in questo senso che si mossero le ricerche di von Neumann e Schatten [44] negli anni 1946-48 e che portarono all'introduzione degli ideali $\mathcal{S}_p$. Questi non sono altro che gli ideali $\mathcal{I}(\ell^p)$ corrispondenti agli spazi ℓ^p per $0<p<\infty$ e $\mathcal{I}(c_0)$ per $p = \infty$, con quasi-norme

$$(24) \qquad \sigma_p(T) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(T)^p\Big)^{1/p} \quad \text{e} \quad \sigma_\infty(T) = a_1(T) = \|T\| \qquad (T \in \mathcal{S}_p).$$

Pertanto $(\mathcal{S}_p, \sigma_p)$ è un ideale quasi-normato che è normato per $1 \le p \le \infty$. Rimandiamo a [28] (§20.2) per uno studio dettagliato delle classi $\mathcal{S}_p$. Qui ci limitiamo a osservare il seguente

TEOREMA 13 - *Supponiamo* $0 < p, q \le \infty$.

(a) *Se* $p < q$, *allora* $\mathscr{S}_p \subset \mathscr{S}_q$ *e* $\sigma_q(T) \leq \sigma_p(T)$ *per* $T \in \mathscr{S}_p$.

(b) *Se* $S \in \mathscr{S}_p$ *e* $T \in \mathscr{S}_q$, *allora* $ST \in \mathscr{S}_r$ *con* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ *e* $\sigma_r(ST) \leq \sigma_p(S)\sigma_q(T)$.

Comunque, di tutte le relazioni tra $\lambda_n(T)$ e $a_n(T)$ quella fondamentale fu scoperta da Weyl [64] nel 1949 ed è la seguente, conosciuta come *la disuguaglianza di Weyl*:

(25) $$\prod_{n=1}^{k} |\lambda_n(T)| \leq \prod_{n=1}^{k} a_n(T) \qquad (T \in \mathscr{K})$$

ove gli autovalori $\lambda_n(T)$ sono ordinati secondo moduli non crescenti e contando le loro molteplicità algebriche. Dalla (24) e (25) segue allora

(26) $$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T)^p \leq \sigma_p(T)^p \qquad (T \in \mathscr{S}_p)$$

per tutti i p con $0 < p < \infty$, cioé $(\lambda_n(T)) \in \ell^p$ se $T \in \mathscr{S}_p$. Questo risultato ha molte conseguenze ed è una pietra miliare nella storia del problema (P4).

Concludiamo questo paragrafo con alcuni commenti sulle condizioni (S1),(S2) e (S3) e sugli ideali di successioni e con una osservazione sul caso di spazi di Hilbert non separabili.

In pratica, ogni spazio di successioni di un qualche interesse in Analisi deve perlomeno contenere ϕ (ciò d'altronde segue anche dalla (S2)). Uno spazio che soddisfi la (S2) si chiama *normale* ed uno che soddisfi la (S3) *simmetrico*. Gli spazi normali hanno grande importanza e utilità nella teoria degli spazi vettoriali topologici localmente convessi (cf. [32], §30), in quanto gli ideali di successioni sono basici per le varie generalizzazioni della nuclearità che sono state sviluppate recentemente (cf., per esempio, [8]).

Osservazione - Se H è uno spazio di Hilbert non separabile, denotiamo con dim H la sua dimensione hilbertiana, cioé la cardinalità di un sistema ortonormale e completo in H. Per ogni cardinale infinito $c \leq \dim H$, sia $\mathscr{I}_c(H,H)$

l'insieme degli operatori $T \in \mathscr{L}(H,H)$ tali che $\dim \overline{T(H)} < c$. Si riconosce facilmente che $\mathscr{I}_c(H,H)$ è un ideale in $\mathscr{L}(H,H)$ e che $\bar{\mathscr{I}}_c(H,H)$ è un ideale chiuso. Chiaramente, $\bar{\mathscr{I}}_c(H,H) \neq \mathscr{L}(H,H)$ perché l'identità I non appartiene a $\bar{\mathscr{I}}_c(H,H)$. Inoltre, $\bar{\mathscr{I}}_c(H,H) \supset \mathscr{K}(H,H)$, quest'ultimo essendo contenuto nell'ideale corrispondente alla cardinalità del numerabile. Se quindi $\dim H$ non è numerabile, esisteranno in $\mathscr{L}(H,H)$ degli ideali chiusi $\bar{\mathscr{I}}_c(H,H)$ contenenti propriamente $\mathscr{K}(H,H)$, dal momento che vi saranno in $\mathscr{L}(H,H)$ operatori T non compatti, ma tali che $\dim \overline{T(H)}$ sia separabile (per esempio, proiezioni). Gli ideali $\bar{\mathscr{I}}_c(H,H)$ sono tutti e soli gli ideali chiusi di $\mathscr{L}(H,H)$. Naturalmente se c non è numerabile nessun ideale $\mathscr{I}_c$ sarà proprio in $\mathscr{L}$, dato che $I \in \mathscr{I}_c$ se I è l'identità di uno spazio di Hilbert H con $\dim H < c$. Per i dettagli, vedi [18], [39] o [50] (§5.4).

II. L'ERA DI GROTHENDIECK.

Introduzione.

Avendo brevemente passato in rassegna nella Parte I l'evoluzione storica della teoria classica degli operatori tra spazi di Banach, veniamo adesso alla cosiddetta teoria moderna, cioé a quella parte della teoria degli operatori che si è sviluppata a partire dal lavoro di Grothendieck nel 1955. In tale anno appariva infatti la monumentale tesi di Grothendieck [22] che senza dubbio apportò il più grande e significativo contributo all'Analisi Funzionale dai tempi di Banach. Parte dei risultati in cosa contenuti erano stati annunciati indipendentemente da Grothendieck [19] e Ruston [55] nel 1951, presentando una teoria che generalizzava al tempo stesso la classica teoria di Fredholm e la teoria degli operatori a traccia agli spazi di Banach. L'idea di Grothendieck fu di sviluppare la teoria di von Neumann e Schatten (cf. [44] e [56]) nell'ambito degli spazi localmente convessi e, a differenza di molte generalizzazioni, questa ebbe l'effetto di produrre una grandissima varietà di risultati estremamente profondi e significativi.

In questa parte ci occuperemo esclusivamente del lavoro di Grothendieck e cioé essenzialmente dei risultati contenuti nella sua tesi [22]. La tesi di Grothendieck si compone di due parti: la prima è dedicata ad una trattazione sistematica dei prodotti tensoriali topologici, dalla quale scaturiscono le nozioni importantissime di operatore nucleare, integrale e assolutamente sommante, mentre la seconda presenta la teoria degli spazi nucleari (interamente dovuta a Grothendieck) per una esposizione moderna della quale rimandiamo a [49], [27] o [41]. Qui a noi interesserà solo la prima parte e il §1 della seconda, riguardo ai cui contenuti è bene dire subito che forse il merito maggiore di Grothendieck è stato quello di aver visto il profondo ed intimo legame che lega i problemi (P2), (P4) e (P6) (e quindi, naturalmente, anche (P5)).

Tutti i risultati dei §§1-7 sono dovuti a Grothendieck (cf. [21], [22] e [23]) anche se molte volte faremo riferimento ad altri testi come [49], [27] e [28] per dimostrazioni più snelle accessibili.

1. Prodotto tensoriale proiettivo di spazi di Banach

Siano E,F spazi lineari, sia B(E,F) lo spazio lineare di tutte le forme bilineari sul prodotto ExF e sia $B(E,F)^*$ il duale algebrico di B(E,F), cioé lo spazio lineare di tutti i funzionali lineari su B(E,F). Ad ogni coppia $(x,y) \in E \times F$ associamo l'elemento $u_{x,y} \in B(E,F)^*$ definito come segue:

$$u_{x,y}(b) = b(x,y) \qquad \text{per ogni } b \in B(E,F).$$

Osserviamo che l'applicazione $\otimes : (x,y) \to u_{x,y}$ di ExF in $B(E,F)^*$ è bilineare. L'inviluppo lineare di $\otimes(E \times F)$ in $B(E,F)^*$ si denota con $E \otimes F$ e si chiama *prodotto tensoriale di* E *e* F . Scriveremo, come d'uso, $x \otimes y$ per l'elemento $u_{x,y}$ di $E \otimes F$, cosicché ogni $z \in E \otimes F$ può scriversi come

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, \qquad \text{con } x_i \in E \text{ e } y_i \in F.$$

Avvertiamo però che tale rappresentazione non è certo unica.

Siano ora E e F spazi di Banach. Ponendo

(1) $$\pi(z) = \inf \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\|$$

ove l'estremo inferiore è preso su tutte le rappresentazioni (ovviamente finite) di $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in E \otimes F$, otteniamo una norma su $E \otimes F$. Munito di tale norma, $E \otimes F$ si indica con $E \underset{\pi}{\otimes} F$ e si chiama *prodotto tensoriale proiettivo di* E *e* F. Denotiamo con $E \tilde{\otimes} F$ lo spazio di Banach ottenuto completando $E \underset{\pi}{\otimes} F$. Il seguente teorema, che fornisce una rappresentazione esplicita di $E \tilde{\otimes} F$, è uno dei risultati fondamentqali della teoria (per la dimostrazione, cf. anche [28], p. 337).

TEOREMA 1 - *Ogni* $z \in E \tilde{\otimes} F$ *ammette una rappresentazione del tipo*

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \, x_n \otimes y_n ,$$

ove $(\xi_n) \in \ell^1$ *e* $(x_n),(y_n)$ *sono successioni limitate in* E,F *rispettivamente.*

Consideriamo adesso il prodotto tensoriale $E' \otimes F$. Ad ogni elemento $z = \sum_{i=1}^{n} x_i' \otimes y_i \in E' \otimes F$ possiamo associare l'operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ definito da

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i' \rangle y_i \qquad \text{per ogni } x \in E.$$

L'applicazione $\chi : z \to T$ si riconosce essere un isomorfismo algebrico di $E' \otimes F$ in $\mathscr{L}(E,F)$ la cui immagine è chiaramente $\mathscr{F}(E,F)$, ciò che permette di identificare quest'ultimo spazio con $E' \otimes F$. Avendosi

$$\begin{aligned} \|\chi(z)\| = \|T\| &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} \leq \\ &\sup\{\sum_{i=1}^{n} |\langle x, x_i' \rangle| \, \|y_i\| : \|x\| \leq 1\} \leq \\ &\sum_{i=1}^{n} \|x_i'\| \, \|y_i\| \end{aligned}$$

r tutte le rappresentazioni $z = \sum_{i=1}^{n} x_i' \otimes y_i$, ne segue, per la (1),

$$(2) \qquad \|\chi(z)\| \leq \pi(z) \qquad \text{per ogni } z \in E' \otimes F$$

e quindi la continuità di χ da $E' \otimes_\pi F$ a $\mathscr{L}(E,F)$. Ma allora χ ha una (unica) estensione continua, che denoteremo ancora con χ, al completamento $E' \tilde{\otimes} F$, con valori in $\mathscr{L}(E,F)$. A questo punto si pone il seguente notevolissimo problema

(P7) *E' l'applicazione* $\chi : E' \tilde{\otimes} F \to \mathscr{L}(E,F)$ *necessariamente iniettiva per ogni coppia di spazi di Banach* E *e* F *?*

L'importanza di tale problema deriva dalle seguenti considerazioni. Se $z = \sum_{i=1}^{n} x_i' \otimes x_i \in E' \otimes E$, allora

$$|tr(z)| = |\sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_i' \rangle| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \; \|x_i'\|$$

e quindi, essendo $tr(z)$ indipendente dalla rappresentazione, si ottiene per la (1),

$$|tr(z)| \leq \pi(z) . \tag{3}$$

Ciò mostra che la traccia è continua su $E' \otimes_\pi E$ e dunque ha un'estensione continua a tutto $E' \tilde{\otimes} E$ avendosi, per il Teorema 1,

$$tr(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x'_n \rangle \tag{4}$$

per ogni $z = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n \otimes x_n \in E' \tilde{\otimes} E$. È chiaro però che tale risultato può essere usato per definire la traccia per ogni operatore nell'immagine $\chi(E' \tilde{\otimes} E)$ di $E' \tilde{\otimes} E$ in $\mathscr{L}(E,E)$ solo nel caso in cui la χ risulti iniettiva, potendosi porre allora

$$tr(\chi(z)) = tr(z) \qquad \text{per ogni} \quad z \in E' \tilde{\otimes} E. \tag{5}$$

E' quindi necessario studiare sia l'immagine $\chi(E' \tilde{\otimes} E)$ sia l'iniettività della χ.

2 - Operatori nucleari

Affrontiamo per primo lo studio dell'immagine $\chi(E' \tilde{\otimes} F)$ per arbitrari spazi di Banach E,F e, seguendo Grothendieck, definiamo *operatore nucleare* ogni operatore $T \in \chi(E' \tilde{\otimes} F)$. Come conseguenza immediata del Teorema 1 abbiamo la seguente caratterizzazione degli operatori nucleari (cf. Teorema I.10).

TEOREMA 2 - *Un operatore* $T \in \mathscr{L}(E,F)$ *è nucleare se e solo se esistono successioni* $(\xi_n) \in \ell^1$, $(x'_n) \in B_{E'}$ *e* $(y_n) \in B_{F'}$ *tali che*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \langle x, x'_n \rangle y_n \qquad \textit{per ogni} \quad x \in E. \tag{6}$$

Equivalentemente, $T \in \mathscr{L}(E,F)$ *è nucleare se e solo se esistono successioni* $(x'_n) \in E'$ *e* $(y_n) \in F$ *tali da aversi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\| \; \|y_n\| < \infty \tag{7}$$

e

$$(8) \qquad Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x'_n \rangle y_n \qquad \textit{per ogni} \quad x \in E.$$

Indicando con $\mathcal{N}_1$ *la classe degli operatori nucleari* tra spazi di Banach, abbiamo dunque $\mathcal{N}_1(E,F) = \chi(E' \tilde{\otimes} F)$ per definizione e quindi $\mathcal{N}_1(E,F)$ algebricamente è un quoziente dello spazio di Banach $E' \tilde{\otimes} F$. Possiamo allora munire $\mathcal{N}_1(E,F)$ della norma quoziente ν_1, risultando chiaramente per la (1), (7) e (8),

$$(9) \qquad \nu_1(T) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\| \; \|y_n\|,$$

ove l'estremo inferiore è preso su tutte le rappresentazioni di tipo (8) di T. La norma ν_1 data dalla (9) è detta *norma nucleare di* T. Equivalentemente,

$$\nu_1(T) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|$$

ove l'estremo inferiore è preso su tutte le rappresentazioni di tipo (6) di T.

Osservazione 1 - L'applicazione χ è, come abbiamo già detto, un isomorfismo algebrico di $E' \otimes F$ su $\mathcal{F}(E,F) \subset \mathcal{N}_1(E,F)$. Ora, se $z \in E' \otimes F$, la norma $\pi(z)$ data dalla (1) è presa su tutte le rappresentazioni finite di z come elemento di $E' \otimes F$, mentre la norma $\nu_1(\chi(z))$ dell'operatore $\chi(z) \in \mathcal{F}(E,F)$, data dalla (9), è presa su tutte le rappresentazioni *finite o possibilmente infinite,* del tipo (8), dell'operatore $\chi(z)$ come elemento di $\mathcal{N}_1(E,F)$. Ne segue la disuguaglianza

$$(10) \qquad \nu_1(\chi(z)) \leq \pi(z) \qquad \text{per ogni} \quad z \in E' \otimes F$$

dalla quale non si può dedurre che le norma ν_1 e π siano equivalenti su $E' \otimes F$ (e in generale *non lo sono*, come vedremo nel §III.5). Ora, sappiamo dalla (3) che la traccia tr(z) è continua su $E' \otimes E$ per la norma π, ma non possiamo certo asserire che lo sia anche per la norma ν_1 (e in generale *non lo è*) e pertanto non può essere estesa in generale a $\mathcal{N}_1(E,E)$, che è il completamento di $\chi(E' \otimes E)$

nella norma ν_1. Ne concludiamo che, *mentre ogni elemento* $z \in E' \tilde{\otimes} E$ *ha una traccia ben definita dalla* (4), *ciò non è necessariamente vero per l'operatore nucleare* $\chi(z)$. Questo rinforza le considerazioni fatte alla fine del §1.

Per finire, diamo le seguenti proprietà notevoli degli operatori nucleari, per le cui dimostrazioni rimandiamo per esempio, a [28] (§17.3) o [27](§2.2).

TEOREMA 3 - (a) $(\mathcal{N}_1,\nu_1)$ *è un ideale normato completo in cui* $\mathcal{F}$ *è denso.*
(b) $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{K}$.
(c) *Se* $T \in \mathcal{N}_1$, *allora* $T' \in \mathcal{N}_1$ *e* $\nu_1(T') \leq \nu_1(T)$.

(d) *Siano* E,F,G *spazi di Banach con* G *sottospazio di* E. *Ogni operatore* $T \in \mathcal{N}_1(G,F)$ *può essere esteso ad un operatore* $\tilde{T} \in \mathcal{N}_1(E,F)$.

(e) $T \in \mathcal{N}_1(E,F)$ *se e solo se esistono operatori* $R \in \mathcal{L}(\ell^1,F)$, $S \in \mathcal{L}(E,\ell^\infty)$ *e un operatore diagonale* $D_\xi : \ell^\infty \to \ell^1$ *definito da*

$$D_\xi(\eta_n) = (\xi_n\, \eta_n) \qquad \textit{per} \quad (\eta_n) \in \ell^\infty ,$$

con $(\xi_n) \in \ell^1$, *tali che si abbia*

$$T = R\, D_\xi\, S.$$

(f) $\mathcal{N}_1(H,H) = \mathcal{S}_1(H,H)$ *per ogni spazio di Hilbert* H *e* $\nu_1 = \sigma_1$.

La (e) ci dice che l'operatore D_ξ che vi appare è un "prototipo" di operatore nucleare, avendosi inoltre $\nu_1(D_\xi) = \|D_\xi\| = \|(\xi_n)\|_{\ell^1}$ mentre la (f) mostra che l'ideale $\mathcal{N}_1$ è una estensione agli spazi di Banach dell'ideale hilbertiano $\mathcal{S}_1$.

Osservazione 2 - Purtroppo nella (c) non abbiamo equivalenza, cioé per $\mathcal{N}_1$ non vale il Teorema I.8. La ragione di ciò sta nel fatto seguente. Sia $T \in \mathcal{N}_1(E,F)$ e sia G un sottospazio chiuso di F contenente l'immagine $T(E)$. A differenza di quanto accade per un operatore compatto, non è vero in generale che T, considerato come un operatore da E a G, appartenga a $\mathcal{N}_1(E,G)$. Ne segue che se un operatore $T : E \to F$ è tale che $T' \in \mathcal{N}_1(F',E')$, allora $T'' \in \mathcal{N}_1(E'',F'')$ e quindi la restrizione di T'' ad E, cioé T, appartiene a $\mathcal{N}_1(E,F'')$. Non ne segue però, per quanto detto sopra, che $T \in \mathcal{N}_1(E,F)$ (mentre ciò sarà banalmente vero se F è riflessivo). Si ha anche $T \in \mathcal{N}_1(E,F)$ se E' o F'' ha la proprietà di approssimazione. Sempre in questo ordine di idee, menzioniamo una ulteriore patologia degli operatori nucleari rispetto agli operatori compatti e cioé, se $T \in \mathcal{N}_1(E,F)$ e G è un sottospazio chiuso di E contenuto in $T^{-1}(0)$, non è necessariamente vero che l'operatore $T_0 : E/G \to F$ indotto da T sia nucleare. Per una discussione completa delle patologie di cui sopra, cf. [22] (pp. 85-88).

Osserviamo infine il seguente risultato di interesse (cf. [28], p.425).

TEOREMA 4 - $(\mathcal{N}_1, \nu_1)$ *è il più piccolo ideale normato completo.*

L'enunciato del teorema significa che se $(\mathcal{I}, \nu)$ è un qualsiasi ideale normato completo, risulta necessariamente $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{I}$ e $\nu(T) \leq \nu_1(T)$ per ogni $T \in \mathcal{N}_1$, ciò che, per la (10) e per l'osservazione fatta dopo le condizioni (Q1)-(Q3) del §I.4, ci permette di rafforzare la (2) come segue:

$$\|\chi(z)\| \leq \nu(\chi(z)) \leq \nu_1(\chi(z)) \leq \pi(z) \qquad \text{per ogni } z \in E' \otimes F. \tag{11}$$

3. Operatori integrali

Riprendiamo il prodotto tensoriale $E \otimes F$ del §1 e consideriamo la sua immagine $\chi(E \otimes F)$ in $\mathcal{L}(E',F)$. Con la norma

$$\|z\| = \|\chi(z)\| \qquad \text{per ogni } z \in E \otimes F, \tag{12}$$

$E \otimes F$ diventa uno spazio normato che si indica con $E \otimes_\varepsilon F$ e si chiama *prodotto tensoriale iniettivo di* E *e* F. Ora il duale di $E \otimes_\pi F$ può essere identificato con lo spazio $\mathcal{B}(E,F)$ di tutte le forme bilineari continue su $E \times F$ (cf. [28], p. 325) e pertanto, avendosi per la (2) e la (12)

$$||z|| \leq \pi(z) \ ,$$

ne segue che il duale di $E \underset{\varepsilon}{\otimes} F$ può essere identificato con un sottospazio $\mathscr{Y}(E,F)$ di $\mathscr{B}(E,F)$. Chiameremo *forme bilineari integrali* gli elementi di $\mathscr{Y}(E,F)$, dal momento che vale la seguente rappresentazione:

TEOREMA 5 - $b \in \mathscr{Y}(E,F)$ *se e solo se esiste una misura di Radon* μ *su* $B_{E'} x B_{F'}$ *tale da aversi*

$$b(x,y) = \int_{B_{E'} x B_{F'}} \langle x,x'\rangle\langle y,y'\rangle d\mu(x'y') \qquad \textit{per ogni } (x,y) \in ExF.$$

Siamo ora in grado di dare la nozione di operatore integrale e precisamente diremo che $T : E \to F$ è un *operatore integrale* se l'associata forma bilineare b_T su ExF', definita come

$$b_T(x,y') = \langle Tx,y'\rangle \qquad \text{per ogni } (x,y') \in ExF',$$

è una forma bilineare integrale, cioé se $b_T \in \mathscr{Y}(E,F')$. Denoteremo con $\mathscr{I}_1(E,F)$ *l'insieme di tutti gli operatori integrali da* E *a* F. Su tale insieme possiamo definire una norma ι_1, detta norma integrale, per mezzo della relazione

$$\iota_1(T) = ||b_T|| \qquad \text{per ogni } T \in \mathscr{I}_1(E,F).$$

Sussiste allora la seguente caratterizzazione:

TEOREMA 6 - *Per ogni operatore lineare* $T : E \to F$ *le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

(i) $T \in \mathscr{I}_1(E,F)$

(ii) *Esiste una misura di Radon* μ *su* $B_{E'} \times B_{F''}$ *tale da aversi*

$$\langle Tx,y'\rangle = \int_{B_{E'} x B_{F''}} \langle x,x'\rangle\langle y'',y'\rangle d\mu(x',y'') \quad \textit{per ogni } (x,y') \in ExF'.$$

(iii) *Esiste un compatto* K, *una misura di Radon* μ *su* K *e operatori* $S \in \mathscr{L}(E,L^\infty(K,\mu))$ [o $S \in \mathscr{L}(E,C(K))$] *e* $R \in \mathscr{L}(L^1(K,\mu),F'')$ *tali che, se* j_F *è l'iso-*

metria cononica di F *in* F" *e* $J_{\infty,1}$ *è l'immersione canonica di* $L^{\infty}(K,\mu)$ *in* $L^{1}(K,\mu)$, *si abbia:*

(13) $$j_F T = R J_{\infty,1} S ,$$

risultando inoltre

$$\iota_1(T) = \inf \|\mu\| ,$$

ove l'estremo inferiore (che è poi un minimo) è preso su tutte le misure di Radon μ *su* K *per le quali sussista la* (13) *con* $\|R\| \leq 1$ *e* $\|S\| \leq 1$.

(iv) $\sup\{\dfrac{|tr(TS)|}{\|S\|} : S \in \mathscr{F}(F,E)\} = c < \infty$, *risultando* $\iota_1(T) = c$

La (iii) mostra che l'immersione canonica $L^{\infty}(K,\mu) \to L^{1}(K,\mu)$ (e quindi anche l'immersione $C(K) \to L^{1}(K,\mu)$) è un prototipo di operatore integrale, mentre la (iv) collega gli operatori integrali alla nozione di traccia. Passando poi alle proprietà degli operatori integrali abbiamo

TEOREMA 7 - (a) $(\mathscr{I}_1, \iota_1)$ *è un ideale normato completo e quindi contiene* $\mathscr{N}_1$, *avendosi* $\iota_1(T) \leq \nu_1(T)$ *per ogni* $T \in \mathscr{N}_1$ (per il Teorema 4).

(b) $\mathscr{I}_1 \subset \mathscr{W}$.

(c) $T \in \mathscr{I}_1$ *se e solo se* $T' \in \mathscr{I}_1$, *avendosi in tal caso* $\iota_1(T) = \iota_1(T')$.

(d) *Se* $T \in \mathscr{I}_1$ *e* $S \in \mathscr{W}$, *allora* $ST \in \mathscr{N}_1$ *e* $\nu_1(ST) \leq \|S\| \iota_1(T)$.

(e) $\mathscr{I}_1(H,H) = \mathscr{S}_1(H,H)$ *per ogni spazio di Hilbert* H.

Notiamo che la (b) segue dalla (13), dal momento che l'immersione canonica $J : L^{\infty}(K,\mu) \to L^{1}(K,\mu)$ si fattorizza attraverso uno spazio di Banach riflessivo, per esempio $L^{p}(K,\mu)$, con $1 < p < \infty$. Inoltre, (c) segue essenzialmente dalla (13), mentre (d) è uno dei risultati fondamentali della teoria ed ha, come conseguenza immediata, che $\mathscr{I}_1(E,F) = \mathscr{N}_1(E,F)$ *per ogni spazio di Banach* F *riflessivo*. In tal caso, è quasi superfluo osservare che le norme ι_1 e ν_1 coincidono. Più in generale, *si ha* $\mathscr{I}_1(E,F) = \mathscr{N}_1(E,F)$ *ogni qual volta* F *è uno spazio di Banach separa-*

bile, isometrico al duale di uno spazio di Banach. Infine, (e) segue immediatamente dalla (d) e dal Teorema 3 (f), mostrando altresì che $\mathscr{I}_1$ è un'altra estensione agli spazi di Banach (naturalmente più ampia di $\mathscr{N}_1$ per la (a)) dell'ideale hilbertiano $\mathscr{S}_1$.

Per le dimostrazioni dei risultati di cui sopra, il lettore potrà consultare, per esempio, [28] (§17.4 e pp. 394-395).

4. La proprietà di approssimazione.

Con riferimento alle conclusioni tratte alla fine del §1, affrontiamo adesso la questione dell'iniettività dell'applicazione $\chi : E'\tilde{\otimes} F \to \mathscr{L}(E,F)$ (problema (P7)). E' una delle maggiori scoperte di Grothendieck l'aver legato tale problema, e quindi la teoria degli operatori nucleari, con il problema dell'approssimazione (P6), con il problema generale della traccia (P2) e con il problema (P4) dell'identità tra traccia (funzionale) e traccia spettrale. Precisamente, richiamando quanto detto nel §I.6, abbiamo il seguente fondamentale teorema, ove indichiamo con τ *la topologia su* $\mathscr{L}(E,F)$ *della convergenza uniforme sui sottoinsiemi compatti di* E.

TEOREMA 8 - *Per ogni spazio di Banach* E *le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

(i) E *ha la proprietà di approssimazione.*

(ii) *Per ogni spazio di Banach* $F, \mathscr{F}(E,F)$ *è denso in* $\mathscr{L}_\tau(E,F)$.

(iii) *Per ogni spazio di Banach* $F, \mathscr{F}(F,E)$ *è denso in* $\mathscr{L}_\tau(F,E)$.

(iv) $\mathscr{F}(E,E)$ *è denso in* $\mathscr{L}_\tau(E,E)$.

(v) $\bar{\mathscr{F}}(F,E) = \mathscr{K}(F,E)$ *per ogni spazio di Banach* F.

(vi) $\bar{\mathscr{F}}(F,E) = \mathscr{K}(F,E)$ *per ogni spazio di Banach* F *separabile e riflessivo.*

(vii) $\bar{\mathscr{F}}(F,E) = \mathscr{K}(F,E)$ *per ogni sottospazio chiuso* F *di* c_0.

(viii) *Per ogni spazio di Banach* F *l'applicazione canonica* $\chi : F \tilde{\otimes} E \to \mathscr{L}(F'E)$ *è iniettiva e quindi è una isometria di* $F \tilde{\otimes} E$ *in* $[\mathscr{N}_1(F',E),\nu_1]$.

(ix) *Per ogni spazio di Banach* F *l'applicazione canonica* $\chi : F'\tilde{\otimes} E \to \mathcal{L}(F,E)$ *è iniettiva e quindi è una isometria di* $F'\tilde{\otimes} E$ *su* $[\mathcal{N}_1(F,E),\nu_1]$.

(x) *L'applicazione canonica* $\chi : E'\tilde{\otimes} E \to \mathcal{L}(E,E)$ *è iniettiva e quindi è una isometria di* $E'\tilde{\otimes} E$ *su* $[\mathcal{N}_1(E,E),\nu_1]$.

(xi) *Le norme* π *e* ν_1(cf. (1) e (9)) *coincidono su* $E'\otimes E$.

(xii) *La traccia è continua su* $E'\otimes E$ *per la norma* ν_1 *e quindi si estende ad un unico funzionale lineare continuo su* $[\mathcal{N}_1(E,E),\nu_1]$.

(xiii) *Se* $z \in E'\tilde{\otimes} E$ *e* $\chi(z) = 0$, *allora* $tr(z) = 0$.

(xiv) *Per ogni scelta di successioni* $(x_n) \subset E$ *e* $(x'_n) \subset E'$ *tali che*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|\ \|x'_n\| < \infty \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty}\langle x,x'_n\rangle x_n = 0 \quad \textit{per ogni} \quad x \in E,$$

risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n,x'_n\rangle = 0.$$

Osserviamo che l'equivalenza delle condizioni(i)-(vii) si basa essenzialmente sul tipo di considerazioni fatte nel §I.6, mentre l'equivalenza delle condizioni (viii)-(xiv) risale a quanto detto nel §1 e nell'Osservazione 1 del §2. Per completare, diamo la dimostrazione dell'equivalenza (i) $\Longleftrightarrow$ (xiv).

Cominciamo col far vedere che i funzionali lineari e continui su $\mathcal{L}_\tau(E,E)$ sono esattamente i funzionali u della forma

$$\langle T,u\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T x_n,x'_n\rangle \tag{14}$$

con $(x_n) \subset E$, $(x'_n) \subset E'$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|\ \|x'_n\| < \infty$.

Infatti, se u ha una rappresentazione come sopra, possiamo assumere $\|x_n\| = 1$ per ogni n e scegliere una successione (η_n) di numeri positivi tale che

$$\eta_n \to \infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \|x'_n\| = C < \infty .$$

Sia K l'insieme $(\eta_n^{-1} x_n) \cup \{0\}$. Allora K è compatto e avendosi

$$|\langle T,u\rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \, \|x_n'\| \, \|T(\eta_n^{-1} x_n)\| \leq C \sup\{\|Tx\| : x \in K\} \quad ,$$

il funzionale u risulta τ-continuo. Inversamente, supponiamo che u sia un funzionale lineare continuo su $\mathscr{L}_\tau(E,E)$. Allora deve aversi

$$(15) \qquad |\langle T,u\rangle| \leq C \sup\{\|Tx\| : x \in K\}$$

per un opportuno insieme compatto $K \subset E$ ed un'opportuna costante $C > 0$. Ora è ben noto che ogni insieme compatto di uno spazio di Banach è contenuto nella chiusura dell'inviluppo assolutamente convesso di una successione che tende a 0 e pertanto possiamo supporre che K coincida con la chiusura dell'inviluppo assolutamente convesso di una successione (x_n) tale che $\|x_n\| \to 0$.

Poniamo

$$c_0(E) = \{(y_n) : y_n \in E \ \text{e} \ \|y_n\| \to 0\} .$$

Si riconosce facilmente che $c_0(E)$ è uno spazio di Banach per la norma

$$\|(y_n)\|_{c_0} = \sup \|y_n\| ,$$

e il suo duale è lo spazio di Banach

$$\ell^1(E') = \{(y_n') : y_n' \in E' \ \text{e} \ \|(y_n')\|_{\ell^1} = \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n'\| < \infty\}.$$

Sia $S: \mathscr{L}(E,E) \to c_0(E)$ l'applicazione definita dalla relazione

$$(16) \qquad S(T) = (T x_n) .$$

Dalla (15) segue

$$|\langle T,u\rangle| \leq C \sup\{\|Tx\| : x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1\}$$

$$\leq C \sup\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|T x_n\| : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \leq 1\} \leq C \sup_n \|Tx_n\| = C \|S(T)\|_{c_0}$$

e pertanto esiste un funzionale lineare e continuo v, definito sulla chiusura di $S[\mathscr{L}(E,E)]$ in $c_0(E)$ tale che

$$(17) \qquad \langle S(T),v\rangle = \langle T,u\rangle \ .$$

Per il Teorema di Hahn-Banach, possiamo allora estendere v a un funzionale lineare e continuo $\tilde{v}$ su tutto $c_0(E)$, risultando quindi $\tilde{v} \in \ell^1(E')$. Se allora $\tilde{v} = (x_n')$, con $x_n' \in E'$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n'\| < \infty$, otteniamo per la (16) e (17),

$$\langle T,u\rangle = \langle S(T),\tilde{v}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T\, x_n, x_n'\rangle \ .$$

Avendo così stabilito la (14), osserviamo che, per definizione, la (i) del Teorema 8 significa che l'identità I di E appartiene alla chiusura di $\mathscr{F}(E,E)$ in $\mathscr{L}_\tau(E,E)$. Ora, ciò avviene se e solo se ogni funzionale lineare e continuo u in $\mathscr{L}_\tau(E,E)$, che si annulla sugli operatori di rango 1, si annulla pure su I. Ma per la (14), ciò è esattamente quanto asserito dalla (xiv).

Diamo infine alternative formulazioni del problema dell'approssimazione che mostrano l'intimo legame esistente tra tale problema e alcuni problemi di Analisi Classica.

TEOREMA 9 - *Le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

(i) *Ogni spazio di Banach ha la proprietà di approssimazione.*

(ii) *Ogni sottospazio chiuso di* c_0 *ha la proprietà di approssimazione.*

(iii) *Ogni operatore* $T \in \mathscr{N}_1(c_0,c_0)$ *tale che* $T^2 = 0$ *soddisfa* $tr(T) = 0$.

(iv) *Ogni matrice infinita* $A = ((a_{kn}))$ *di scalari tale che*

$$(18) \qquad \lim_n a_{kn} = 0 \ \textit{per ogni } k, \ \sum_{k=1}^{\infty} \max_n |a_{kn}| < \infty \ \textit{ e } \ A^2 = 0$$

soddisfa

$$tr(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nn} = 0.$$

(v) *Ogni funzione continua* $k(s,t)$ *su* $[0,1] \times [0,1]$ *tale che*

$$\int_0^1 k(r,s)\ k(s,t)ds = 0 \quad \textit{per ogni}\ r,t \in [0,1]$$

soddisfa

$$\int_0^1 k(t,t)dt = 0\ .$$

L'implicazione (i) $\Longrightarrow$ (ii) è ovvia, mentre non è difficile vedere, anche se bisogna fare un po' di conti, che $T \in \mathcal{N}_1(c_o,c_o)$ se e solo se T può essere rappresentato mediante una matrice infinita A soddisfacente le prime due condizioni della (18). Ciò mostra l'equivalenza (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv).

Per stabilire che (ii) $\Longrightarrow$ (iv) consideriamo una matrice A soddisfacente le condizioni (18) e per $k \in \mathbb{N}$ indichiamo con a_k la successione $(a_{kn} : n \in \mathbb{N})$. Chiaramente $a_k \in c_o$ per ogni k e perciò possiamo considerare l'inviluppo lineare chiuso E degli elementi a_k in c_o. Sia (e_k) la base naturale di $\ell^1 = c_o'$ e sia e_k' la restrizione di e_k a E per ogni k. Notiamo che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|_E \|e_k'\|_{E'} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|_{c_o} \|e_k\|_{\ell^1} = \sum_{k=1}^{\infty} \max_n |a_{kn}| < \infty.$$

Inoltre, se $x = \sum_{k=1}^{m} c_k\ a_k$, risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x,e_n' \rangle\ a_n = \sum_{k=1}^{m} c_k \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}\ a_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} c_k \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} e_j = \sum_{k=1}^{m} c_k \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}\ a_{nj} \right) e_j = 0$$

dal momento che $A^2 = 0$. Per continuità, ne segue

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x,e_n' \rangle\ a_n = 0 \qquad\qquad \text{per ogni}\ \ x \in E$$

e ciò, assumendo la (ii), implica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle a_n,e_n' \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nn} = 0$$

in virtù della (xiii) del Teorema 8.

Mostriamo adesso che (iv) $\Longrightarrow$ (i). Sia E uno spazio di Banach senza la proprietà di approssimazione. Per la (xiv) del Teorema 8 esistono successioni $(x_n) \subset E$, $(x'_n) \subset E'$ tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \|x'_n\| < \infty \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x'_n \rangle x_n = 0 \qquad \text{per ogni } x \in E,$$

ma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x'_n \rangle \neq 0 .$$

Possiamo supporre che

$$\|x_n\| \to 0 \qquad e \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\| < \infty .$$

Allora la matrice $A = ((\langle x_n, x'_n \rangle))$ soddisfa le condizioni (18), ma

$$tr(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x'_n \rangle \neq 0 .$$

Ciò stabilisce in modo relativamente semplice l'equivalenza delle asserzioni (i)-(iv), mentre invece l'equivalenza con la (v) è un po' più complicata da dimostrare e perciò la omettiamo.

Osservazione - È importante notare che *se il duale* E' *ha la proprietà di approssimazione, allora anche* E *la possiede* ed in tal caso $T \in \mathcal{N}_1(E,F)$ *se e solo se* $T' \in \mathcal{N}_1(F',E')$ per ogni spazio di Banach F, risultando $\nu_1(T) = \nu_1(T')$. Inoltre $\bar{\mathcal{F}}(E,F) = \mathcal{K}(E,F)$ per ogni spazio di Banach F.

Per i dettagli sulle dimostrazioni dei risultati esposti in questo paragrafo rimandiamo a [28] (§18.3) e a [38] (vol.I, pp. 29-36).

5 - La proprietà di approssimazione metrica.

Diciamo che uno spazio di Banach E ha *la proprietà di approssimazione metrica* se l'identità di E può essere approssimata uniformemente su ogni sottoinsieme compatto per mezzo di operatori di rango finito e di norma ≤ 1.

Parte del Teorema 8 può allora essere esteso facilmente al caso della proprietà di approssimazione metrica come segue:

TEOREMA 10 - *Per ogni spazio di Banach* E *le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

(i) E *ha la proprietà di approssimazione metrica.*

(ii) *Per ogni spazio di Banach* F, $B_{\mathscr{F}(E,F)}$ *è* τ *- densa in* $B_{\mathscr{L}(E,F)}$.

(iii) *Per ogni spazio di Banach* F, $B_{\mathscr{F}(F,E)}$ *è* τ*-densa in* $B_{\mathscr{L}(F,E)}$.

(iv) $B_{\mathscr{F}(E,E)}$ *è* τ*-densa in* $B_{\mathscr{L}(E,E)}$.

(v) *Per ogni spazio di Banach* F *,l'applicazione canonica* $\chi : F \tilde{\otimes} E \to [\mathscr{I}_1(F',E), \iota_1]$ *è isometrica.*

(vi) *Per ogni spazio di Banch* F *, l'applicazione canonica* $\chi : F' \tilde{\otimes} E \to [\mathscr{I}_1(F,E), \iota_1]$ *è isometrica.*

(vii) *L'applicazione canonica* $\chi : E' \tilde{\otimes} E \to [\mathscr{I}_1(E,E), \iota_1]$ *è isometrica.*

(viii) *Per ogni scelta di successioni* $(x_n) \subset E$ *e* $(x'_n) \subset E'$ *tali che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \, \|x'_n\| < \infty \quad \text{e} \quad \left|\sum_{n=1}^{\infty} \langle Sx_n, x'_n\rangle\right| \leq \|S\| \qquad \textit{per ogni } S \in \mathscr{F}(E,E),$$

risulta

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, x'_n\rangle\right| \leq 1.$$

Come per il Teorema 8, si riconosce facilmente l'equivalenza delle condizioni (i)-(iv) e l'equivalenza delle condizioni (v)-(viii), essenzialmente in base alle definizioni. Infine, la (i) significa che l'identità I di E appartiene alla τ-chiusura di $B_{\mathscr{F}(E,E)}$ e ciò naturalmente avviene se e solo se ogni funzionale $u \in \mathscr{L}_\tau(E,E)'$ tale che $|\langle S,u\rangle| \leq 1$ per ogni $S \in B_{\mathscr{F}(E,E)}$, soddisfa anche $|\langle I,u\rangle| \leq 1$. Ma ciò è proprio quanto asserisce la (viii), per la rappresentazione di u data nel paragrafo precedente.

Osservazione 1 - Se E' ha la proprietà di approssimazione metrica, allora anche E la possiede e in tal caso l'applicazione $\chi : E' \tilde{\otimes} F \to [\mathscr{I}_1(E,F), \iota_1]$ è isometrica. Da questo e dai Teoremi 8 e 10 segue che se E o F' ha la proprietà di approssimazione metrica, allora $[\mathscr{N}_1(F,E), \nu_1]$ è un sottospazio normato di $[\mathscr{I}_1(F,E), \iota_1]$.

Osservazione 2 - E' chiaro che la proprietà di approssimazione metrica implica la proprietà di approssimazione. Se E è uno spazio di Banach riflessivo, oppure separabile e isometrico al duale di un altro spazio di Banach, allora $[\mathscr{I}_1(F,E),\iota_1] = [\mathscr{N}_1(F,E),\nu_1]$ per quanto detto alla fine del §3, e quindi la proprietà di approssimazione e la proprietà di approssimazione metrica sono equivalenti per E. Vedremo però al §III.5 che ciò non è vero in generale.

Osservazione 3 - I seguenti spazi concreti hanno la proprietà di approssimazione metrica: spazi di Hilbert, $L^p(1 \leq p \leq \infty)$, $C(K)$ con K compatto, e quindi $\ell^p(1 \leq p \leq \infty)$, c, c_0, e, più in generale, lo spazio $C_b(Y)$ delle funzioni continue e limitate su uno spazio topologico completamente regolare Y.

Per quanto detto in questo paragrafo rimandiamo a [28] (§§18.4 e 18.5) e a [38] (vol. I, pp.37-40).

6 - Operatori semi-integrali

E' uno dei meriti di Grothendieck l'aver riconosciuto che alcuni ideali interessanti di operatori non hanno buone proprietà di stabilità relativamente alle operazioni canoniche su spazi di Banach, cioé "restrizione alla chiusura dell'immagine" e "passaggio a quozienti", come avevamo già notato nell'Osservazione 2 del §2 a proposito degli operatori nucleari. Questo è anche il caso per gli operatori integrali e perciò Grothendieck fu indotto a dare altre due definizioni. Per introdurle, richiamiamo i seguenti risultati, peraltro ben noti.

1) *Ogni spazio di Banach* E *è isometrico a un sottospazio* $\ell^\infty(\mathbb{A})$ *per un opportuno insieme* $\mathbb{A}$, *e quindi a un sottospazio di uno spazio* L^∞.

Infatti, sia c la minima cardinalità di un insieme denso in B_E. Allora

$B_{E'}$ contiene un insieme debolmente denso $(x'_\alpha : \alpha \in \mathbb{A})$ con card $\mathbb{A} = c$ e l'isometria in questione è data dall'applicazione $E \ni x \to (\langle x, x'_\alpha \rangle) \in \ell^\infty(\mathbb{A})$.

2) *Ogni spazio di Banach* E *è isometrico a un quoziente di* $\ell^1(\mathbb{A})$ *per un opportuno insieme* $\mathbb{A}$, *e quindi a un quoziente di uno spazio* L^1.

Sia c la minima cardinalità di un insieme $(x_\alpha : \alpha \in \mathbb{A})$ denso in B_E. L'applicazione $\ell^1(\mathbb{A}) \ni (\xi_\alpha : \alpha \in \mathbb{A}) \to \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} \xi_\alpha x_\alpha \in E$ è continua e la sua immagine è densa e di seconda categoria, e pertanto una isometria su E in virtù del Teorema dell'Applicazione Aperta.

Denotando, una volta per tutte, con $J_E : E \to L^\infty$ *e* $Q_E : L^1 \to E$ *delle isometrie del tipo di quelle considerate ai punti* 1) *e* 2) rispettivamente, diremo che $T \in \mathscr{L}(E,F)$ *è un'applicazione semi-integrale destra* (risp. *sinistra*) *se* $J_F T$ (risp. TQ_E) *è un'applicazione integrale.*

Il seguente teorema costituisce uno dei maggiori risultati della teoria.

TEOREMA 11 - (a) *Se* $T \in \mathscr{L}(E,F)$ *è un'applicazione semi-integrale destra, allora esistono un compatto* K, *una misura di Radon positiva* μ *su* K *e operatori lineari continui* $S : E \to L^\infty(K,\mu)$, $R : L^2(K,\mu) \to F$ *tali da aversi*

$$T = RJ_{\infty,2}\, S,$$

ove $J_{\infty,2}$ *è l'iniezione canonica* $L^\infty(K,\mu) \to L^2(K,\mu)$.

(b) *Se* $T \in \mathscr{L}(E,F)$ *è un'applicazione semi-integrale sinistra, allora esistono un compatto* K, *una misura di Randon positiva* μ *su* K *e operatori lineari continui* $S : E \to L^2(K,\mu)$, $R : L^1(K,\mu) \to F''$ *tali da aversi*

$$j_F\, T = RJ_{2,1} S,$$

ove $J_{2,1}$ *è l' iniezione canonica* $L^2(K,\mu) \to L^1(K,\mu)$ *e* j_F *è l'isometria canonica* $F \to F''$.

(c) *Se* $T \in \mathcal{L}(E,F)$ *e* $S \in \mathcal{L}(F,G)$ *sono due applicazioni semi-integrali destre o sinistre, allora* ST *è un'applicazione nucleare di* E *in* G.

La (a) segue dal fatto che, essendo l'applicazione $J_F T : E \to L^\infty$ integrale, risulta per la (13),

$$j_{L^\infty} J_F T = R_1 J_{\infty,1} S$$

ove j_{L^∞} è l'isometria canonica $L^\infty \to L^{\infty\,\prime\prime}$. Naturalmente $J_{\infty,1} = J_{2,1} J_{\infty,2}$ e quindi, ponendo $R_2 = R_1 J_{2,1}$, abbiamo

$$j_{L^\infty} J_F\, T = R_2 J_{\infty,2}\, S.$$

Consideriamo l'applicazione $S_1 = J_{\infty,2} S : E \to L^2(K,\mu)$. Poiché l'immagine $R_2 S_1(E)$ è di fatto contenuta in F e quest'ultimo è (isometrico a) un sottospazio di $L^{\infty\,\prime\prime}$, risulta $S_1(E) \subset R_2^{-1}(F)$. Ma $R_2^{-1}(F)$ è un sottospazio chiuso dello spazio di Hilbert $L^2(K,\mu)$ e pertanto, se P è la proiezione ortogonale di quest'ultimo su $R_2^{-1}(F)$, si ha $S_1 = PS_1$, quindi $T = R_2 P S_1 = R_2 P J_{\infty,2} S$ e basta allora porre $R = R_2 P$ per ottenere la fattorizzazione desiderata.

La (b) segue dalla (a) per dualità.

Infine, per dimostrare la (c), per esempio nel caso di due applicazioni semi-integrali destre S,T, utilizziamo la (a) e scriviamo la S nella forma $S = R_1 J_{\infty,2} S_1$. Se I è identità di $L^\infty(K,\mu)$, l'applicazione $S_1 T = I S_1 T$ è integrale per definizione ed, essendo $J_{\infty,2}$ debolmente compatta, l'applicazione $J_{\infty,2} S_1 T$, e quindi anche la ST, sarà nucleare per la (d) del Teorema 7.

Osservazione - Il confronto tra la (a) e la (b) del teorema precedente mostra che le applicazioni semi-integrali sinistre non hanno proprietà così buone come quelle delle applicazioni semi-integrali destre. E' per ciò che quest'ultime sono state l'oggetto di uno studio molto più intenso e approfondito che le prime, portando anche a rilevanti generalizzazioni, come mostreremo in seguito.

Avvertiamo infine che la nomenclatura "applicazioni semi-integrali destre" è stata definitivamente abbandonata, nella letteratura, a favore della terminologia "operatori assolutamente sommanti". La ragione diverrà chiara quando torneremo sull'argomento nel §III.2.

7. - Operatori di potenza p-sommabile ($0 < p \leq 1$) e operatori di ordine 0.

Sia $0 < p \leq 1$. Un operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ si dice di *potenza p-sommabile* se ammette una rappresentazione del tipo

$$(19) \qquad Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \langle x, x_n' \rangle y_n \qquad \text{per ogni } x \in E,$$

con $(\xi_n) \in \ell^p$ e (x_n') e (y_n) successioni limitate in E' e F rispettivamente (cf. Teorema 2). Ovviamente, possiamo sempre supporre che $\|x_n'\| = \|y_n\| = 1$ per ogni n. Denotando con $\mathscr{N}_p$ *la classe degli operatori di potenza p-sommabile* tra spazi di Banach, possiamo munire ogni componente $\mathscr{N}_p(E,F)$ della quasi-norma

$$(20) \qquad \nu_p(T) = \inf \|(\xi_n)\|_{\ell^p}$$

ove l'estremo inferiore è preso su tutte le rappresentazioni (19) di T.

Evidentemente gli operatori di potenza 1-sommabile non sono altro che gli operatori nucleari introdotti al §2. Vale il seguente teorema, analogo al Teorema 3:

TEOREMA 12 - (a) $(\mathscr{N}_p, \nu_p)$ *è un ideale quasi-normato completo in cui* $\mathscr{F}$ *è denso.*

(b) *Se* $p < q$, *allora* $\mathscr{N}_p \subset \mathscr{N}_q$ *e* $\nu_q \leq \nu_p$ *su* $\mathscr{N}_p$.

(c) $T \in \mathscr{N}_p(E,F)$ *se e solo se esistono operatori* $R \in \mathscr{L}(\ell^1,F)$ *e* $S \in \mathscr{L}(E,\ell^\infty)$ *e un operatore diagonale* $D_\xi : \ell^\infty \to \ell^p$ *definito da*

$$D_\xi(\eta_n) = (\xi_n \eta_n) \qquad \textit{per} \qquad (\eta_n) \in \ell^\infty,$$

con $(\xi_n) \in \ell^p$, *tale che si abbia*

$$T = RD_\xi S.$$

(d) $\mathcal{N}_p(H,H) = \mathcal{S}_p(H,H)$ *per ogni spazio di Hilbert* H *e* $\nu_p = \sigma_p$.

(e) *Se* $S \in \mathcal{N}_p$ *e* $T \in \mathcal{N}_q$, *allora* $ST \in \mathcal{N}_r$ *con* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{3}{2}$ e

$$\nu_r(ST) \le \nu_p(S)\, \nu_q(T) .$$

La (a), (c) e (d) sono estensioni al caso $0 < p \le 1$ delle analoghe proprietà degli operatori nucleari. Ovviamente nella (c) R è un operatore continuo da ℓ^p in F. La (b) è conseguenza immediata della (20) e del fatto che $\ell^p \subset \ell^q$ per $p < q$. Infine la (e), che è ovviamente di interesse solo ove risulti $r < 1$, segue essenzialmente dal Teorema I.13(b) per mezzo di opportune fattorizzazioni di S e T attraverso spazi di Hilbert.

L'importanza degli operatori di potenza p-sommabile è sottolineata dal seguente teorema, dimostrato da Grothendieck nello sforzo di identificare, alla luce delle considerazioni fatte al §4, una classe di operatori tra spazi di Banach per i quali la traccia avesse senso e fosse uguale alla somma degli autovalori (problemi (P2) e (P4)).

TEOREMA 13 - (a) *Se* $T \in \mathcal{N}_p(E,E)$, *allora* $(\lambda_n(T)) \in \ell^r$ *con* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ *e*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(T)|^r\right)^{1/r} \le \nu_p(T) .$$

(b) *Se* $T \in \mathcal{N}_p(E,E)$ *con* $p \le 2/3$, *allora esiste la traccia* tr(T) *e*

$$\mathrm{tr}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T).$$

Il teorema mostra che se $p \le 2/3$, allora la traccia è continua su $[\mathcal{N}_p(E,E), \nu_p]$, avendosi per la (a) e (b),

$$|tr(T)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(T)| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(T)^{\ r})^{1/r} \leq \nu_p(T).$$

D'altra parte, la (a) mostra che se T è nucleare, allora $(\lambda_n(T) \in \ell^2$. Questo risultato è il migliore possibile, dal momento che esiste un operatore nucleare su uno spazio $C(K)$ (e si può prendere per K la circonferenza unitaria di $\mathbb{R}^2$), i cui autovalori formano una successione che appartiene a ℓ^2 ma non a ℓ^p per nessun $p < 2$.

Per finire, consideriamo il caso $p = 0$. Poniamo $\ell^\circ = \bigcap_{p>0} \ell^p$ e definiamo *operatore di ordine* 0 ogni operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ che ammetta una rappresentazione del tipo (19) con $(\xi_n) \in \ell^\circ$. Indicheremo poi con $\mathscr{N}_0$ *la classe degli operatori di ordine* 0 tra spazi di Banach. Notiamo subito che la successione (ξ_n) nella (19) può sempre supporsi ordinata in modo tale che la $(|\xi_n|)$ sia non crescente. Ora per una tale successione si ha

$$\infty > c_p = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p \geq n|\xi_n|^{\ p}$$

e pertanto

$$\sup_n n^{1/p}|\xi_n| < \infty \qquad \text{per ogni } \ p > 0 \ .$$

Ma è facile vedere che ciò implica pure

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k|\xi_n| < \infty \qquad \text{per ogni } \ k \in \mathbb{N} \ .$$

Questo ci induce a introdurre *lo spazio* s *delle successioni rapidamente decrescenti,* definito come

$$s = \{(\xi_n) \ : \ p_k(\xi_n) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n^k|\xi_n| < \infty \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}\}.$$

Tale spazio è uno spazio di Fréchet per la topologia generata dalla successione di semi-norme p_k ed è facile verificare che $s \subsetneq \ell^\circ$, l'inclusione essendo continua (notiamo che ℓ° ha una topologia vettoriale naturale che è metrizabile e completa, ma non localmente convessa, dal momento che si ha

$\ell^\circ = \bigcap_{k=1}^{\infty} \ell^{1/k}$).

Possiamo ora enunciare il seguente

TEOREMA 14 - (a) *$\mathcal{N}_0$ è un ideale che può essere dotato di una topologia vettoriale metrizabile e completa (ma non localmente convessa) e $\mathcal{F}$ è denso in $\mathcal{N}_0$ per tale topologia.*

(b) $\mathcal{N}_0 = \bigcap_{p>0} \mathcal{N}_p$.

(c) $T \in \mathcal{N}_0(E,F)$ *se e solo se* T *ammette una rappresentazione del tipo* (19) *con* $(\xi_n) \in s$.

(d) $T \in \mathcal{N}_0(E,F)$ *se e solo se esistono operatori* $R \in \mathcal{L}(s,F)$ (*o* $R \in \mathcal{L}(\ell^\circ,F)$), $S \in \mathcal{L}(E,\ell^\infty)$ *e un operatore diagonale* $D_\xi : \ell^\infty \to s$ (*o* $D_\xi : \ell^\infty \to \ell^\circ$) *definito da*

$$D_\xi(\eta_n) = (\xi_n \eta_n) \qquad \textit{per} \qquad (\eta_n) \in \ell^\infty,$$

con $(\xi_n) \in s$ (*o* $(\xi_n) \in \ell^\circ$), *tali che si abbia*

$$T = RD_\xi S.$$

(e) $T \in \mathcal{N}_0$ *se e solo se* $T' \in \mathcal{N}_0$.

(f) $\mathcal{N}_0(H,H) = \mathcal{S}_0(H,H)$ $(\equiv \mathcal{I}(\ell^\circ))$ *per ogni spazio di Hilbert* H.

Le proprietà (c), (d), (e) e (f) sono di facile verifica, come pure il fatto che $\mathcal{N}_0$ sia un ideale. Ora, per ogni coppia di spazi di Banach E e F risulta $\mathcal{N}_0(E,F) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_{1/k}(E,F)$ (che ci dà la (b)) e quindi $\mathcal{N}_0(E,F)$ può essere munito della topologia limite proiettivo delle topologie generate dalle quasinorme $\nu_{1/k}$ su $\mathcal{N}_{1/k}(E,F)$. Tutte queste topolgie sono metrizabili e complete e tale perciò sarà anche la topologia limite proiettivo su $\mathcal{N}_0(E,F)$. Ne segue la (a), la densità di $\mathcal{F}$ in $\mathcal{N}_0$ essendo conseguenza della densità di $\mathcal{F}$ in $(\mathcal{N}_p,\nu_p)$ per ogni $p > 0$. Per le dimostrazioni, cf [49] (§8.5) o [28] (§19.9).

Osservazione 1 - Gli operatori di potenza p-sommabile forniranno lo spunto per la teoria generale degli "operatori p-nucleari" per $0 < p \leq \infty$, che sarà tratteggiata nel §III.3, ed è quest'ultima nomenclatura che è ormai usata nella letteratura.

Osservazione 2 - Gli operatori di ordine 0 sono oggi chiamati "operatori fortemente nucleari" (o "s-nucleari") e il loro ideale si denota comunemente con $\mathcal{N}_s$. Tali operatori e gli spazi da loro generati sono stati studiati da numerosi autori (per i quali rimandiamo, per esempio, alla bibliografia in [28]), portando quindi a quella generalizzazione della nuclearità che è oggi conosciuta come "λ-nuclearità" (cf. [8]).

III - SEGUENDO GROTHENDIECK

Introduzione

Questa parte finale tratteggia a grandi linee l'evoluzione della teoria degli operatori dall'epoca di Grothendieck ai giorni nostri. Dato l'enorme sviluppo subito dalla teoria a seguito del lavoro di Grothendieck, l'esposizione è necessariamente concisa e, soprattutto, incompleta. Sono evidenziati comunque l'uso della nozione di ideale di operatori e il suo impiego sistematico, dovuto a Pietsch, nella costruzione della teoria moderna così come si presenta oggi. Così, dopo aver passato in rassegna gli ideali più rappresentativi ed alcune procedure per la costruzione di nuovi ideali a partire da ideali dati, si perviene all'esame delle relazioni e dei teoremi di moltiplicazione tra i vari ideali, per terminare infine con alcuni problemi aperti generali che sono fondamentali per la teoria.

1 - Operatori p-approssimabili $(0 < p \leq \infty)$

Siano E e F spazi di Banach e sia $T \in \mathscr{L}(E,F)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definisce *numero di approssimazione di ordine* n *di* T il numero

$$a_n(T) = \inf\{ \|T-S\| : S \in \mathscr{F}(E,F) \text{ e } \dim S(E) < n\} .$$

E' facile verificare che i numeri di approssimazione $a_n(T)$ godono delle seguenti proprietà:

(A1) $\|T\| = a_1(T) \geq \ldots \geq a_n(T) \geq a_{n+1}(T) \geq \ldots \geq 0$.

(A2) $a_n(\lambda T) = |\lambda|\, a_n(T)$ *per ogni scalare* λ.

(A3) $a_{m+n-1}(S+T) \leq a_m(S) + a_n(T)$ *per* $S,T \in \mathscr{L}(E,F)$.

(A4) $|a_m(S) - a_m(T)| \leq \|S-T\|$ *per* $S,T \in \mathscr{L}(E,F)$.

(A5) $a_{m+n-1}(ST) \leq a_m(S)\, a_n(T)$ *per* $T \in \mathscr{L}(E,F)$ *e* $S \in \mathscr{L}(F,G)$.

(A6) $a_n(T) = 0$ *se e solo se* $\dim T(E) < n$.

Chiaramente, un operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ appartiene a $\bar{\mathscr{F}}(E,F)$ se e solo se $(a_n(T)) \in c_o$. In tal caso si ha, per la (A1)

$$\|T\| = \|(a_n(T))\|_{\ell^\infty}.$$

Tutto ciò può essere generalizzato nel modo seguente. Sia $0 < p \leq \infty$. Un operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ sarà detto p-*approssimabile* se la successione $(a_n(T))$ appartiene a ℓ^p per $p < \infty$ e a c_o per $p = \infty$. Indicheremo poi con $\mathscr{A}_p$ *la classe degli operatori* p-*approssimabili* e porremo

(1) $$\alpha_p(T) = \|(a_n(T)\|_{\ell^p} \qquad \text{per } T \in \mathscr{A}_p.$$

Tali classi furono introdotte da Pietsch (cf. [47]) nel 1963.

Per quanto detto sopra, risulta $(\mathscr{A}_\infty, \alpha_\infty) = (\bar{\mathscr{F}} \| \ \|)$. Tale classe è chiamata *classe degli operatori approssimabili* e denotata con $\mathscr{G}$ in onore di Grothendieck. Essa verrà considerata più in dettaglio nel §5 e perciò per il resto di questo paragrafo supporremo $0 < p < \infty$.

Per le classi $\mathscr{A}_p$ vale il seguente

TEOREMA 1 - (a) $(\mathscr{A}_p, \alpha_p)$ *è un ideale quasi-normato completo in cui* $\mathscr{F}$ *è denso.*

(b) *Se* $p < q$, *allora* $\mathscr{A}_p \subset \mathscr{A}_q$ *e* $\alpha_q \leq \alpha_p$ *su* $\mathscr{A}_p$.

(c) *Ogni* $T \in \mathscr{A}_p(E,F)$ *ammette una rappresentazione del tipo*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \langle x, x_n' \rangle y_n \qquad \textit{per ogni } x \in E,$$

ove $(x_n') \subset B_{E'}$, $(y_n) \subset B_F$ *e* $(\xi_n) \in \ell^p$ *è tale che*

$$\|(\xi_n)\|_{\ell^p} \leq 2 \cdot 6^{1/p} \alpha_p(T).$$

(d) $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{N}_1$ *e* $\nu_1 \leq 1.2\alpha_1$ *su* $\mathscr{A}_1$.

(e) $\mathscr{A}_p(H,H) = \mathscr{S}_p(H,H)$ *per ogni spazio di Hilbert* H *e* $\alpha_p = \sigma_p$

La (a) non è troppo difficile da dimostrare, la (b) è ovvia, mentre la (c) richiede una certa accortezza ed implica immediatamente la (d). Finalmente, la (e) segue dal fatto che, *in uno spazio di Hilbert, i numeri di approssimazione coincidono con i numeri caratteristici* che appaiono nel Teorema 11 del §I.8. Ciò mostra che gli ideali $\mathscr{A}_p$ sono una naturale generalizzazione agli spazi di Banach degli ideali $\mathscr{S}_p$ di von Neumann considerati al §I.8. Ma l'analogia si spinge oltre, poiché abbiamo:

TEOREMA 2 - (a) *La traccia è continua su* $\mathscr{F}(E,E)$ *per la quasi-norma* α_1 *e quindi ammette una unica estensione a* $[\mathscr{A}_1(E,E), \alpha_1]$, *avendosi*

(2) $$\operatorname{tr}(T) \leq 12\, \alpha_1(T) \qquad \textit{per ogni} \quad T \in \mathscr{A}_1(E,E).$$

(b) *Se* $T \in \mathscr{A}_1(E,E)$ *allora*

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(T)| < \infty$$

e

(4) $$\operatorname{tr}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T) .$$

La (a) segue immediatamente dalla (c) del Teorema 1, ma non implica assolutamente niente sulla somma degli autovalori. Infatti, la (b) è recente, la (3) essendo dovuta a Johnson, König, Maurey e Retherford [29] e la (4) a König [31].

Per le dimostrazioni del Teorema 1 e del Teorema 2 (a) rimandiamo a [28] (§19.8) (ma cf. anche [49], Chapter 8).

Osserviamo infine che vari altri tipi di "numeri" (cioé di successioni numeriche) possono essere associati ad un operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ e che è addirittura possibile formulare in generale una teoria assiomatica (cf. [50], 11).

2 - Operatori assolutamente p-sommanti ($1 \leq p < \infty$).

Riprendiamo ora gli operatori semi-integrali del §II.6 e notiamo che, come conseguenza del Teorema 11 di tale paragrafo si ha che, se T è un'applicazione semi-integrale destra di uno spazio di Banach E in uno spazio di Banach F, allora per ogni successione $(x_n) \subset E$ tale che $(\langle x_n, x'\rangle) \in \ell^1$ per ogni $x' \in E'$, risulta $(\|T x_n\|) \in \ell^1$. Essendo tale proprietà una caratterizzazione, possiamo allora generalizzare tali applicazioni nel modo seguente.

Innanzitutto, poniamo per $1 \leq p \leq \infty$,

$$\ell^p(E) = \{(x_n) \subset E : (\|x_n\|) \in \ell^p\}$$

ed inoltre

$$c_o(E) = \{(x_n) \subset E : (\|x_n\|) \in c_o\} .$$

E' immediato verificare che $\ell^p(E)$ è uno spazio di Banach per la norma

$$\pi_p[(x_n)] = \|(\|x_n\|)\|_{\ell^p} \qquad \text{se} \quad 1 \leq p \leq \infty ,$$

e che $c_o(E)$ è un sottospazio chiuso di $\ell^\infty(E)$.

Poniamo poi

$$\ell^p[E] = \{(x_n) \subset E : \varepsilon_p[(x_n)] = \sup_{x \in B_{E'}} \|(\langle x_n, x'\rangle)\|_{\ell^p} < \infty\}$$

e

$$c_o[E] = \{(x_n) \subset E : (\langle x_n, x'\rangle) \in c_o \text{ per ogni } x' \in E'\}.$$

Di nuovo, $\ell^p[E]$ è uno spazio di Banach per la norma $\varepsilon_p[(x_n)]$ e $c_o[E]$ è un sottospazio chiuso di $\ell^\infty[E]$. Inoltre, risulta evidentemente,

$$\ell^p(E) \subset \ell^p[E] \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_p[(x_n)] \leq \pi_p[(x_n)] .$$

Siamo ora in grado di dare la seguente definizione. Un operatore $T : E \to F$ è detto *assolutamente* p-*sommante* se $(T x_n) \in \ell^p(F)$ per ogni $(x_n) \in \ell^p[E]$. Gli operatori assolutamente 1-sommanti (cioé le applicazioni semi-integrali destre del §II.6) sono semplicemente chiamati *operatori assolutamente sommanti.*

Osserviamo che per $p = \infty$ si ottengono semplicemente tutti gli operatori in $\mathscr{L}(E,F)$, mentre gli operatori che trasformano elementi di $c_o[E]$ in elementi di $c_o(F)$ sono esattamente gli operatori completamente continui del §I.5. Ciò giustifica la restrizione $1 \leq p < \infty$ che manterremo nel presente paragrafo.

Osserviamo inoltre che un operatore assolutamente p-sommante T è automaticamente continuo. Infatti, se non lo fosse, esisterebbe $(x_n) \in \ell^\infty(E)$ tale che $\|Tx_n\| > 2^n$. Ma allora $(2^{-n}x_n) \in \ell^p[E]$ e $(2^{-n}Tx_n) \notin \ell^p(F)$, da cui una contraddizione.

Indicando con $\mathscr{P}_p(E,F)$ *l'insieme degli operatori assolutamente p-sommanti* da E a F, abbiamo dunque $\mathscr{P}_p(E,F) \subset \mathscr{L}(E,F)$ e risultando

(5) $$\pi_p\,[(Tx_n)] \leq c\ \varepsilon_p\,[(x_n)] \qquad \text{per } T \in \mathscr{P}_p(E,F),$$

possiamo denotare con $\pi_p(T)$ l'estremo inferiore delle costanti c per le quali la disuguaglianza precedente è verificata. Si riconosce allora che π_p è una norma e che vale il

TEOREMA 3 - *Le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

(i) $T \in \mathscr{P}_p(E,F)$.

(ii) *Esiste* $c \geq 0$ *tale che per ogni insieme finito* $(x_1,\dots,x_k)$ *si ha*

(6) $$\Big(\sum_{j=1}^{k} \|Tx_j\|^p\Big)^{1/p} \leq c \sup\{\Big(\sum_{j=1}^{k} |\langle x_j,x'\rangle|^p\Big)^{1/p} : x' \in B_{E'}\} .$$

In tal caso, $\pi_p(T)$ *coincide con la più piccola delle costanti* c *di cui sopra.*

(iii) *Esistono una misura di probabilità* μ *su* $B_{E'}$ *e una costante* $c \geq 0$ *tali da aversi*

(7) $$\|Tx\| \leq c\ \Big(\int_{B_{E'}} |\langle x,x'\rangle|^p\, d\mu(x')\Big)^{1/p} \qquad \textit{per ogni } x \in E.$$

In tal caso, $\pi_p(T)$ *coincide con la più piccola delle costanti* c *di cui sopra.*

(iv) *Esitono uno spazio compatto* K, *una misura di Radon positiva* μ *su* K *e operatori* $S \in \mathscr{L}(E,C(K))$, $R \in \mathscr{L}(L^p(K,\mu),L^\infty)$ *tali da aversi*

(8) $$J_F T = R J_p S,$$

ove J_p *è l'iniezione canonica* $C(K) \to L^p(K,\mu)$ *e* J_F *è l'applicazione* $F \to L^\infty$ *di cui al* §II.6. *In tal caso possiamo scegliere* μ *come una misura di probabilità,* S *come una isometria e* R *tale che* $\|R\| = \pi_p(T)$.

E' abbastanza facile riconoscere l'equivalenza della (i) e (ii) tramite l'equivalenza della (5) e (6). La (7) è ben nota come *disuguaglianza di Pietsch* mentre l'equivalenza della (i) e della (iv) è conosciuta come *Teorema della Fattorizzazione di Pietsch* in onore di quest'ultimo, che intraprese lo studio sistematico degli operatori assolutamente p-sommanti nel 1967 (cf. [48]).

Osservazione 1 - Segue dal Teorema 3, usando la (8), che se $T \in \mathscr{P}_2(E,F)$, allora esistono un compatto K, una misura di Radon positiva μ su K e operatori $S \in \mathscr{L}(E,C(K))$, $R \in \mathscr{L}(L^2(K,\mu),F)$ soddisfacenti le condizioni della (iv) tali che

$$T = RJ_2S.$$

Osservazione 2 - L'equivalenza della (i) e della (iv) del Teorema 3 mostra che J_p è un prototipo di applicazione assolutamente p-sommante.

Possiamo ora enunciare il seguente

TEOREMA 4 - (a) $(\mathscr{P}_p,\pi_p))$ *è un ideale normato completo e quindi contiene* $\mathscr{N}_1$, *avendosi* $\pi_p \leq \nu_1$.

(b) *Se* $p < q$, *allora* $\mathscr{P}_p \subset \mathscr{P}_q$ *e* $\pi_q \leq \pi_p$ *su* $\mathscr{P}_p$.

(c) $\mathscr{P}_p \subset \mathscr{V} \cap \mathscr{W}$

(d) $\mathscr{P}_p(H,H) = \mathscr{S}_2(H,H)$ *per ogni spazio di Hilbert* H.

La verifica della (a) è abbastanza standard, la seconda parte essendo conseguenza del Teorema 4 del §II.2. La (b) segue dalla (6), mentre la (c) è conseguenza della (3) e della (d) del Teorema 3. La (d) invece è difficile ed è un risultato profondo che sfrutta la cosiddetta "disuguaglianza di Khintchine": per i dettagli rimandiamo a [28] (§ 20.5) o a [27] (Exercise 2.E.9).

Osservazione 3 - In generale, gli ideali $\mathscr{P}_p$ e $\mathscr{K}$ sono incomparabili, nel senso che $\mathscr{K} \not\subset \mathscr{P}_p$ e $\mathscr{P}_p \not\subset \mathscr{K}$. La prima risulta dal fatto che se $T \in \mathscr{S}_q(H,H)$

con $q > 2$ ma $T \notin \mathcal{S}_2(H,H)$, allora T appartiene a $\mathcal{K}(H,H)$ ma non a $\mathcal{P}_p(H,H)$, per la (d). La seconda risulta dal fatto che, per esempio, l'iniezione canonica $J_p : C(K) \to L^p(K,\mu)$ appartiene a $\mathcal{P}_p$ per l'Osservazione 2, ma certamente non appartiene a $\mathcal{K}$ Ne concludiamo che $\mathcal{F}$ non è denso in $(\mathcal{P}_p, \pi_p)$.

Per le dimostrazioni, vedasi [28] (§§ 19.4, 19.5 e 19.6) o [27] (§2.5 e 2.6).

3 - Operatori p-nucleari, quasi-p-nucleari e p-integrali ($1 \leq p \leq \infty$).

Come nel paragrafo precedente abbiamo generalizzato il concetto di operatore assolutamente sommante a quello di operatore assolutamente p-sommante, possiamo nello stesso modo generalizzare la nozione di operatore nucleare. Precisamente, per cominciare sia $0 < p < \infty$. Un operatore $T : E \to F$ sarà detto *p-nucleare* se esistono successioni $(x_n') \in \ell^p(E')$ e $(y_n) \in (\ell^p)'[F]$ tali che

$$(9) \qquad Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n' \rangle y_n \qquad \text{per ogni } x \in E.$$

Per estendere tale definizione al caso $p=\infty$ useremo $c_0(E')$ in luogo di $\ell^\infty(E')$ e quindi T sarà detto *∞-nucleare* se ammette una rappresentazione del tipo (9) con $(x_n') \in c_0(E')$ e $(y_n) \in \ell^1[F]$.

Denoteremo con $\mathcal{N}_p$ *la classe degli operatori* p-*nucleari* ($0 < p \leq \infty$). Tali operatori, come pure gli operatori p-integrali che verranno discussi più tardi, furono introdotti da Persson e Pietsch nel 1969 (cf. [46]).

Notiamo subito che la (9) può sempre essere posta nella forma

$$(10) \qquad Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \langle x, x_n' \rangle y_n \qquad (x \in E)$$

con $(\xi_n) \in \ell^p$, $(x'_n) \subset B_{E'}$ e $(y_n) \in (\ell^p)'[F]$. Ma, essendo $(\ell^p)' = \ell^\infty$ per $0 < p \leq 1$, vediamo subito per la (10) che gli operatori p-nucleari con $0 < p \leq 1$ non sono altro che gli operatori di potenza p-sommabile già trattati al §II.7. Pertanto, per il resto di questo paragrafo possiamo limitarci al caso $1 \leq p \leq \infty$.

Ponendo, con le notazioni del paragrafo precedente,

$$\nu_p(T) = \inf \{\pi_p[(x'_n)] \cdot \varepsilon_{p'}[(y_n)]\} \qquad (\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$$

per ogni $T \in \mathcal{N}_p(E,F)$, ove l'estremo inferiore è preso su tutte le rappresentazioni del tipo (9), otteniamo una norma su $\mathcal{N}_p$. Sussiste allora il seguente teorema, analogo al Teorema 12 del §II.7.

TEOREMA 5 - (a) *Se* $1 \leq p \leq \infty$, $(\mathcal{N}_p, \nu_p)$ *è un ideale normato completo per il quale valgono le proprietà* (a)-(c) *del Teorema* 12 *del* §II.7 (*con* c_0 *al posto di* ℓ^p *per* $p = \infty$).

(b) *Se* $1 < p \leq \infty$, $\mathcal{N}_p(H,H) = \mathcal{S}_2(H,H)$ *per ogni spazio di Hilbert* H.

Come per gli operatori nucleari (cf. l'Osservazione 2 del §II.2), se $T \in \mathcal{N}_p(E,F)$ e G è un sottospazio chiuso di F contenente T(E), non accade in genere che $T \in \mathcal{N}_p(E,G)$. A questa difficoltà si può ovviare considerando, in luogo di $\mathcal{N}_p$, *la classe* $\mathcal{Q}_p$ *degli operatori quasi*-p-*nucleari* definiti come segue. Richiamando quanto detto all'inizio del §II.6, diremo che un operatore $T \in \mathcal{L}(E,F)$ è *quasi*-p-*nucleare* $(1 \leq p \leq \infty)$ se l'operatore $J_F T$ è p-nucleare. In altre parole, $T \in \mathcal{Q}_p(E,F)$ se e solo se $J_F T \in \mathcal{N}_p(E,L^\infty)$. Abbiamo allora, con la solita convenzione di usare c_0 al posto di ℓ^p per $p = \infty$,

TEOREMA 6 - (a) $T \in \mathcal{Q}_p(E,F)$ *se e solo se esiste* $(x'_n) \in \ell^p(E')$ *tale da aversi*

$$\|Tx\| \leq \|(\langle x,x'_n\rangle)\|_{\ell^p} \quad \textit{per ogni } x \in E. \tag{11}$$

In tal caso, si ottiene una norma q_p *su* $\mathcal{Q}_p(E,F)$ *considerando la quantità*

$$q_p(T) = \inf \pi_p[(x_n')],$$

l'estremo inferiore essendo preso su tutte le successioni (x_n') e $\ell^p(E')$ *per le quali la* (11) *risulti verificata.*

(b) $(\mathcal{Q}_p, q_p)$ *è un ideale normato completo contenente* $\mathcal{N}_p$ *e* $q_p \leq \nu_p$ *su* $\mathcal{N}_p$.

(c) *Se* $p < r$, *allora* $\mathcal{Q}_p \subset \mathcal{Q}_r$ *e* $q_r \leq q_p$ *su* $\mathcal{Q}_p$.

(d) $[\mathcal{Q}_2, q_2] = [\mathcal{N}_2, \nu_2]$.

(e) $[\mathcal{Q}_\infty, q_\infty] = [\mathcal{K}, \|\cdot\|]$.

(f) *Se* $1 \leq p < \infty$ *allora* $\mathcal{Q}_p \subset \mathcal{P}_p$ *e* $\pi_p = q_p$ *su* $\mathcal{Q}_p$.

(g) *Se* E' *o* F *ha la proprietà di approssimazione allora* $\mathcal{F}(E,F)$ *è denso in* $[\mathcal{Q}_p(E,F), q_p]$ *e pertanto quest'ultimo ideale è la chiusura di* $\mathcal{F}(E,F)$ *in* $[\mathcal{P}_p(E,F), \pi_p]$.

(h) *Se* $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{Q}_p(H,H) = \mathcal{S}_2(H,H)$ *per ogni spazio di Hilbert* H.

Le dimostrazioni delle proprietà (a),(b),(c) e (f) sono piuttosto standard, mentre la (d) segue dal fatto che ogni sottospazio chiuso di ℓ^2 ha un complementare topologico e la (e) da una ben nota caratterizzazione degli operatori compatti.La (g) e la (h) per p = 1 richiedono invece più attenzione mentre la (h) per $1 < p < \infty$ segue immediatamente dalla (b), (f) e dai Teoremi 4(d) e 5(b).

Continuando nello stesso ordine di idee, generalizziamo infine la nozione di operatore integrale usando la caratterizzazione fornita dal Teorema 6 del §II.3. Precisamente, per $1 \leq p \leq \infty$ diremo che un operatore $T \in \mathcal{L}(E,F)$ è p-*integrale* se esistono un compatto K, una misura di Radon μ su K e operatori $S \in \mathcal{L}(E, L^\infty(K,\mu))$ [o $S \in \mathcal{L}(E, C(K))$] e $R \in \mathcal{L}(L^p(K,\mu), F'')$ tali da aversi

(12) $$j_F T = R\, J_{\infty,p} S,$$

ove j_F è l'isometria canonica di F in F" e $J_{\infty,p}$ è l'immersione canonica di $L^\infty(K,\mu)$ in $L^p(K,\mu)$, quest'ultima essendo quindi un prototipo di operatore p-integrale. Ponendo

$$\iota_p(T) = \inf \|R\|\, \|S\|,$$

ove l'estremo superiore è preso su tutte le fattorizzazioni del tipo (12), si ottiene una norma ι_p sull'*insieme* $\mathcal{I}_p(E,F)$ *di tutti gli operatori* p-*integrali* da E ad F, avendosi inoltre

TEOREMA 7 - (a) $(\mathcal{I}_p, \iota_p)$ *è un ideale normato completo contenente* $\mathcal{N}_p$.

(b) *Se* $p < q$, *allora* $\mathcal{I}_p \subset \mathcal{I}_q$ *e* $\iota_q \leq \iota_p$ *su* $\mathcal{I}_p$.

(c) $(\mathcal{I}_2, \iota_2) = (\mathcal{P}_2, \pi_2)$, *ma* $\mathcal{I}_p \subsetneqq \mathcal{P}_p$ *per* $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$.

(d) *Se* $1 < p \leq \infty$, $\mathcal{I}_p(H,H) = \mathcal{S}_2(H,H)$ *per ogni spazio di Hilbert* H.

(e) $T \in \mathcal{P}_p(E,F)$ *se e solo se* $J_F T \in \mathcal{I}_p(E,F)$.

Come al solito, la (a) e la (b) sono standard, mentre la prima parte della (c) segue dalla (12) e dall'Osservazione 1 del §2. Per la seconda, osserviamo che l'iniezione canonica $\ell^1 \to \ell^2$ è assolutamente sommante, ma certo non integrale; per il caso $1 < p < \infty$ e $p \neq 2$ rimandiamo a [45] o a [50](22.4.13, remark). Infine la (d) segue essenzialmente dalla (e) e dal Teorema 4(d), mentre la (e) mostra che gli operatori p-integrali e assolutamente p-sommanti stanno nella stessa relazione degli operatori p-nucleari e quasi-p-nucleari. Ciò motiverà una delle procedure che saranno discusse al §6.

Per le dimostrazioni rimandiamo a [28](§§ 19.7, 20.5 e 19.6.6).

4 - Operatori p- fattorizzabili ($1 \leq p \leq \infty$) e operatori di Hilbert.

Considerando gli operatori introdotti nei paragrafi precedenti, si nota immediatamente una caratteristica comune e cioé che tutti sono caratterizzati per mezzo di opportune fattorizzazioni del tipo $L^{\infty} \to L^{p}$ o $C(K) \to L^{p}$. Isolando questo aspetto, possiamo allora definire *p-fattorizzabile* ($1 \leq p \leq \infty$) un operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ per il quale esistono operatori $S \in \mathscr{L}(E,L^{p}(X,\mu))$ e $R \in \mathscr{L}(L^{p}(X,\mu),F'')$ tali che

$$j_F T = RS, \tag{13}$$

ove j_F è, come al solito, l'isometria canonica di F in F''. Qui (X,μ) è un opportuno spazio dotato di misura, che possiamo sempre assumere positiva. Ovviamente, gli operatori ∞-fattorizabili non sono altro che gli operatori ∞-integrali. Denotiamo con $\mathscr{L}_p(E,F)$ *l'insieme di tutti gli operatori* p-*fattorizzabili* da E a F. Ponendo

$$\lambda_p(T) = \inf \|R\| \; \|S\| ,$$

ove l'estremo inferiore è preso su tutte le fattorizzazioni del tipo (13), otteniamo una norma su $\mathscr{L}_p(E,F)$. Per quanto detto sopra, $(\mathscr{L}_\infty,\lambda_\infty) = (\mathscr{I}_\infty,\iota_\infty)$.

Osserviamo inoltre che $T \in \mathscr{L}_2$ se e solo se T ammette una fattorizzazione del tipo (13) attraverso uno spazio di Hilbert. E' per questo che un tale operatore T è detto *operatore di Hilbert* e la classe $\mathscr{L}_2$ si denota anche con $\mathscr{H}$.

TEOREMA 8 - (a) $(\mathscr{L}_p,\lambda_p)$ *è un ideale normato completo.*

(b) $\mathscr{I}_p \subset \mathscr{L}_p$ *e* $\lambda_p \leq \iota_p$ *su* $\mathscr{I}_p$.

(c) $T \in \mathscr{L}_\infty(E,F)$ *se e solo se esistono un compatto* K *e operatori* $S \in \mathscr{L}(E,C(K))$, $R \in \mathscr{L}(C(K),F'')$ *tali da aversi*

$$j_F T = RS.$$

(d) $T \in \mathscr{L}_2(E,F)$ *se e solo se esistono uno spazio di Hilbert* H *e operatori*

$S \in \mathscr{L}(E,H), R \in \mathscr{L}(H,F)$ *tali che*

$$T = RS.$$

(e) *Se* $1 < p < \infty$, $\mathscr{L}_p(H,H) = \mathscr{L}(H,H)$ *per ogni spazio di Hilbert* H.

La (a) è di facile verifica, per la (b) basta confrontare le fattorizzazioni (12) e (13), la (c) segue dall'identità $\mathscr{L}_\infty = \mathscr{I}_\infty$ e dalla definizione di operatori p-integrali, mentre la (d) si stabilisce con una dimostrazione simile a quella del Teorema 11(a) del §II.6 (cf. anche l'Osservazione 1 del §2). Infine la (e) proviene dalla fattorizzazione attraverso L^p degli spazi a dimensione finita ℓ^2_n (cf. [50], §§ 19.3 e 22.1).

Lo studio sistematico degli operatori in $\mathscr{L}_p$ fu intrapreso in [37],[33] e [40].

5 - Controesempi alla proprietà di approssimazione e loro conseguenze.

Riprendiamo adesso il problema dell'approssimazione trattato nei §§II.4 e II.5. Nel 1973 Enflo [10] pubblicò il suo famoso controesempio alla proprietà di approssimazione mostrando che esiste un sottospazio chiuso di c_0 senza la proprietà di approssimazione, con questo risolvendo negativamente il problema (P6) e quindi anche il problema della base (P5) (cf. §I.6) e il relazionato problema dell'approssimazione metrica (cioé se tutti gli spazi di Banach hanno la proprietà dell'approssimazione metrica, cf. § II.5).

Successivamente, vari autori hanno migliorato l'esempio di Enflo mostrando che anche gli spazi ℓ^p $(1 \leq p < \infty\ , p \neq 2)$ contengono sottospazi senza la proprietà di approssimazione, mentre Figiel e Johnson [11], sempre nel 1973, riuscivano a dimostrare l'esistenza di spazi di Banach aventi la proprietà dell'approssimazione ma non quella dell'approssimazione metrica. Per i dettagli, cf. [38](vol. I, § 2 d e p. 42, vol. II, pp. 107-111).

In base ai Teoremi 8 e 9 del §II.4 l'esistenza di uno spazio di Banach E *senza la proprietà di approssimazione* ha le seguenti notevolissime conseguenze.

1) *L'applicazione* $\chi : E' \tilde{\otimes} E \to \mathscr{L}(E,E)$ *non è iniettiva* e quindi anche il problema (P7) del §II.1 è risolto negativamente.

2) *Le norme* π *e* ν_1 *non coincidono su* $E' \otimes E$, *e quindi la traccia non può essere estesa a* $\mathscr{N}_1(E,E)$. In altre parole, esiste $T \in \mathscr{N}_1(E,E)$ per il quale la traccia non può essere definita.

3) *Esiste un operatore* $T \in \mathscr{N}_1(c_0,c_0)$ *con* $T^2 = 0$ *e* $\mathrm{tr}(T) = 1$. Per un tale T gli autovalori sono evidentemente tutti nulli, quindi la traccia spettrale è nulla e non può ovviamente coincidere con $\mathrm{tr}(T)$. Pertanto anche il problema (P4) del §I.2 è risolto negativamente per il caso degli spazi di Banach.

4) *L'operatore* T *di cui al punto* 3) *può essere scelto come una matrice* $A = ((a_{kn}))$ *di scalari tale che* $A^2 = 0$, *per ogni* k *risulta* $a_{kn} \neq 0$ *solo per un numero finito di valori di* n *e*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\max |a_{kn}|)^p < \infty \qquad \textit{per ogni } p > \frac{2}{3} .$$

Osserviamo che in tale disuguaglianza non può prendersi $p \leq \frac{2}{3}$ perché allora l'operatore T apparterrebbe ad $\mathscr{N}_{2/3}$ e quindi la sua traccia coinciderebbe con la traccia spettrale, per il Teorema 13(b) del §II.7.

Infine, dal fatto che esiste uno spazio di Banach F per cui $\bar{\mathscr{F}}(F,E) \subsetneq \mathscr{K}(F,E)$ deduciamo il seguente fondamentale

TEOREMA 9 - $\mathscr{G} \subsetneq \mathscr{K}$.

Ricordiamo che $\mathscr{G}$ è la classe $(\bar{\mathscr{F}}, \| \ \|)$ degli operatori approssimabili introdotti al §1. E' naturale che l'inclusione propria asserita dal Teorema 9, conseguenza diretta dell'esempio di Enflo, abbia motivato uno studio intenso della classe $\mathscr{G}$. Qui ci limiteremo a dare le seguenti proprietà.

TEOREMA 10 - (a) $\mathscr{G}$ *è un ideale normato completo ed è il più piccolo ideale chiuso in* $\mathscr{L}$.

(b) $\mathscr{A}_p \subset \mathscr{G}$ *e* $\| \ \| \leq \alpha_p$ *su* $\mathscr{A}_p$ *per ogni* $p > 0$.

(c) $\mathscr{N}_p \subset \mathscr{G}$ *e* $\| \ \| \leq \nu_p$ *su* $\mathscr{N}_p$ *per ogni* $0 < p \leq \infty$.

(d) $T \in \mathscr{G}$ *se e solo se* $T' \in \mathscr{G}$.

(e) $T \in \mathscr{K}(E,F)$ *se e solo se* $J_F T \in \mathscr{G}(E,L^\infty)$.

(f) $T \in \mathscr{K}(E,F)$ *se e solo se* $TQ_E \in \mathscr{G}(L^1,F)$.

(g) $\mathscr{G}(H,H) = \mathscr{K}(H,H)$ *per ogni spazio di Hilbert* H.

Le proprietà (a),(b),(c) e (g) sono più o meno evidenti. La (d) non lo è, in quanto dovuta alle (certamente non ovvie) uguaglianze $a_n(T) = a_n(T')$ per ogni $T \in \mathscr{K}$ e ogni $n \in \mathbb{N}$ (cf. [50], § 11.7.4 p. 152). Per la (e) osserviamo che se $T \in \mathscr{K}(E,F)$ allora $J_F T \in \mathscr{K}(E,L^\infty) = \mathscr{G}(E,L^\infty)$ dal momento che L^∞ ha la proprietà di approssimazione. Viceversa se $J_F T \in \mathscr{G}(E,L^\infty)$, allora $J_F T \in \mathscr{K}[E, \overline{J_F T(E)}]$, quindi $T = J_F^{-1} J_F T \in \mathscr{K}[E,\overline{T(E)}]$ e, a fortiori, $T \in \mathscr{K}(E,F)$. Infine, per la (f) notiamo che $TQ_E \in \mathscr{G}(L^1,F)$ implica $TQ_E \in \mathscr{K}(L^1,F)$ e quindi $T \in \mathscr{K}(E,F)$. Viceversa se $T \in \mathscr{K}(E,F)$, allora $TQ_E \in \mathscr{K}(L^1,F)$ e pertanto $TQ_E \in \mathscr{G}(L^1,F)$ (cf. [28], Teorema 2, p. 404), dal momento che il duale L^∞ di L^1 ha la proprietà di approssimazione.

Concludiamo con la seguente

Osservazione - Siano E e F spazi di Banach tali che né E' né F hanno la proprietà di approssimazione metrica, ma F ha la proprietà di approssimazione (cf. [11]). Il Teorema 10 del §II.5 ci dice allora che l'applicazione $X : E' \tilde{\otimes} F \to [\mathscr{I}_1(E,F), \iota_1]$, che è iniettiva, non è isometrica e ciò implica che $[\mathscr{N}_1(E,F),\nu_1]$ non è un sottospazio normato di $[\mathscr{I}_1(E,F),\iota_1]$, in virtù dell'Osservazione 1 del §II.5.

Inoltre, in [11] Figiel e Johnson stabiliscono l'esistenza di un operatore

$T \notin \mathcal{N}_1$ tale che $T' \in \mathcal{N}_1$ (cf. l'Osservazione 2 del §II.2).

6 - Procedure.

Questo paragrafo è dedicato alla costruzione di nuovi ideali di operatori a partire da ideali dati. Non enumereremo tutti i metodi in esistenza, ma solo i più significativi. Una regola

$$r : \mathcal{J} \to \mathcal{J}^r$$

che definisce un nuovo ideale $\mathcal{J}^r$ per ogni ideale $\mathcal{J}$ è chiamata *procedura* Menzioniamo due proprietà speciali delle quali godono molte procedure.

Monotonia se $\mathcal{J} \subset \mathcal{Y}$, allora $\mathcal{J}^r \subset \mathcal{Y}^r$.

Idempotenza $(\mathcal{J}^r)^r = \mathcal{J}^r$ per ogni $\mathcal{J}$.

Motivati dai Teoremi 7 e 8 del §I.5, dalle definizioni del §II.6 e, più in generale, dalle definizioni del §3 e dai Teoremi 7(e), 9 e 10, studieremo le seguenti procedure: *chiusura, duale, iniettiva* e *surgettiva*. Per il resto di questa Parte III invitiamo il lettore a tener presene per sua comodità la Tabella degli Ideali (considerati in questo testo) che abbiamo riportato a pp. 82-83.

1) Chiusura

Sia $\mathcal{J}$ un ideale di operatori. Un operatore $T \in \mathcal{L}(E,F)$ tra spazi di Banach appartiene alla *chiusura* $\bar{\mathcal{J}}$ se $T \in \bar{\mathcal{J}}(E,F)$ in $\mathcal{L}(E,F)$.

E' chiaro che $\bar{\mathcal{J}}$ *è un ideale di operatori* e che *la regola*

$$c : \mathcal{J} \to \bar{\mathcal{J}}$$

è una procedura monotona e idempotente. Naturalmente, un ideale $\mathcal{J}$ è *chiuso* se e solo se $\mathcal{J} = \bar{\mathcal{J}}$. La chiusura è la più antica delle procedure ed abbiamo il seguente

TEOREMA 11 - (a) *Gli ideali* $\mathcal{G}, \mathcal{K}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ *sono chiusi.*

(b) $\bar{\mathcal{A}}_p = \bar{\mathcal{F}} = \bar{\mathcal{N}}_p = \bar{\mathcal{N}}_o = \mathcal{G}$.

(c) $\bar{\mathcal{Q}}_p = \mathcal{K}$.

(d) $\mathcal{I}(\lambda) = \bar{\mathcal{S}}_p = \mathcal{G} = \mathcal{K}$ *per spazi di Hilbert.*

Per la (a) osserviamo che $\mathcal{G}$ è chiuso per definizione ed è il più piccolo ideale chiuso, mentre $\mathcal{K}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ sono chiusi per il Teorema 7 del §I.5. (b) e (d) seguono dal fatto che gli ideali in questione contengono $\mathcal{F}$ e sono contenuti in $\mathcal{G}$, mentre la (c) segue dal Teorema 6.

2) <u>Duale</u>

Sia $\mathcal{I}$ un ideale di operatori. Un operatore $T \in \mathcal{L}(E,F)$ appartiene al duale $\mathcal{I}^d$ se $T' \in \mathcal{I}(F',E')$. $\mathcal{I}^d$ *è un ideale di operatori* e *la regola*

$$d : \mathcal{I} \to \mathcal{I}^d$$

è una procedura monotona. Si noti che *tale procedura non è idempotente* perché, in generale, $\mathcal{I}$ *e* $(\mathcal{I}^d)^d$ *non sono comparabili.* Infatti, per quanto detto alla fine dell'Osservazione del §5, vi sono operatori $T \notin \mathcal{N}_1$ con $T' \in \mathcal{N}_1$. Ne segue, per il Teorema 3(c) del §II.2, che $\mathcal{N}_1 \subsetneq \mathcal{N}_1^d$. Ma allora $\mathcal{N}_1^d \subset \mathcal{N}_1^{dd}$ per la monotonia e quindi $\mathcal{N}_1 \subsetneq \mathcal{N}_1^{dd}$. D'altra parte, se X è l'ideale degli operatori $T \in \mathcal{L}(E,F)$ con $T(E)$ separabile, è chiaro che $X^{dd} \subsetneq X$ (ed infatti l'identità di c_o o ℓ^1 appartiene a X ma non a X^{dd}). Un ideale $\mathcal{I}$ è detto *simmetrico* se $\mathcal{I} = \mathcal{I}^d$.

TEOREMA 12 - *I seguenti ideali sono simmetrici:* $\mathcal{A}_p, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}(\lambda), \mathcal{K}, \mathcal{N}_o, \mathcal{S}_p, \mathcal{W}$.

Si noti che, in generale, $\mathcal{I}$ e $\mathcal{I}^d$ sono incomparabili come mostra il seguente esempio. E' ben noto che in ℓ^1 ogni successione debolmente convergente è anche fortemente convergente, ma ciò non è vero in c_0 e quindi anche in ℓ^∞. Ne segue che l'identità di ℓ^1 appartiene a $\mathscr{V}$ ma non a $\mathscr{V}^d$, mentre l'identità di c_0 appartiene a $\mathscr{V}^d$ ma non a $\mathscr{V}$.

3) Iniettiva

Sia $\mathscr{I}$ un ideale di operatori. Un operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ appartiene all'*inviluppo iniettivo* $\mathscr{I}^i$ se $J_F T \in \mathscr{I}(E,L^\infty)$. $\mathscr{I}^i$ *è un ideale di operatori*, ovviamente contenente $\mathscr{I}$, e *la regola*

$$i : \mathscr{I} \to \mathscr{I}^i$$

è una procedura monotona e idempotente. $\mathscr{I}$ si dice *iniettivo* se $\mathscr{I} = \mathscr{I}^i$.

TEOREMA 13 - (a) *I seguenti ideali sono iniettivi:* $\mathscr{F}, \mathscr{H}, \mathscr{K}, \mathscr{N}_0, \mathscr{P}_p, \mathscr{Q}_p, \mathscr{V}, \mathscr{W}$.

(b) $\mathscr{G}^i = \mathscr{K}$, $\mathscr{I}_p^i = \mathscr{P}_p$ $(1 \leq p < \infty)$, $\mathscr{N}_p^i = \mathscr{Q}_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$.

L'iniettività di ciascuno degli ideali $\mathscr{F}, \mathscr{H}, \mathscr{K}, \mathscr{N}_0, \mathscr{V}, \mathscr{W}$ è o evidente, o ben nota oppure facile a dimostrarsi. Le due ultime uguaglianze nella (b) seguono dalle definizioni e quindi implicano l'iniettività di $\mathscr{P}_p$ e $\mathscr{Q}_p$, essendo tale procedura idempotente. Infine, dalla $\mathscr{G} \subset \mathscr{K}$ segue $\mathscr{G}^i \subset \mathscr{K}$ mentre l'inclusione opposta deriva dal fatto che ogni spazio L^∞ ha la proprietà di approssimazione.

4) Surgettiva

Sia $\mathscr{I}$ un ideale di operatori. Un operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ appartiene all'*inviluppo surgettivo* $\mathscr{I}^s$ se $TQ_E \in \mathscr{I}(L^1,E)$. $\mathscr{I}^s$ *è un ideale di operatori,* ovviamente contenente $\mathscr{I}$, e *la regola*

$$s : \mathscr{I} \to \mathscr{I}^s$$

è una procedura monotona e idempotente. $\mathscr{I}$ si dice *surgettivo* se $\mathscr{I} = \mathscr{I}^s$.

TEOREMA 14 - (a) *Gli ideali* $\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathcal{N}_0, \mathcal{W}$ *sono surgettivi.*

(b) $\mathcal{G}^s = \mathcal{K}$, $\mathcal{V}^s = \mathcal{L}$.

La (a) è ben nota eccetto per $\mathcal{H}$, per il quale segue dal Teorema 13(a) e dal Teorema 15 più in basso. Chiaramente $\mathcal{G}^s \subset \mathcal{K}$, mentre l'inclusione opposta segue dal fatto che il duale di L^1 ha la proprietà di approssimazione. Infine l'inclusione $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}^s$ può essere stabilita notando che, se $T \in \mathcal{L}(E,F)$, allora E può essere rappresentato come il quoziente di uno spazio $\ell^1(\Lambda)$ (ove Λ è un insieme opportuno di indici) e per quest'ultimo spazio l'identità appartiene a $\mathcal{V}$, come osservato subito dopo il Teorema 12.

Ovviamente le procedure 3) e 4) non hanno senso per gli ideali hilbertiani $\mathcal{I}(\lambda)$ e $\mathcal{S}_p$.

Concludiamo questo paragrafo notando che iniettività e surgettività sono proprietà duali, dal momento che vale il seguente

TEOREMA 15 - *Per ogni ideale* $\mathcal{I}$ *risulta*

$$\mathcal{I}^{is} = \mathcal{I}^{si}, \quad \mathcal{I}^{ds} = \mathcal{I}^{id} \quad e \quad \mathcal{I}^{di} \subset \mathcal{I}^{si},$$

l'inclusione a destra potendo essere propria. Ne segue che se $\mathcal{I}$ *è iniettivo (risp. surgettivo), allora* $\mathcal{I}^d$ *è surgettivo (risp. iniettivo) e che, pertanto, iniettività e surgettività sono equivalenti per ogni ideale simmetrico.*

7 - Relazioni tra ideali.

I vari teoremi che abbiamo riportato sugli ideali qui trattati mostrano che esistono molte relazioni di inclusione tra questi ideali. Per comodità del lettore illustriamo queste relazioni nella Tabella delle Inclusioni riportata a p. 84, ove le frecce indicano inclusione. Ci sembra doveroso, a questo proposito, fare un certo numero di osservazioni, specialmente a proposito delle inclusioni più significative o sorprendenti. Con riferimento alla Tabella delle Inclusioni procederemo dall'alto verso il basso.

Osservazione 1 - *Tutte le inclusioni sono proprie,* in generale: ciò è evidente per la maggior parte di esse, mentre per le restanti daremo esempi in seguito.

Osservazione 2 - *Per ogni ideale* $\mathcal{I}$ *e numeri reali* $0 < s < t < \infty$ *si ha* $\mathcal{I}_s \subset \mathcal{I}_t$, *l'inclusione essendo propria.* Ciò è di facile verifica eccetto per $\mathcal{P}_s$ e $\mathcal{I}_s$ $(1 \leq s < \infty)$. Ora il caso di $\mathcal{I}_s$ segue da quello di $\mathcal{P}_s$ (Teorema 7(e)) e per quest'ultimo si può dimostrare che l'iniezione canonica $C(K) \to L^t(K,\mu)$ $(1 < t < \infty)$, che appartiene a $\mathcal{P}_t$ per l'Osservazione 2 del §2, non appartiene a nessun ideale $\mathcal{P}_s$ con $1 \leq s < t$ (cf., per esempio, [27] , Exercise 2.E.3 p. 123).

Osservazione 3 - Le inclusioni, e il fatto di essere proprie, sono tutte o evidenti, o conseguenza dei teoremi enunciati e delle osservazioni fatte, con eccezione forse delle seguenti: $\mathcal{N}_r \to \mathcal{A}_{\frac{r}{1-r}}$ per $0 < r < 1$ e

$\mathcal{Q}_s \to \mathcal{P}_s$, $\mathcal{I}_s \to \mathcal{L}_s$ per $1 \leq s < \infty$. Ora, abbiamo già visto che $\mathcal{I}_s \subset \mathcal{L}_s$ e

$\mathcal{Q}_s \subset \mathcal{P}_s$; d'altra parte la prima inclusione è ovviamente propria perché l'identità I_s di L^s appartiene a $\mathcal{L}_s$ ma certo non a $\mathcal{I}_s$ (che altrimenti $I_s = I_s^2$ sarebbe nucleare per il Teorema 7(d) del §II.3, quindi compatta e perciò L^s avrebbe dimensione finita), mentre la seconda lo è perché l'iniezione canonica $C(K) \to L^s(K,\mu)$ appartiene a $\mathcal{P}_s$ ma non a $\mathcal{Q}_s$ dal momento che non è compatta (ricordiamo che $\mathcal{Q}_s \subset \mathcal{K}$ per ogni s).

Mostriamo ora che $\mathcal{N}_r \subset \mathcal{A}_{\frac{r}{1-r}}$ per $0 < r < 1$. Se $T \in \mathcal{N}_r(E,F)$ allora

$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \langle x,x_k' \rangle y_k$ con $(x_k') \subset B_{E'}$, $(y_k) \subset B_F$ e $(\xi_k) \in \ell^r$. Supponendo la successione (ξ_k) non negativa e non crescente, cosa che possiamo sempre fare, abbiamo (cf.§1)

$$a_n(T) \leq \sup_{x \in B_E} \| \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k \langle x,x_k' \rangle y_k \| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k^{1-r} \xi_k^r \leq \xi_n^{1-r} \|(\xi_k)\|_r$$

e quindi $(a_n(T)) \in \ell^{\frac{r}{1-r}}$, cioé $T \in \mathscr{A}_{\frac{r}{1-r}}$ e $\mathscr{N}_r \subset \mathscr{A}_{\frac{r}{1-r}}$. Per vedere che l'inclusione è propria basta considerare il caso degli spazi di Hilbert, nel quale abbiamo, dato che $\frac{r}{1-r} > r$, $\mathscr{A}_{\frac{r}{1-r}} = \mathscr{S}_{\frac{r}{1-r}} \supsetneq \mathscr{S}_r = \mathscr{N}_r$ per il Teorema 1(e) e il Teorema 12 del §II.7.

Infine, $\mathscr{N}_1 \subset \mathscr{G}$ ma $\mathscr{N}_1 \not\subset \mathscr{A}_p$ $(1 \leq p < \infty)$ poiché $\mathscr{N}_1(\ell^\infty,\ell^1) \not\subset \mathscr{A}_p(\ell^\infty,\ell^1)$ $(1 \leq p < \infty)$: basta considerare, come nell'Osservazione 5 più in basso, un operatore diagonale $D_\xi : \ell^\infty \to \ell^1$ tale che $(\xi_n) \in \ell^1$ ma la successione $(a_n(D_\xi))$ nella (14) non appartenga a nessun ℓ^p con $p < \infty$

Osservazione 4 - Non è strano che $\mathscr{P}_2 \not\subset \mathscr{A}_2$ dato che $\mathscr{P}_2$ contiene operatori non compatti. Quello che può forse sorprendere è che pure $\mathscr{A}_2 \not\subset \mathscr{P}_2$, dal momento che $\mathscr{A}_2$ contiene solo operatori compatti in un senso molto "forte". Un esempio di operatore in $\mathscr{A}_2$ ma non in $\mathscr{P}_2$ è fornito dall'operatore diagonale D_ξ $: \mathscr{L}(\ell^2,\ell^1)$ definito da

$$D_\xi (\eta_n) = (\xi_n \eta_n)$$

ove $\xi_n = [n \log (n+1)]^{-1}$. Infatti abbiamo

$$a_n(D_\xi) \leq \sup_{(\eta_n)\in B_{\ell^2}} \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k \, |\eta_k| \leq \Big(\sum_{k=n}^{\infty} \xi_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(D_\xi)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \xi_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k\xi_k^2 < \infty$$

D'altra parte, se fosse anche $D_\xi \in \mathscr{P}_2$ allora, dal momento che l'iniezione canonica $J : \ell^1 \to \ell^2$ appartiene a $\mathscr{P}_2$, si avrebbe $D_\xi J \in \mathscr{P}_2 \circ \mathscr{P}_2 \subset \mathscr{N}_1$ (per il Teorema 18(i) del prossimo paragrafo), cioé $D_\xi \in \mathscr{N}_1$ come operatore $\ell^1 \to \ell^1$. Ma non è difficile vedere che un operatore diagonale $D_\xi \in \mathscr{L}(\ell^1,\ell^1)$ è nucleare se e solo se $(\xi_n) \in \ell^1$, il che non è vero per la successione (ξ_n) considerata.

Osservazione 5 - Quest'ultima osservazione è forse la più importante. Il Teorema 13(b) del §II.7 e il Teorema 2, relativi alla traccia, invitano a confrontare gli ideali $\mathscr{N}_{2/3}$ e $\mathscr{A}_1$ per vedere se l'un teorema non possa dedursi dall'altro. Ciò non è il caso perché gli ideali $\mathscr{N}_{2/3}$ e $\mathscr{A}_1$ non sono comparabili, come procediamo a mostrare. Intanto non è difficile far vedere che un operatore diagonale $D_\xi \in \mathscr{L}(\ell^1,\ell^1)$ appartiene a $\mathscr{A}_1$ se e solo se appartiene a $\mathscr{N}_1$ e quindi se e solo se $(\xi_n) \in \ell^1$. Basta pertanto prendere (ξ_n) in ℓ^1 ma non in $\ell^{2/3}$ per ottenere un operatore in $\mathscr{A}_1$ e non in $\mathscr{N}_{2/3}$. Inversamente, sia $D_\xi : \ell^\infty \to \ell^1$ l'operatore diagonale associato alla successione $\xi_n = [n^{\frac{1}{2}} \log(n+1)]^{-3}$. Poiché $(\xi_n) \in \ell^{2/3}$, abbiamo $D_\xi \in \mathscr{N}_{2/3}$. D'altra parte (ma ciò è tutt'altro che immediato), si ha

$$a_n(D_\xi) = \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(D_\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} [k^{\frac{1}{2}} \log^3(k+1)]^{-1} = +\infty$$

e pertanto $D_\xi \notin \mathscr{A}_1$.

Resta così stabilita l'incomparabilità degli ideali $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{N}_{2/3}$. Possiamo solo dire che entrambi sono propriamente contenuti in $\mathscr{A}_2$, per le Osservazioni 2 e 3.

8 - Teoremi di moltiplicazione

Per finire, consideriamo brevemente alcuni esempi tra i più significativi dei cosiddetti "Teoremi di moltiplicazione", cioé delle relazioni che si ottengono quando si compongono due operatori appartenenti allo stesso ideale o a ideali diversi.

Cominciamo col definire *idempotente* ogni ideale $\mathscr{I}$ per il quale si abbia $\mathscr{I}^2 = \mathscr{I}$. Ovviamente risulta sempre $\mathscr{I}^2 \subset \mathscr{I}$ e quindi per dimostrare l'idempotenza di un ideale $\mathscr{I}$ basta far vedere che $\mathscr{I} \subset \mathscr{I}^2$.

Sussiste il seguente

TEOREMA 16 - *Gli ideali* $\mathscr{F},\mathscr{G},\mathscr{H},\mathscr{K}$, $\mathscr{L}_p$,$\mathscr{N}_0$, $\mathscr{W}$ *sono idempotenti, mentre gli altri non lo sono (ma* $\mathscr{I}(\lambda)$ *lo è per certi spazi* λ).

Infatti, supponiamo per cominciare che $T \in \mathscr{F}(E,F)$. Allora $\dim T(E) < \infty$ e quindi l'iniezione canonica $I : T(E) \to F$ appartiene a $\mathscr{F}(T(E),F)$. Denotando con T_0 l'operatore T pensato come operatore da E a T(E), risulta allora $T_0 \in \mathscr{F}(E,T(E))$ e $T = IT_0$. Dunque $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}^2$.

L'idempotenza di $\mathscr{N}_0$ segue dal Teorema 14(d) del §II.7 e dal fatto che ogni successione in s può scriversi come il prodotto di due successioni in s mentre $\mathscr{H}$ è idempotente perché entrambi gli operatori che intervengono nella fattorizzazione del Teorema 8(d) appartengono a $\mathscr{H}$.

Per $\mathscr{W}$ osserviamo che $T \in \mathscr{W}(E,F)$ *se e solamente se* $T = RS$, *con* $S \in \mathscr{L}(E,G)$ *e* $R \in \mathscr{L}(G,F)$, G *essendo uno spazio di Banach riflessivo* [6].

Ma allora $S \in \mathscr{W}(E,G)$, $R \in \mathscr{W}(G,F)$ e quindi $\mathscr{W} \subset \mathscr{W}^2$.

L'idempotenza di $\mathscr{K}$ segue dal ben noto fatto che per ogni sottoinsieme compatto A di uno spazio di Banach F può trovarsi un insieme compatto e assolutamente convesso $B \subset F$ tale che A sia sottoinsieme compatto dello spazio di Banach F_B generato da B.

Passiamo adesso ad $\mathscr{L}_p$. Usando la definizione, dato $T \in \mathscr{L}_p(E,F)$ per la (13) abbiamo $j_F T = RS$, con $S \in \mathscr{L}(E,L^p)$, $R \in \mathscr{L}(L^p,F'')$ e j_F l'isometria canonica di F in F". Sia I_p l'identità di L^p. Siccome, ovviamente $I_p \in \mathscr{L}_p$, abbiamo $S = I_p S \in \mathscr{L}_p$. Sia poi R_o la restrizione di R alla chiusura $\overline{S(E)}$ in L^p. Evidentemente $R_o \in \mathscr{L}(\overline{S(E)},F)$ e esiste $R \in \mathscr{L}(L^p,F'')$ tale che $j_F R_o = R$. Denotando con I_o l'iniezione canonica di $\overline{S(E)}$ in L^p, ne segue allora che $j_F R_o = R I_o$ e quindi che $R_o \in \mathscr{L}_p$. Dunque $T = RS = R_o S \in \mathscr{L}_p^2$.

Infine, per $\mathscr{G}$ procediamo come segue. Dato $T \in \mathscr{G}(E,F)$ e $\varepsilon > 0$, sia $(T_n) \subset \mathscr{F}(E,F)$ una successione di operatori tali da aversi

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\| \leq (1+\varepsilon)\|T\| .$$

Si scelgano allora operatori $S_n \in \mathscr{F}(E,G_n)$ e $R_n \in \mathscr{F}(G_n,F)$ tali che $T_n = R_n S_n$ e $\|R_n\| = \|S_n\| = \|T_n\|^{\frac{1}{2}}$, ove i G_n sono spazi di Banach opportuni. Sia

$$G = \ell^2(G_n) = \{(x_n) : x_n \in G_n \text{ e } \|(x_n)\| = (\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{G_n}^2)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$$

e siano J_n e Q_n rispettivamente l'iniezione canonica $G_n \to G$ e la proiezione canonica $G \to G_n$. Ponendo

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} J_n S_n \qquad \text{e} \qquad R = \sum_{n=1}^{\infty} R_n Q_n \quad ,$$

risulta

$$\|R\| = \|S\| = (\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|)^{\frac{1}{2}} \leq (1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \|T\|^{\frac{1}{2}}.$$

Inoltre $S \in \mathscr{G}(E,G)$, $R \in \mathscr{G}(G,F)$ e finalmente, $T = RS \in \mathscr{G}^2(E,F)$.

E' bene notare che gli ideali hilbertiani $\mathscr{I}(\lambda)$ sono idempotenti solo per certi spazi λ di successioni (cioé per spazi λ tali che $\lambda = \lambda^2$), mentre il fatto che i rimanenti ideali non siano idempotenti sarà conseguenza più o meno ovvia dei teoremi che daremo in seguito.

Veniamo adesso ad alcuni teoremi notevoli di moltiplicazione per i quali rinviamo il lettore a [50] (sebbene qui i risultati siano sparsi un po' ovunque).

TEOREMA 17 - (a) $\mathscr{A}_p \circ \mathscr{A}_q = \mathscr{A}_r$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, $0 < p,q < \infty$.

(b) $\mathscr{I}_p$ o $\mathscr{I}_q \subset \mathscr{I}_r$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$.

(c) $\mathscr{L}_p$ o $\mathscr{L}_q \subset \mathscr{L}_r$, $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$.

(d) $\mathscr{N}_p$ o $\mathscr{N}_q \subset \mathscr{N}_r$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$, $1 \leq p,q \leq \infty$.

(e) $\mathscr{P}_p$ o $\mathscr{P}_q \subset \mathscr{P}_r$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$, $1 \leq p,q \leq \infty$.

(f) $\mathscr{Q}_p$ o $\mathscr{Q}_q \subset \mathscr{Q}_r$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$, $1 \leq p,q \leq \infty$.

(g) $\mathscr{S}_p$ o $\mathscr{S}_q = \mathscr{S}_r$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, $0 < p,q < \infty$

TEOREMA 18 - (a) $\mathscr{K}$ o $\mathscr{L}_1 \subset \mathscr{P}_1$.

(b) $\mathscr{I}_p$ o $\mathscr{N}_q = \mathscr{N}_r$ e $\mathscr{I}_p$ o $\mathscr{P}_q = \mathscr{I}_r$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$.

(c) $\mathscr{K}$ o $\mathscr{I}_p = \mathscr{N}_p$ e $\mathscr{K}$ o $\mathscr{P}_p$ o $\mathscr{K} = \mathscr{Q}_p$, $1 \leq p < \infty$.

(d) $\mathscr{L}_p \circ \mathscr{P}_p^d \subset \mathscr{I}_p$, $\quad 1 \leq p < \infty$.

(e) $\mathscr{N}_p \circ \mathscr{I}_q$, $\mathscr{N}_p \circ \mathscr{N}_q$, $\mathscr{N}_p \circ \mathscr{P}_q \subset \mathscr{N}_r$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$, $\quad 1 \leq p, q \leq \infty$.

(f) $\mathscr{P}_p \circ \mathscr{I}_q \subset \mathscr{N}_r$, $\mathscr{P}_p \circ \mathscr{N}_q \subset \mathscr{V}_r$ e $\mathscr{P}_p \circ \mathscr{P}_q \subset \mathscr{Q}_r$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$,

$1 < p, q < \infty$.

(g) $\mathscr{P}_p \circ \mathscr{P}_q = \mathscr{P}_r \circ \mathscr{N}_1 = \mathscr{N}_2^2 \subset \mathscr{A}_2$, $1 \leq p,q,r \leq 2$.

(h) $\mathscr{P}_2 \circ \mathscr{H} \subset \mathscr{A}_2$.

(i) $\mathscr{P}_2^2 \subset \mathscr{N}_1 \cap \mathscr{A}_2$, *ma* $\mathscr{P}_2^2 \not\subset \mathscr{A}_p$ $(0 < p < 2)$.

(l) $\mathscr{V} \circ \mathscr{W} = \mathscr{K}$ e $\mathscr{K} \subsetneq \mathscr{W} \circ \mathscr{V} = \mathscr{W} \cap \mathscr{V}$.

(m) $\mathscr{W} \circ \mathscr{I}_1 = \mathscr{N}_1$, *ma* $\mathscr{W} \circ \mathscr{I}_p \not\subset \mathscr{N}_p$ $\qquad (1 < p < \infty)$.

(n) $\mathscr{W} \circ \mathscr{P}_p = \mathscr{P}_p$, $\quad 1 < p < \infty$.

Le dimostrazioni di quasi tutti i risultati enunciati nei due teoremi precendenti sono estremamente tecniche e pertanto qui ci limiteremo a fare solo alcuni commenti e a dare qualcuna delle dimostrazioni meno tecniche. Riguardo al Teorema 18, la (a), la (i) (nella forma $\mathscr{P}_1^2 \subset \mathscr{N}_1$) e la uguaglianza nella (m) sono tre famosi risultati di Grothendieck, ciascuno dei quali è conosciuto con il nome di "Teorema Fondamentale di Grothendieck" (la situazione fa un po' pensare a Weierstrass!). La prima parte della (m) era già stata menzionata (Teorema 7(d) del §II.3), mentre l'inclusione $\mathscr{P}_2^2 \subset \mathscr{N}_1$ era stata essenzialmente dimostrata, seppur nella forma $\mathscr{P}_1^2 \subset \mathscr{N}_1$, nel Teorema 11(c) del §II.6. Per vedere che si ha anche $\mathscr{P}_2^2 \subset \mathscr{A}_2$, ricordando l'Osservazione 1 del § 2 basta considerare il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "T_2"] \arrow[d, "S_2"'] & & F \arrow[rr, "T_1"] \arrow[dr, "S_1"] & & G \\
C(K_2) \arrow[r, "J_2"'] & L^2 \arrow[ur, "R_2"'] & & C(K_1) \arrow[r, "J_2"'] & L^2 \arrow[u, "R_1"']
\end{tikzcd}$$

Dato che $J_2 \in \mathscr{P}_2(C(K),L^2)$, abbiamo $J_2S_1R_2 \in \mathscr{P}_2(L^2,L^2) = \mathscr{S}_2(L^2,L^2) =$ $= \mathscr{A}_2(L^2,L^2)$ per i Teoremi 1(e) e 4(d) e quindi $T_1T_2 = R_1(J_2S_1R_2)J_2S_2 \in \mathscr{A}_2(E,G)$.

Naturalmente questo tipo di dimostrazione implica pure la (h), mentre la (g) può essere ottenuta nel modo seguente. In primo luogo osserviamo che i primi tre ideali nella (g) sono contenuti in $\mathscr{P}_2^2$. Supponiamo poi che siano dati $T_2 \in \mathscr{P}_2(E,F)$ e $T_1 \in \mathscr{P}_2(F,G)$ e consideriamo di nuovo il diagramma di fattorizzazione di cui sopra. Dato che le iniezioni canoniche J_2 appartengono a $\mathscr{P}_2$ abbiamo per la (i) $J_2S_1T_2 = J_2S_1R_2J_2S_2 \in \mathscr{N}_1(E,L^2) = \mathscr{N}_1(E,\ell^2)$. Poniamo $J_2S_1T_2 = T$. Allora, per il Teorema 3(e) del §II.2 esisteranno $R \in \mathscr{L}(\ell^1,\ell^2)$, $S \in \mathscr{L}(E,\ell^\infty)$ e un operatore diagonale $D_\xi : \ell^\infty \to \ell^1$, con $(\xi_n) \in \ell^1$, tali da aversi $T = RD_\xi S$ e quindi

$T_1T_2 = R_1T = R_1RD_\xi S$. Ma $D_\xi \in \mathscr{N}_1(\ell^\infty,\ell^1)$ e $R \in \mathscr{P}_1(\ell^1,\ell^2) = \mathscr{L}(\ell^1,\ell^2)$ (uguaglianza profonda per la cui dimostrazione, di natura tecnica rimandiamo a [38] (vol. I, pp. 69-70)); pertanto $T_1T_2 \in \mathscr{P}_1 \circ \mathscr{N}_1$. Ciò implica immediatamente $\mathscr{P}_r \circ \mathscr{N}_1 = \mathscr{P}_p \circ \mathscr{P}_q = \mathscr{P}_2^2$, per quanto detto sopra. A questo punto resta da far vedere che $\mathscr{P}_2^2 \subset \mathscr{N}_2^2$ e quindi, continuando nella dimostrazione, ripren-

La (d) è più o meno da aspettarsi e non è troppo difficile da dimostrare, mentre la dimostrazione delle (b), (c) e (e) è abbastanza tecnica e di vasta portata. Per concludere, dimostriamo la (f). Per la (c) del Teorema 18 abbiamo

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_p \circ \mathcal{Q}_q &= \mathcal{K} \circ \mathcal{P}_p \circ \mathcal{K} \circ \mathcal{K} \circ \mathcal{P}_q \circ \mathcal{K} = \mathcal{K} \circ \mathcal{P}_p \circ \mathcal{K} \circ \mathcal{P}_q \circ \mathcal{K} \\ &\subset \mathcal{K} \circ \mathcal{P}_p \circ \mathcal{W} \circ \mathcal{P}_q \circ \mathcal{K} \subset \mathcal{K} \circ \mathcal{P}_p \circ \mathcal{P}_q \circ \mathcal{K} \\ &\subset \mathcal{K} \circ \mathcal{P}_r \circ \mathcal{K}_r \circ \mathcal{Q}_r\end{aligned}$$

ove abbiamo usato i Teoremi 16, 18(n) e 17(e).

9 - Problemi aperti

Terminiamo questa schematica della teoria degli operatori enumerando alcuni problemi aperti, che possono servire da incentivo per lo studente, per lo studioso e pure per il cultore della materia.

1) Il problema di restrizione

Dato un ideale $\mathcal{I}$, determinare la sua componente $\mathcal{I}(H,H)$, H essendo uno spazio di Hilbert.

I teoremi enunciati nel testo forniscono la soluzione per tutti gli ideali ivi considerati.

2) Il problema di estensione

Dato un ideale hilbertiano $\mathcal{I}_0$, un ideale $\mathcal{I}$ tra spazi di Banach si chiama *estensione* di $\mathcal{I}_0$ se $\mathcal{I}(H,H) = \mathcal{I}_0(H,H)$ per ogni spazio di Hilbert H. Per esempio, l'ideale $\mathcal{F}(H,H)$ ammette una unica estensione, cioé $\mathcal{F}$. Lo stesso è vero per $\mathcal{S}_0$ $(=\mathcal{I}(\ell^\circ))$, la cui unica estensione è $\mathcal{N}_0$. Si noti a questo proposito che il problema della determinazione degli ideali hilbertiani $\mathcal{I}(\lambda)$ aventi una unica estensione è stato completamente risolto di recente dagli autori in [42]. Ne segue che, al di fuori di tali casi, un ideale hilbertiano $\mathscr{I}_0(H,H)$ possiede un'infinità (in generale) di estensioni diverse e si tratta di determinarne almeno alcune. Per esempio, $\mathscr{S}_1(H,H)$ ha come estensioni $\mathscr{A}_1, \mathscr{I}_1$ e $\mathscr{N}_1$, mentre $\mathscr{S}_2(H,H)$ ha, tra le altre, le estensioni $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{I}_p$ $(1 < p \leq \infty)$, $\mathscr{N}_p$ $(1 < p \leq \infty)$, $\mathscr{P}_p$ $(1 \leq p < \infty)$ e $\mathscr{Q}_p (1 \leq p < \infty)$. Sarebbe interessante, a questo proposito, determinare la "migliore" estensione di $\mathscr{S}_2$ (ma è chiaro che la interpretazione del termine "migliore" è una profonda questione filosofica!).

3) Il problema delle estensioni particolari

Tale problema è intimamente connesso con il problema precedente. Dato un ideale hilbertiano $\mathscr{I}_0$, si possono automaticamente formare varie estensioni di $\mathscr{I}_0$ a ideali tra spazi di Banach. Qui ci limiteremo ad accennare alle due più importanti.

Un operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ appartiene alla *estensione superiore* $\mathscr{I}_0^{sup}$ di $\mathscr{I}_0$ se $RTS \in \mathscr{I}_0(H,H)$ per tutti gli $S \in \mathscr{L}(H,E)$ e $R \in \mathscr{L}(F,H)$ (come al solito, qui prendiamo lo stesso spazio di Hilbert H, di accordo con l'Osservazione del §I.3).

Un operatore $T \in \mathscr{L}(E,F)$ appartiene alla *estensione inferiore* $\mathscr{I}_0^{inf}$ di $\mathscr{I}_0$ se esistono uno spazio di Hilbert H e operatori $S \in \mathscr{L}(E,H)$, $T_0 \in \mathscr{I}_0(H,H)$ e $R \in \mathscr{L}(H,F)$ tali che $T = RT_0S$.

Abbiamo allora il seguente semplicissimo.

TEOREMA 19 - $\mathscr{I}_0^{sup}$ *e* $\mathscr{I}_0^{inf}$ *sono rispettivamente la più grande e la più piccola estensione di* $\mathscr{I}_0$.

Ciò significa che se $\mathscr{I}$ è una qualunque estensione di $\mathscr{I}_0$, allora risulta necessariamente $\mathscr{I}_0^{inf} \subset \mathscr{I} \subset \mathscr{I}_0^{sup}$, come il lettore non avrà alcuna difficoltà a provare.

Dato allora un ideale hilbertiano $\mathscr{I}_0$, sorge il problema di determinare le sue estensioni "privilegiate" $\mathscr{I}_0^{sup}$ e $\mathscr{I}_0^{inf}$. E' bene ricordare che $\mathscr{S}_0$ ammette un'unica estensione, cioé $\mathscr{N}_0$, e che le estensioni superiore e inferiore degli ideali di von Neumann $\mathscr{S}_p$ $(1 \leq p < \infty)$ sono tutte determinate, benché non rientrino tra gli ideali considerati in questo testo(infatti, $\mathscr{S}_p^{inf} = \mathscr{N}_{(p,2,2)}$ e $\mathscr{S}_p^{sup} = \mathscr{P}_{(p,2,2)}$. Per dare un'idea della difficoltà del problema ci limitiamo a osservare che

$$\mathscr{S}_\infty^{inf} \subsetneq \mathscr{G} \subsetneq \mathscr{K} \subsetneq \mathscr{V} \subsetneq \mathscr{S}_\infty^{sup} .$$

Infatti, è chiaro che $\mathscr{S}_\infty^{inf} \subset \mathscr{G}$. Ma l'estensione inferiore è iniettiva e surgettiva ([50], p.219), mentre $\mathscr{G}$ non lo è (Teoremi 13 e 14) e ciò prova la prima inclusione propria. Le altre sono già state dimostrate eccetto l'ultima. Ora, se $T \in \mathscr{V}(E,F)$ e $S \in \mathscr{L}(H,E)$, $R \in \mathscr{L}(F,H)$, allora, essendo $S \in \mathscr{W}(H,E)$, risulta $TS \in \mathscr{K}(H,F)$ per il Teorema 18(1) e quindi $RTS \in \mathscr{K}(H,H) = \mathscr{S}_\infty(H,H)$, cioé $T \in \mathscr{S}_\infty^{sup}$. Dunque $\mathscr{V} \subset \mathscr{S}_\infty^{sup}$. D'altra parte, sia I_p l'identità di ℓ^p per $1 < p < 2$ (risp. $2 < p < \infty$) e siano $S \in \mathscr{L}(\ell^2,\ell^p)$, $R \in \mathscr{L}(\ell^p,\ell^2)$. Per un risultato di H.R. Pitt, $S \in \mathscr{K}(\ell^2,\ell^p)$ (risp. $R \in \mathscr{K}(\ell^p,\ell^2)$) e quindi $RI_pS \in \mathscr{K}(\ell^2,\ell^2) = \mathscr{S}_\infty(\ell^2,\ell^2)$, cioé $I_p \in \mathscr{S}_\infty^{sup}$. Ma $I_p \notin \mathscr{V}$ e quindi $\mathscr{V} \subsetneq \mathscr{S}_\infty^{sup}$.

4) Il problema delle procedure

Considerata una qualsiasi delle procedure delineate al §6 si pone il problema di determinare (se possibile più o meno "intrinsecamente") il nuovo ideale da essa generato. Con questo intendiamo porre il problema di determinare, a partire da un dato ideale $\mathscr{I}$, gli ideali $\bar{\mathscr{I}}, \mathscr{I}^d, \mathscr{I}^i$ e $\mathscr{I}^s$. Naturalmente, dato che le varie procedure non sono commutative in generale, tale problema può essere allargato a quello di determinare, per un dato ideale $\mathscr{I}$, ideali della forma $(((\bar{\mathscr{I}})^d)^i)^s$ ecc., e da qui la possibilità di infinite tesi tendenti ad accertare fantasmagoriche relazioni di appartenenza o fattorizzazione. Rincarando la dose, notiamo che le quattro procedure a cui abbiamo accennato nel §6 non esauriscono le procedure conosciute, né tanto meno quelle che possono essere inventate. Dunque, ci sono dei problemi reali, mentre si possono inventare molti di più problemi fittizi.

5) <u>Il problema delle scale</u>

I Teoremi 17 e 18 suggeriscono il cosiddetto "problema delle scale", cioé il problema di investigare le relazioni di composizione e inclusione tra ideali di operatori appartenenti alla stessa scala (p.e. $\mathscr{I}_p, \mathscr{N}_p, \mathscr{P}_p$ ecc.) o a scale differenti, e di stabilire se le eventuali inclusioni siano proprie o meno. Tale problema comprende, in particolare, il "problema del prodotto", cioé il problema di determinare (più o meno esattamente) l'ideale $\mathscr{I} \circ \mathscr{Y}$ a partire da due ideali dati $\mathscr{I}$ e $\mathscr{Y}$.

Osservazione - Per i problemi 1),2) e 5) si hanno già moltissimi risultati che danno risposte per la maggior parte degli ideali di interesse (non solo per quelli qui considerati).

A nostro parere, i problemi 1) e 2) sono fondamentali. Il 3) è importante (perché permette di controllare il 2) in qualche modo), ma piuttosto "sfuggente" e forse addirittura intrattabile in alcuni casi e ciò vale pure per i problemi 4) e 5).

TABELLA DEGLI IDEALI

Simbolo	Definizione	Fattorizzazione	Componente su H
$\mathscr{A}_p$	operatori p-approssimabili $\overset{(0<p\leq 1)}{\Longrightarrow}$	$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & F \\ \ell^{\infty} \arrow[r, "D_{\xi}"'] & \ell^{1} \arrow[u, "R"'] \end{tikzcd}$	$\mathscr{S}_p$ $(0<p<\infty)$
$\mathscr{F}$	operatori di rango finito		$\mathscr{F}$
$\mathscr{G}$	operatori approssimabili		$\mathscr{K}$
$\mathscr{H}$	operatori di Hilbert $\Longleftrightarrow$	$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "S"'] & & F \\ & H \arrow[ur, "R"'] & \end{tikzcd}$	$\mathscr{L}$
$\mathscr{I}_p$	operatori p-integrali $\Longleftrightarrow$	$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & F \arrow[r, "j_F"] & F'' \\ C(K), L^{\infty}(K,\mu) \arrow[rr, "J_{\infty,p}"'] & & L^{p}(K,\mu) \arrow[u, "R"'] \end{tikzcd}$	$\mathscr{S}_2$ $(1<p\leq\infty)$ $\mathscr{S}_1$ $(p = 1)$
$\mathscr{K}$	operatori compatti		$\mathscr{K}$
$\mathscr{L}_p$	operatori p-fattorizzabili $\Longleftrightarrow$	$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "S"'] & F \arrow[r, "j_F"] & F'' \\ & L^{p}(X,\mu) \arrow[ur, "R"'] & \end{tikzcd}$	$\mathscr{L}$ $(1<p<\infty)$
$\mathscr{N}_p$	operatori p-nucleari $\Longleftrightarrow$	$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] & F \\ \ell^{\infty} \arrow[u, "S"] \arrow[r, "D_{\xi}"'] & \ell^{p} \arrow[u, "R"'] \end{tikzcd}$ $(c_0$ se $p=\infty)$	$\mathscr{S}_2$ $(1<p\leq\infty)$ $\mathscr{S}_p$ $(0<p\leq 1)$
$\mathscr{N}_0$	operatori fortemente nucleari $\Longleftrightarrow$	$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & F \\ \ell^{\infty} \arrow[r, "D_{\xi}"'] & s, \ell^{\circ} \arrow[u, "R"'] \end{tikzcd}$	$\mathscr{S}_0$

$\mathscr{P}_p$ operatori assolutamente p-sommanti $\Longleftrightarrow$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & F \arrow[r, "J_F"] & L^\infty \\ C(K) \arrow[rr, "J_p"'] & & L^p(K,\mu) \arrow[u, "R"'] \end{tikzcd}$$

$\mathscr{S}_2$ $(1 \leq p < \infty)$

$\mathscr{Q}_p$ operatori quasi nucleari $\Longleftrightarrow$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & F \arrow[r, "J_F"] & L^\infty \\ \ell^\infty \arrow[r, "D_\xi"'] & \ell^p \arrow[ur, "R"'] & \end{tikzcd}$$

$(c_o$ se $p=\infty)$

$\mathscr{S}_2$ $(1 \leq p < \infty)$

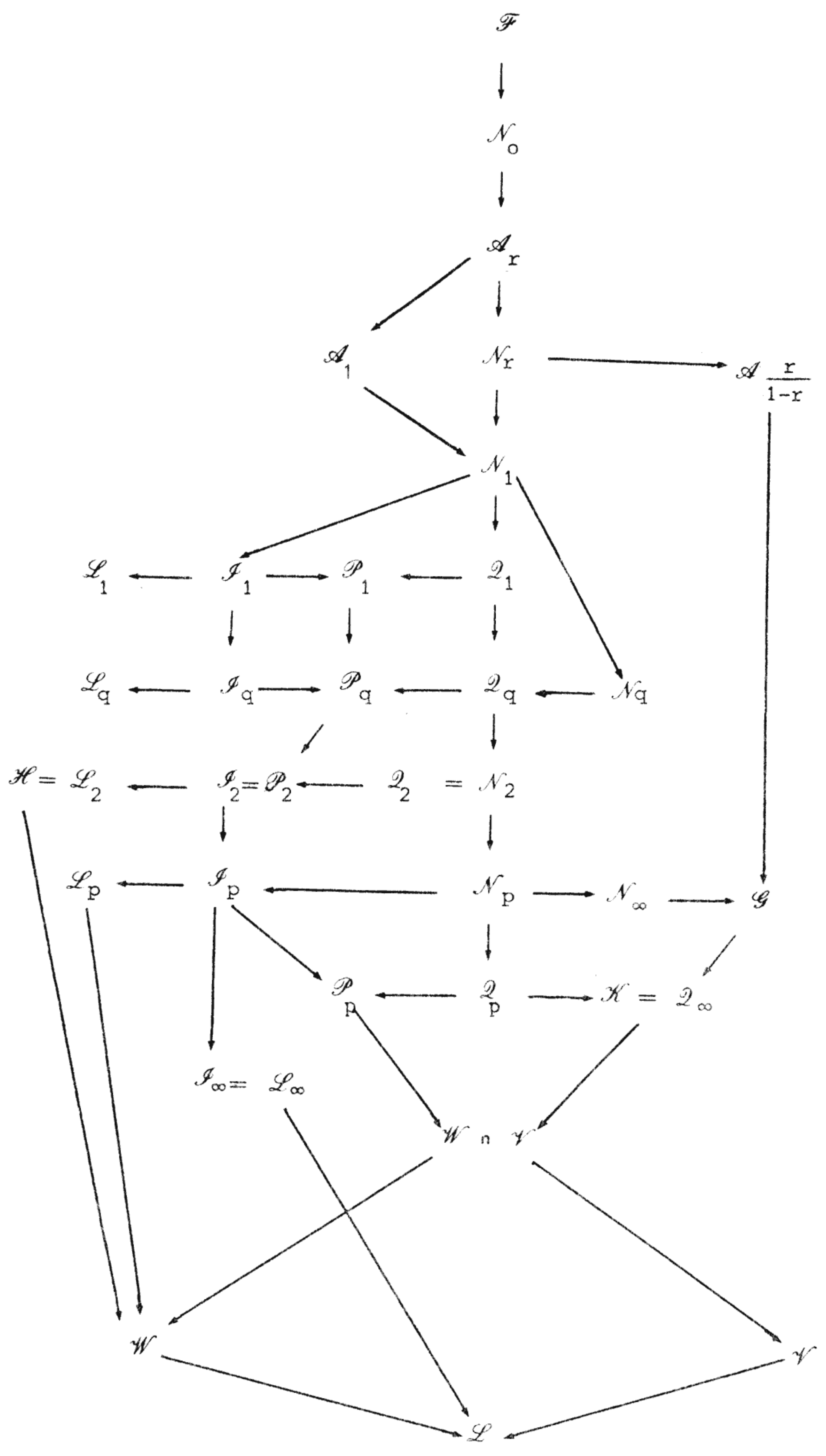
$\mathscr{V}$ operatori completamente continui $\mathscr{K}$

$\mathscr{W}$ operatori debolmente compatti $\Longleftrightarrow$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr] & & F \\ & G=G'' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\mathscr{L}$

TABELLA DELLE INCLUSIONI



$0 < r < 1, \ 1 < q < 2, \ 2 < p < \infty$

B I B L I O G R A F I A

[1] S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. Fund. Math. 3 (1922) 133-181.

[2] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Monografje Matematyczne 1, Warsaw, 1932.

[3] J.W.Calkin, Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space, Ann. of Math. 42 (1941) 839-873.

[4] T. Carleman, Zur Theorie der linearen Integralgleichungen, Math. Zeit. 9 (1921) 196-217.

[5] A. Cauchy, Exercises d'analyse et de physique mathématique, vol.1 (1840).

[6] W.J.Davis, T.Figiel, W.B.Johnson e A.Petczyński, Factoring weakly compact operators, J. Functional Analysis 17 (1974) 311-327.

[7] J. Dieudonné, History of Functional Analysis, North-Holland Mathematics Studies 49, 1981.

[8] E. Dubinsky e M.S. Ramanujan, On λ-nuclearity, Mem. Amer. Math. Soc. 128(1972).

[9] N.Dunford e J.T. Schwartz, Linear Operators, Part. I, 1958, e Part II, 1963, Interscience Publishers.

[10] P. Enflo, A courterexample to the approximation problem in Banach spaces, Acta Math. 13 (1973) 261-266.

[11] T.Figiel e W.B.Johson, The approximation property does not imply the bounded approximation property, Proc. Amer.Math.Soc. 41 (1973) 197-200.

[12] E. Fischer, Sur la convergence en moyenne, C.R. Acad. Sci. Paris 144 (1907) 1022 - 1024; Application d'un théorème sur la convergence en moyenne, ibid.1148-1151.

[13] M. Fréchet, Sur quelques points du Calcul fonctionnel, Rend. Circ. mat. Palermo 22 (1906) 1-74.

[14] M. Fréchet, Essai de géométrie analytique à une infinité de coordonnées, Nouv. Ann. de Math. (4) 8(1908) 97-116 e 289-317.

[15] I. Fredholm, Sur une classe d'équations fonctionnelles, Acta Math. 27 (1903) 365-390.

[16] V.R. Gantmacher, Über schwache totalstetige Operatoren, Mat.Sbornik 7 (1940) 301-308.

[17] I.M.Gelfand, Normierte Ringe, Mat. Sbornik N.S. 9 (51) (1941) 3-24.

[18] B.Gramsch, Eine Idealstruktur Banachscher Operatoralgebren, J. reine angew Math. 225 (1967) 97-115.

[19] A. Grothendieck, Sur une notion de produit tensoriel topologique d'espace vectoriels topologiques et une classe remarquable d'espaces vectoriels liée à cette notion, C.R. Acad. Sci.Paris 233 (1951) 1556-1558.

[20] A. Grothendieck, Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K), Canadian J. Math. 5 (1953) 129-173.

[21] A.Grothendieck, Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires, Ann. Inst. Fourier 4 (1954) 73-112.

[22] A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[23] A. Grothendieck, Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques. Bol. Soc. Mat. São Paulo 8 (1956) 1-79.

[24] S.Heinrich, Closed operator ideals and interpolation, J. Functional Anal. 35 (1980) 397-411.

[25] E. Helly, Ueber Systeme Linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, Monatsh. für Math. und Phys. 31 (1921) 60-91.

[26] D.Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen IV, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. (1906) 157-227.

[27] H. Hogbe-Nlend e V.B.Moscatelli, Nuclear and Conuclear Spaces, North-Holland Mathematics Studies 52, 1981.

[28] H. Jarchow, Locally convex spaces, Teubner, 1981.

[29] W.B.Johnson, H. König, B. Maurey e J.R. Retherford, Eigenvalues of p-summing and p-type operators in Banach spaces, J.Functional Anal. 32 (1979) 355-380.

[30] S. Katutani, Iteration of linear operations in complex Banach spaces, Proc. Imp. Acad. Tokyo 14 (1938) 295-300.

[31] H.König, s-numbers, eigenvalues and the trace theorem in Banach spaces, Studia Math. (in corso di stampa).

[32] G. Köthe, Topological Vector Spaces I, Springer, 1969.

[33] S. Kwapien, On operators factorizable through L_p space, Bull. Soc. Math. France, Mém. 31-32 (1972) 215-225.

[34] T.Lalesco, Un théorème sur les noyaux composés, Bull. Acad.Sci. 3 (1914) 271-272.

[35] H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des functions primitives, Gauthier-Villars, 1904 (2^a ed. 1928).

[36] V.B.Lidskij, Non-selfadjoint operators with a trace (russo), Dokl. Akad. Nauk SSSR 125 (1959) 485-488.

[37] J.Lindenstrauss e A. Pełczyński, Absolutely summing operators in L_p-spaces and their applications, Studia Math. 29(1968) 275-326.

[38] J.Lindenstrauss e L. Tzafriri, Classical Banach Spaces: vol. I, Sequence Spaces, 1977, e , vol. II, Function Spaces, 1978, Springer.

[39] E. Luft, The two-sided closed ideals of the algebra of bounded linear operators of a Hilbert space, Czech Math. J. 18 (1968) 595-605.

[40] B.Maurey, Théorèmes de factorisation pous le opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces L^p, Astérisque 11, Paris 1974.

[41] V.B.Moscatelli, Introduzione alla teoria degli spazi nucleari (in preparazione).

[42] V.B.Moscatelli e M.A. Simões, Operator ideals on Hilbert space having a unique extension to Banach spaces (in preparazione).

[43] F.J.Murray e J. von Neumann, On rings of operators, Ann. of Math. 37 (1936) 116-229.

[44] J. von Neumann e R. Schatten, The cross-space of linear transformations II,III,Ann. of Math. 47 (1946) 608-630; 49 (1948) 557-582.

[45] A. Pełczyński, p-integral operators commuting with group representations and examples of quasi p-integral operators which are not p-integral, Studia Math. 33 (1969) 63-70.

[46] A. Persson e A. Pietsch, p-nukleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen, Studia Math. 33 (1969) 19-62.

[47] A. Pietsch, Einige neue Klassen von kompakten linearen Abbildungen, Revue de Math. pures et appl. (Bukarest) 8(1963) 427-447.

[48] A. Pietsch, Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen, Studia Math. 28 (1967) 333-353.

[49] A; Pietsch, Nuclear Locally Convex Spaces,Springer, 1972.

[50] A. Pietsch, Operator Ideals, North-Holland, 1980.

[51] A. Pietsch, Factorization theorems for some scales of operator ideals, Math. Nachr., J. Functional Anal. (to appear).

[52] S. Pincherle, Opere scelte, 2 vol.,Cremonese, 1954.

[53] F. Riesz, Über lineare Funktionalgleichungen, Acta Math. 41 (1918), 71-98.

[54] F.Riesz, Oeuvres complètes, 2 vol., Gauthier-Villars, 1960.

[55] A.F.Ruston, On the Fredholm teory of integral equations for operators belonging to the trace class of a general Banach space, Proc. London Math.Soc. (2) 53 (1951) 109-124.

[56] R. Schatten, A theory of cross-spaces, Princeton University Press, 1950.

[57] J.Schauder, Über lineare vollstetige Funktionaloperationen, Studia Math. 2 (1930) 183-196.

[58] E. Schmidt, Ueber die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, Rend. Circ. mat. Palermo 25 (1908) 53-77.

[59] I Schur, Über die characteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Teorie der Integralgleichungen, Math., Ann. 66 (1909) 488-510.

[60] L.Schwartz, Théorie des noyaux, Proc. Int. Congress of Math.,Cambridge, Mass., 1950, vol. I, p. 220-230.

[61] B. Simon, Trace ideals and their applications, London Math. Soc. Lecture Note Series 35, Cambridge University Press, 1979.

[62] V. Volterra, Theory of functionals, Blackie and Sons, 1930.

[63] V. Volterra, Opere matematiche, 5 vol., Acc. dei Lincei, 1954-1962.

[64] H.Weyl, Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) 35 (1949) 408-411.

[65] K.Yosida, Mean ergodic theorem in Banach spaces, Proc. Imp. Acad. Tokyo 14 (1938) 292-294.

Dipartimento di Matematica
Università - C.P. 193
73100 Lecce

Instituto de Matematica
Universidade Federal Fluminense
24000 Niteroi - R.J (Brasile)