APPENDICE

14. Semi-bande.

In anni recenti diversi autori (Benzaken-Mayr (1975) |10|, Howie (1977) |11|, Piochi (1981) |12|, ...) hanno studiato con tecniche diverse i semigruppi generati dai idempotenti (o semi-bande).

Vogliamo qui indicare un diverso metodo di approccio allo studio di una semi-banda, un metodo semplice, "diretto", che, comunque, permette di ottenere rapidamente qualche primo risultato.

Premettiamo le seguenti definizioni e i seguenti Teoremi già noti.

Sia S un semigruppo senza annullatori diversi da zero (si può supporre che ogni semigruppo soddisfi a questa condizione |14|), allora S ha la seguente decomposizione disgiunta (decomposizione sinistra di Szép) :

$$S = \bigcup_{i=0}^{5} S_i \qquad (1)$$

dove

$S_0 = \{a \in S \,/\, aS \subset S \;\text{ e }\; \exists\, x \in S,\ x \neq 0 \ni'\ ax = 0\}$

$S_1 = \{a \in S \,/\, aS = S \;\text{ e }\; \exists\, y \in S,\ y \neq 0 \ni'\ ay = 0\}$

$S_2 = \{a \in S-(S_0 \cup S_1) \,/\, aS \subset S \text{ e } \exists\, x_1, x_2 \in S,\ x_1 \neq x_2 \text{ e } ax_1 = ax_2\}$

$S_3 = \{a \in S-(S_0 \cup S_1) \,/\, aS = S \;\text{ e }\; \exists\, y_1, y_2 \in S,\ y_1 \neq y_2 \text{ e } ay_1 = ay_2\}$

$S_4 = \{a \in S-(S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3) \,/\, aS \subset S\}$

$S_5 = \{a \in S-(S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3) \,/\, aS = S\}$

Dualmente si definisce per S la decomposizione destra di Szép

$$S = \bigcup_{i=0}^{5} D_i \qquad (2)$$

Siano ora $S_i \cap D_j = C_{ij}$ e $\Gamma = \{C_{ij}\}_{i,j=0,1,\ldots,5}$

Se i sottoinsiemi C_{ij} sono non vuoti, allora essi sono sttosemigruppi di S e risulta:

$$S = \bigcup_{i,j=0}^{5} C_{ij} \; , \; C_{ij} \cap C_{hk} = \emptyset \quad \text{se} \quad (i,j) \neq (h,k) \qquad (3)$$

La decomposizione (3) di un semigruppo S viene detta la Γ-decomposizione di S.

Teorema 14.1. La Γ-decomposizione di una banda S è la seguente:

1) se $1 \in S$, allora $S_5 = D_5 = \{1\}$; $C_{25} = C_{52} = \emptyset$

$$S = C_{oo} \cup C_{02} \cup C_{20} \cup C_{22} \cup \{1\} \; ;$$

2) se $1 \notin S$, allora

a) se $S_5 \neq \emptyset$, $C_{52} = S_5$, $C_{25} = \emptyset$,

$$S = C_{oo} \cup C_{02} \cup C_{20} \cup C_{22} \cup S_5$$

b) se $D_5 \neq \emptyset$, $C_{25} = D_5$, $C_{52} = \emptyset$

$$S = C_{oo} \cup C_{02} \cup C_{20} \cup C_{22} \cup D_5,$$

dove S_5 $[D_5]$, se non è vuoto, è una banda zero-destra[sinistra], e C_{ij} $(i,j = 0,2)$ è l'unione di bande rettangolari.

Dim. v.|13|,pag.14.

Teorema 14.2. Un semigruppo S è una banda sse la sua decomposizione sinistra di Szép è così data:

1) $S_1 = S_3 = S_4 = \emptyset$;

2) S_5 è rettangolare e in esso ogni elemento è unità sinistra;

3) $S_i = \bigcup_{a \in S_i} L_a$ (i=1,2), dove le classi L_a sono sottosemigruppi rettangolari di S.

Dim. v. |12|, pag. 9.

Sia ora S una semi-banda, ossia un semigruppo generato dall'insieme $E = \{e_i\}_{i \in I}$ di idempotenti. Ogni elemento $s \in S$ si può dunque scrivere nella forma
$s = e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}$, $k \geq 1$, $e_i \in E$.

Se consideriamo i sottosemigruppi $e_i S$ di S ($i \in I$), si ha, evidentemente,

$$S = \bigcup_{i \in I} e_i S .$$

Sia $S^* = \bigcap_{i \in I} e_i S$.

Teorema 14.3. Se $S^* \neq \emptyset$, ogni elemento $\bar{s} \in S^*$ è uno zero a destra per S. Viceversa, se S ha elementi zero-destri, allora $S^*(\neq \emptyset)$ contiene tali elementi.

Dim. Sia $\bar{s} \in S^*$, per ogni $e_i \in E$, poiché $\bar{s} \in e_i S$, si ha $e_i \bar{s} = \bar{s}$. Dunque anche per un qualsiasi elemento $s \in S$ si ha $s\bar{s} = \bar{s}$, cioé $\bar{s}$ è uno zero a destra in S. Viceversa, se s_o è uno zero destro di S, si ha $e_i s_o = s_o$, $\forall e_i \in E$, dunque $s_o \in e_i S$, quindi, anche $s_o \in \bigcap_{i \in I} e_i S = S^*$.

In conclusione, il Teorema 14.3 dice che S^* è costituito da tutti e soli gli (eventuali) zeri destri della semi-banda S.

Teorema 14.4. La semi-banda S non ha elementi accrescitivi sinistri [destri].

Dim. Sia $a = e_1 \ldots e_n$ un elemento accrescitivo sinistro di S. Allora esiste un sottoinsieme $M \subset S$ t.c. $aM = S$, cioé $e_1(e_2 \ldots e_n M) = S$. Poiché e_1, idempotente, non può essere un elemento accrescitivo, deve essere $e_2 \ldots e_n M = S$ Proseguendo con lo stesso ragionamento, si avrà alla fine $e_n M = S$: assurdo, perché $e_n \in E$.

Teorema 14.5. Gli elementi $u \in S$ tali che $uS = S$ [$Su = S$] sono tutte e sole le unità sinistre [destre] di S.

Dim. Se u è una unità sinistra di S, ovviamente $uS = S$. Viceversa, sia $u \in S$ tale che $uS = S$. Sia $u = e_1 e_2 \ldots e_k$ ($k \geq 1$). Con lo stesso ragionamento usato nel Teorema 14.4 si ha che

$$e_1 e_2 \ldots e_k S = S \implies e_2 \ldots e_k S = S \implies \ldots \implies e_k S = S,$$

da cui risulta che e_k è unità sinistra di S (poiché $e_k \in E$).

Ma allora, analogamente, $e_1 e_2 \ldots e_{k-1} S = S \implies e_{k-1} S = S$, quindi anche $e_{k-1} (\in E)$ è unità sinistra di S. Pertanto, proseguendo con questo ragionamento, si ha che $e_1, e_2, \ldots, e_k$ sono unità sinistre di S e quindi $u = e_1 e_2 \ldots e_k = e_k$, cioé $u \in E$. Ma allora se $uS = S$ ed $u \in E$, u è una unità sinistra di S.

In termini di"decomposizione sinistra di Szép" di S, $S = \bigcup_{i=0}^{5} S_i$, il Teorema 14.5 afferma che S_5 è costituito da tutte e sole le unità sinistre di S; infatti per il Teorema 14.4 è $S_1 \cup S_3 = \emptyset$, quindi S_5 è l'insieme di tutti e soli gli elementi $u \in S$ t.c. $uS = S$.

Dualmente è $D_1 \cup D_3 = \emptyset$ e D_5 è costituito da tutte e sole le unità destre di S.

<u>Teorema 14.6.</u> $S - S_5$ è un sottosemigruppo di S. [$D-D_5$ è un sottosemigruppo].

<u>Dim.</u> Siano $a,b \in S-S_5$. Per assurdo, sia $ab \in S_5$. Allora $(ab)S = S$, cioé $a(bS) = S$. Se $bS = S$, per il Teorema 14.5 $b \in E$, e anzi $b \in S_5$, ciò che è escluso; dunque $bS \subset S$; ma allora a è accrescitivo sinistro, contro il Teorema 14.4. Dunque $ab \in S-S_5$.