CAPITOLO IV

10. Bande libere.

Sia X un insieme di generatori (o variabili), consideriamo il semigruppo libero $F = F(X)$, generato da X (la definizione è già stata data nel paragrafo 6 della Parte I). Conveniamo di ampliare il semigruppo libero con l'aggiunta dell'elemento neutro che diremo parola vuota. Introduciamo in F una relazione di congruenza nel seguente modo: diremo che due parole sono congrue se, eliminando in esse tutte le sottoparole successive ripetute, si ottiene la stessa parola; ad esempio le parole $x_1x_2x_3x_1x_2^2x_3^4x_1x_3$ e $x_1x_2^3(x_3x_1)^2x_3$ sono congrue perché semplificando si ottiene da entrambe la parola $x_1x_2x_3x_1x_3$.

Detto S l'insieme delle classi di congruenza, esso, con la moltiplicazione definita nel modo solito, è una banda. Inoltre l'applicazione da F in S che porta ogni parola nella sua classe di congruenza è un epimorfismo. Se n è la cardinalità di X, S viene detta la banda libera su n generatori.

Per ogni parola $W \in F$ denotiamo con C_W l'insieme dei generatori distinti che formano W. E' chiaro che se U e V sono parole appartenenti alla stessa classe di congruenza allora $C_U = C_V$. Perciò per ogni classe di congruenza A di S vi è un ben definito insieme C_A, il quale è indipendente dal rappresentante di A.

Segue dalla definizione che $C_{AB} = C_A \cup C_B$, per ogni $A,B \in S$. Infatti C_{AB} è l'insieme dei generatori distinti di un qualsiasi rappresentante di (AB) quindi è costituito da tutti e soli i generatori distinti di un rappresentante di A o di un rappresentante di B.

<u>Lemma 10.1</u>. Per ogni $A,B \in S$: $C_A = C_B \iff A \; P \; B$

<u>Dim.</u> Proviamo prima che la condizione è sufficiente.

Per definizione di P(*) $A \; P \; B \iff ABA = A$ e $BAB = B$,

(*) v.Parte I pag. 6

ne segue che $C_{ABA} = C_A$, ma $C_{ABA} = C_A \cup C_B \cup C_A = C_A \cup C_B$, quindi $C_A \cup C_B = C_A$, da cui $C_B \subseteq C_A$.

Con analogo ragionamento da $BAB = B$ si deduce che $C_A \subseteq C_B$, concludendo $C_A = C_B$.

Viceversa sia $C_A = C_B$, con $A = A_1A_2...A_n$ e $B = B_1B_2...B_m$, proviamo dapprima che $C_A \subseteq C_B \implies AB\ P\ B$.

Infatti dalla riflessività della P si ha che $AB\ P\ AB$, cioé $A_1A_2...A_nB_1B_2....$ $..B_m\ P\ A_1A_2...A_nB_1B_2...B_m$, ma essendo $XY\ P\ YX$ in ogni $X,Y \in S$, risulta: $A_nB_j\ P\ B_jA_n$ per ogni $j \in \{1,2,...,m\}$, inoltre dall'ipotesi $C_A \subseteq C_B$ segue che esiste $\bar{j} \in \{1,2,...m\}$ t.c. $A_n = B_{\bar{j}}$, allora commutando A_n con i B_j si avrà ad un certo punto $A_1A_2...A_nB_1..B_m\ P\ A_1A_2...A_{n-1}B_1B_2...A_nB_{\bar{j}}...B_m$ ed essendo $A_nB_{\bar{j}} = B_{\bar{j}}\ B_{\bar{j}} = B_{\bar{j}}$ risulterà $AB\ P\ A_1A_2...A_{n-1}B_1B_2...B_m$.

Successivamente facendo lo stesso ragionamento per tutti gli A_i $i\in\{1,...n\}$ otterremo $AB\ P\ B$.

Analogamente da $C_B \subseteq C_A$ segue che $A\ P\ BA$.

Essendo $BA\ P\ AB$ si ha che, per la transitività di P, $A\ P\ BA, BA\ P\ AB, AB\ P\ B \implies A\ P\ B$ come volevamo.

<u>Lemma 10.2.</u> $C_A = C_C$ e $C_B \subseteq C_A \implies ABC = AC$.

<u>Dim.</u>

Da $C_B \subseteq C_A$ segue che $C_{AB} = C_A \cup C_B = C_A$, quindi $C_C = C_A = C_{AB}$ da cui, per il lemma 10.1 $C\ P\ AB$ e per definizione di P:

$C(AB)C = C$. Allora $(ACA)BC = A[C(AB)C] = AC$. Ma, essendo $C_A = C_C$, per il lemma 8.1 è $A\ P\ C$, quindi $ACA = A$, per cui $ABC = A(BC) = (ACA)(BC) = AC$.

Definiamo <u>lunghezza</u> di una parola il numero di generatori (non necessariamente distinti) che la compongono; così se x e y sono generatori, la parola x è di lunghezza 1, le parole xx e xy sono ognuna di lunghezza 2, ecc. Chiaramente ogni parola ha lunghezza positiva. Si dice che una parola ha lunghezza minima se la classe di congruenza di S che la contiene non contiene parole più corte, e perciò d'ora in poi si considereranno gli elementi di S rappresentati da parole di minima lunghezza.

Teorema 10.1. Una banda libera finitamente generata è di ordine finito.

Premettiamo il seguente

Lemma 10.3. Per ogni numero n esiste una lunghezza m t.c. tutti gli elementi di lunghezza minima m denono essere un prodotto di almeno n generatori distinti.

Dim.

Ragioniamo per induzione su n.

Per n = 1 esiste la lunghezza m = 1, per cui tutte le parole di lunghezza minima uguale a 1 possono essere considerate come prodotto di un generatore.

Supponiamo il lemma vero per n e proviamolo per n+1; cioé in corrispondenza di n esiste la lunghezza m che soddisfa il lemma, dobbiamo provare che in corrispondenza di n+1 la lunghezza 2m+1 è tale che tutti gli elementi di minima lunghezza 2m+1 sono il prodotto di almeno n+1 generatori distinti. Infatti consideriamo il prodotto di minima lunghezza 2m+1

$$A = \prod_{i=1}^{2m+1} \alpha_i$$

e facciamo vedere che A ha almeno n+1 distinti generatori.

Siano $\prod_{i=1}^{m} \alpha_i = X$ e $\prod_{i=m+2}^{2m+1} \alpha_i = Y$ allora $A = X\alpha_{m+1}Y$, dove X e Y sono prodotti di minima lunghezza m.

Poiché per ipotesi il lemma è vero per n, C_X e C_Y contengono ciascuno almeno n distinti generatori. Chiaramente C_X e C_y sono contenuti in C_A. Ora se C_A contenesse solo n distinti generatori allora

$C_X = C_Y = C_A$. E poiché α_{m+1} e C_A, allora si avrebbe anche α_{m+1} e C_X e a_{m+1} e C_Y.

Così per il lemma 10.2 risulterebbe $A = X\, a_{m+1} Y = XY$. Ma XY è di minima lunghezza $2m$ e tale sarebbe anche A, contro l'ipotesi che A ha minima lunghezza $2m+1$.

In conclusione tutte le espressioni di minima lunghezza $2m+1$ devono essere prodotto di almeno $n+1$ generatori distinti e questo prova il lemma.

Per provare il teorema consideriamo una banda libera S finitamente generata, cioé un semigruppo idempotente libero su n generatori, con n finito.

Segue dal lemma 10.3 che tutti gli elementi di minima lunghezza generati da un numero finito di generatori non devono superare una certa lunghezza, quindi vi può essere solo un numero finito di termini.

<u>Corollario 10.1</u>. Tutte le bande finitamente generate sono di ordine finito.

Infatti una banda S generata da $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ è isomorfa alla banda libera costruita sull'insieme $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Sviluppando la teoria delle bande libere si arriva alla seguente formula per l'ordine I_N della banda libera su N generatori:

$$I_N = \sum_{r=1}^{N} C_r^N \prod_{i=1}^{r} (r-i+1)^{2^i}$$

11. Bande libere regolari.

Per <u>banda libera regolare</u> (a sinistra, a destra) generata da un insieme non vuoto X, intendiamo una banda S tale che:

1) esiste un'applicazione $i : X \to S$, che si dice <u>immersione</u>
2) $i(X)$ genera S
3) S è una banda regolare (a sinistra, a destra)(*)

(*) Ved. Defin. in Parte I, pag. 20

4) per ogni banda regolare (a sinistra, a destra) T e per ogni applicazione $j : X \to T$ esiste un omomorfismo $h : S \to T$ t.c. $j=hi$, cioé h è tale da rendere commutavito il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & S \\ {\scriptstyle j}\downarrow & \swarrow_{h} & \\ T & & \end{array}$$

OSS. 11.1.

In questa definizione non si richiede che l'immersione sia iniettiva, ma che ciò si verifica si può provare facilmente a partire dalla 4) scegliendo una banda regolare T, avente almeno due elementi distinti a,b e costruendo j in modo tale che, fissati arbitrariamente due elementi distinti x,y e X, risulti $j(x) = a, j(y) = b$. E' anche facile vedere che se ci sono due bande regolari libere per un dato insieme X, allora esse sono isomorfe tramite un isomorfismo che fissa gli elementi di X (nel senso che fa corrispondere elementi di $i(X)$ e di $j(X)$ che provengono da uno stesso elemento di X). Così se esiste una banda libera regolare (a sinistra, a destra) essa è unica a meno di isomorfismi. E anche l'omomorfismo h della 4) è unico.

La banda libera commutativa, cioé il semireticolo libero generato da X, è definito analogamente.

Costruiamo ora la banda libera regolare (a sinistra, a destra) a partire da un dato insieme X.

Sia dunque X un insieme non vuoto. Sia S l'insieme di tutti i sottoinsiemi non vuoti di X costituiti da un numero finito di elementi. Abbiamo allora il seguente:

Lemma 11.1.

L'insieme S precedentemente definito è il semireticolo libero generato da X con il prodotto definito da $y \cdot z = y \cup z \quad \forall y,z \in S$, dove $\cup$ denota l'unione insiemistica.

Dim.

E' ovvio che S forma un semireticolo generato da $\{\{x\} : x \in X\}$.

Sia $i : X \to S$ l'applicazione definita da $i(x) = \{x\}$. Sia T un semireticolo e $j : X \to T$ una qualunque applicazione. Allora l'applicazione $h : S \to T$ definita da $h(y) = j(x_1)j(x_2)\ldots j(x_n)$, con $y = \{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, è un omomorfismo. Infatti presi $y = \{x_1,x_2,\ldots x_n\}$ e $z = \{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots\bar{x}_m\}$ risulta $h(y)\, h(z) = j(x_1)\ldots j(x_n)j(\bar{x}_1)\ldots j(\bar{x}_m)$, $h(yz) = h(\{x_1,\ldots,x_n\}\cup\{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_m\}) =$
$= h(\{x_1,\ldots,x_n,\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_m\}) = j(x_1)\ldots j(x_n)j(\bar{x}_1)\ldots j(\bar{x}_m)$,
quindi $h(y)h(z) = h(yz)$; inoltre si ha $j(x) = h(\{x\}) = h(i(x))$ $\forall x \in X$, cioé $j = hi$.

Così S è il semireticolo libero generato da X.

Teorema 11.1.

Sia X un insieme non vuoto. Sia Γ il semireticolo libero ottenuto nel Lemma 11.1. Siano A e B gli insiemi di tutti i sottoinsiemi non vuoti di X finiti linearmente ordinati, strutturati con l'operazione di giustapposizione cancellando tutte le seconde lettere che appaiono nell'espressione del prodotto leggendo, rispettivamente, da sinistra e da destra.

Sia $s : A \to \Gamma$ $(t : B \to \Gamma)$ l'applicazione definita $s(a)$ $(t(b))$ uguale all'insieme di tutti i punti distinti contenuti in $a(b)$.

Siano $A_\gamma = s^{-1}(\gamma)$ e $B_\gamma = t^{-1}(\gamma)$ per $\gamma \in \Gamma$. Allora $A(B)$ e la banda libera regolare a sinistra (a destra) generata da X e $A \sim \Sigma\{A_\gamma | \gamma \in \Sigma\}$ $(B \sim \Sigma\{B_\gamma / \gamma \in \Gamma\})$ è la sua decomposizione strutturale.

Dim.

Sia $F = F(X)$ il semigruppo libero generato da X. Immergiamo X in F nel modo naturale tramite l'applicazione $k : X \to F$ t.c. $k(x) = \{x\}$.

Consideriamo l'applicazione q di F in F che ad ogni parola di F associa la sua parte iniziale, e l'applicazione r di F in F che ad ogni parola di F associa la sua parte finale (*).

Siano $A_o = q(F) \subseteq F$, $B_o = r(F) \subseteq F$ le immagini di F tramite q e r. Osserviamo che q ed r non sono omomorfismi; infatti basta considerare il caso di due parole uguali $P = Q$, in cui evidentemente $q(PP) \neq q(P)q(P)$ e $r(PP) \neq r(P)r(P)$. Inoltre A_o e B_o non sono sottosemigruppi, infatti basta prendere due elementi di $A_o(B_o)$ uguali per concludere che il loro prodotto non può stare in $A_o(B_o)$, per la definizione di $q(r)$.

Definiamo ora due operazioni rispettivamente in A_o e in B_o in modo tale che A_o e B_o così strutturati siano due bande:

$$\forall a,a' \in A_o \qquad m(a,a') = q(aa')$$

$$\forall b,b' \in B_o \qquad n(b,b') = r(bb').$$

Siano $a,a',a'' \in A_o$. Proviamo che m è associativa in A_o, infatti

$m(m(a,a'),a'') = m(q(aa'),a'') = q(q(aa')a'') = q(aa'a'')$

$m(a,m(a',a'')) = m(a,q(a'a'')) = q(a,q(a'a'')) = q(aa'a'')$ e quindi

$m(m(a,a'),a'') = m(a,m(a',a''))$.

Inoltre $m(a,a) = q(aa) = q(a) = a$ e $m(m(a,a')a) = q(aa'a) = q(aa') = m(a,a')$. Quindi A_o risulta essere una banda regolare a sinistra con l'operazione m. Analogamente B_o risulta essere una banda regolare a destra con l'operazione n.

(*) Per le definizioni di parte iniziale e parte finale vedere Parte I, pag.48.

Denoteremo queste bande con A e B invece che con A_0 e B_0, a causa della differenza di operazioni.

Si prova facilmente che $q : F \to A$ e $r : F \to B$ sono entrambi epimorfismi. Infatti ogni $a \in A$ è parte iniziale di almeno una parola di F, quindi q è suriettiva, inoltre $\forall P, P' \in F$: $q(PP') = m(q(P), q(P'))$, in quanto $m(q(P), q(P')) = q(q(P) \cdot q(P')) = q(PP')$. Analogo discorso vale per $r : F \to B$.

Poiché F è generato da $k(X)$, A e B sono generati da $i(X)$ e $j(X)$, rispettivamente, dove $i = q\,k$ e $j = rk$.

Siano ora A' una banda regolare a sinistra e $i' : X \to A'$ un'applicazione qualsiasi. Poiché F è il semigruppo libero generato da X, esiste un omomorfismo $f : F \to A'$ t.c. $i' = fk$, cioé tale da rendere commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i'"] \arrow[dr, "k"'] & & A' \\ & F \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Per ogni $w \in F$ abbiamo $f(w) = h(q(w))$, perché A' è regolare a sinistra, cioé esiste un omomorfismo $h : A \to A'$ t.c. $f = hq$. Allora essendo $i = qk$, risulta $i' = fk = (hq)k = h(qk) = hi$. Pertanto A risulta essere la banda libera regolare a sinistra generata da X. Analogamente si prova che B è la banda libera regolare a destra generata da X.

Consideriamo il semigruppo libero Γ generato da X con sua immersione $c : X \to \Gamma$ (Lemma 9.1). Allora, poiché Γ è contemporaneamente regolare a sinistra e a destra, esistono due omomorfismi $s : A \to \Gamma$ e $t : B \to \Gamma$ t.c. $si = c = tj$. E' ovvio che:

$$s(a) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \qquad \text{se} \quad a = i(x_1)i(x_2)\ldots i(x_n)\ .$$

Sia $A_\gamma = s^{-1}(\gamma)$ e $B_\gamma = t^{-1}(\gamma)$, con $\gamma \in \Gamma$. Allora si prova facilmente che A_γ è zero-sinistro e B_γ è zero-destro e perciò sono rettangolari.

Così applicando il Corollario 4.3 (Parte I, pag. 24) segue che $A \sim \Sigma\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ e $B \sim \Sigma\{B_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ sono le decomposizioni strutturali di A e di B.

Corollario 11.1.

La banda libera regolare a sinistra (a destra) generata da n elementi ha $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} i! = n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!}$ elementi.

Dim.

Sia $A \sim \Sigma\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ (Teor. 9.1) la banda libera regolare a sinistra, geberata da X, con $|X| = n$, dove Γ è il semireticolo libero generato da X. Ora se $|\gamma| = i$ allora $|A_\gamma| = i!$, perché gli elementi di A_γ si ottengono da tutte le permutazioni degli elementi di γ. Poiché $A \sim \Sigma\{A_\gamma | \gamma \in \Sigma\}$, risulta che l'ordine di A è dato dalla somma, per $1 \leq i \leq n$, dei prodotti del numero delle combinazioni semplici degli n elementi di X di classe i per i! cioé per l'ordine di ogni A_γ. Pertanto risulta

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} i! = \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} i! = n! \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n-i)!} = n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!}$$

Analogamente per la banda libera regolare a destra B si prova che

$$|B| = n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} .$$

Teorema 11.2. Sia X un insieme non vuoto. Siano A, B, Γ rispettivamente la banda libera regolare a sinistra, la banda libera regolare a destra, e la banda commutativa generate da X, t.c. Γ sia riguardata come il semireticolo strutturale di A e B contemporaneamente. Allora la banda libera regolare generata da X è il prodotto retratto (*) di A e di B rispetto a Γ.

Dim.

Siano A, B e Γ la banda libera regolare a sinistra, la banda libera regolare a destra, e il semireticolo liberi, generati da X con le immersioni $i : X \to A$, $j : X \to B$, $C : X \to \Gamma$ rispettivamente. Poiché Γ è contemporaneamente regolare a sinistra e a destra, esistono gli omomorfismi $s : A \to \Gamma$ e $t : B \to \Gamma$ t.c. $si = c = tj$. Sia C il prodotto retratto di A e B rispetto a Γ avente s e t come omomorfismi naturali, cioé $c = \{(a,b) \in A \times B / s(a) = t(b)\}$. Ora poiché $s(i(x)) = (si)(x) = c(x) = (tj)(x) = t(j(x))$ l'elemento $(i(x),j(x))$ appartiene a C. Definiamo ora un'applicazione in questo modo: $\forall x \in X$ $k(x) = (i(x),j(x))$. Proveremo che C è generato da $k(X)$.

Scegliamo un elemento $(a,b) \in C$, allora $s(a) = t(b) \in \Gamma$. Poiché A e B sono generati da X, abbiamo $a = i(x_1)i(x_2).....i(x_m)$, $b = j(y_1)j(y_2)...j(y_n)$. Allora $s(a) = c(x_1)c(x_2)...c(x_m)$ e $t(b) = c(y_1)c(y_2)...c(y_n)$, ma $s(a)=t(b)$, quindi il sottoinsieme costituito dagli elementi $x_1,x_2,...x_m$ coincide con quello costituito dagli elementi $y_1,y_2,...,y_n$.

E poiché A è regolare a sinistra abbiamo:

$$i(x_1)i(x_2)...i(x_m)i(y_1)i(y_2)...i(y_n) = i(x_1)i(x_2)...i(x_m) = a.$$

Analogamente, poiché B è regolare a destra:

$j(x_1)j(x_2)..j(x_m)j(y_1)j(y_2)....j(y_n) = j(y_1)...j(y_n) = b$. Allora risulta $(a,b) = (i(x)i(y),j(x)j(y)) = (i(x),j(x))(i(y),j(y)) = k(x)k(y)$, ossia $(a,b) = k(x_1)k(x_2)...k(x_m)k(y_1)k(y_2)...k(y_n)$, il che prova che $k(X)$ genera C.

Proveremo ora che C è la banda libera regolare generata da X.

Sia C' una banda regolare e $k' : X \to C'$ un'applicazione. Poiché C' è regolare, per il Lemma 4.10 (Parte I, pag. 26), essa è il prodotto retratto di una banda regolare a sinistra A' e di una banda regolare a destra B' rispetto ad un semireticolo Γ', dove $s' : A' \to \Gamma'$ e $t' : B' \to \Gamma'$ sono gli omomorfismi naturali.

Poiché A,B e Γ sono liberi, esistono gli omomorfismi $f : A \to A'$, $g : B \to B'$ e $h : \Gamma \to \Gamma'$ t.c.

(1) $fi = u'k'$, $gj = v'k'$, $hc = d'k'$,

dove $u' : C' \to A'$, $v' : C' \to B'$ sono gli omomorfismi naturali e $d' : C' \to \Gamma'$, inoltre sono tali che

(2) $s'u' = d' = t'v'$.

Siano $u : C \to A$, $v : C \to B$ gli omomorfismi naturali e $d : C \to \Gamma$ t.c. $su = d = tv$.

Preso $(a,b) \in C$ si ha per definizione che $s(a) = t(b)$. Poiché C è generato da $k(x)$, esistono $x_1, x_2, \ldots x_n \in X$ t.c.

$a = i(x_1)i(x_2)\ldots i(x_n)$, $b = j(x_1)j(x_2)\ldots j(x_n)$.

Poniamo $f(a) = a'$, $g(b) = b'$. Allora dalle (1) e (2) abbiamo:

$$s'(a') = s'f(a) = \prod_{\nu=1}^{n} s'fi(x_\nu) = \prod_{\nu=1}^{n} s'u'k'(x_\nu) = \prod_{\nu=1}^{n} d'k'(x_\nu) ,$$

$$t'(b') = t'g(b) = \prod_{\nu=1}^{n} t'gj(x_\nu) = \prod_{\nu=1}^{n} t'v'k'(x_\nu) = \prod_{\nu=1}^{n} d'k'(x_\nu) .$$

Così $s'(a') = t'(b')$ e perciò $(a',b') \in C'$ cioé $(f(a),g(b)) \in C'$.
Allora esiste un'applicazione $p : C \to C'$ definita da $p(a,b) = (f(a),g(b))$.

Tale applicazione è un omomorfismo, infatti

$$p((a,b)(\bar{a},\bar{b})) = p(a\bar{a},b\bar{b}) = (f(a\bar{a}),g(b\bar{b})) = (f(a)f(\bar{a}),g(b)g(\bar{b})) =$$

$$= (f(a),g(b))(f(\bar{a}),g(\bar{b})) = p(a,b)p(\bar{a},\bar{b}).$$

Inoltre per $x \in X$ abbiamo, per la (1), che

$k'(x) = (u'k'(x),v'k'(x)) = (fi(x),gj(x)) = p(i(x), j(x)) = pk(x)$ perché $k(x) = (i(x),j(x))$, pertanto $k' = pk$.

<u>Corollario 11.2</u>. La banda libera regolare generata da n elementi distinti ha $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}(i!)^2 = n! \sum_{i=1}^{n} \frac{i!}{(n-1)!}$ elementi.

Dim.

Sia $C \sim \{A_\gamma \times B_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ la banda libera regolare generata da X (Teor.11.2), con $|X| = n$, dove Γ è il semireticolo libero generato da X. Se $n = i$ allora $|A \times B| = (i!)^2$, pertanto l'ordine di C sarà dato dalla somma, per $1 \leq i \leq n$, di tutti i prodotti del numero delle combinazioni semplici degli n elementi di X di classe i per $(i!)^2$, cioé

$$|C| = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}(i!)^2 = n! \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n-i)!}$$

12. Varietà di Bande.

Sia X un insieme e sia $F = F(X)$ il semigruppo libero su X.

Sia S un semigruppo. Se $P,Q \in F$ allora diremo che la relazione identica $P = Q$ è soddisfatta in S se per ogni omomorfismo $\phi : F \to S$ risulta $P\phi = Q\phi$. Così, per esempio, la relazione identica $ab = ba$ è soddisfatta in S se S è un semigruppo commutativo.

Diamo ora la seguente definizione. La classe di semigruppi in cui è soddisfatta una collezione finita o infinita $P_1 = Q_1, P_2 = Q_2, \ldots,$ di relazioni identiche si dice varietà di semigruppi determinata da quelle relazioni identiche. Per esempio la classe dei semigruppi commutativi è una varietà. La classe di tutti i semigruppi è anche una varietà determinata, per esempio, dalla relazione identica $a = a$. Ovviamente la classe $\mathcal{B}$ delle bande è una varietà determinata dall'unica relazione identica $a^2 = a$.

D'ora in poi indicheremo la varietà determinata dalle relazioni identiche $P_1 = Q_1, P_2 = Q_2, \ldots$ con $[P_1 = Q_1, P_2 = Q_2, \ldots]$; la varietà determinata da un insieme R di relazioni identiche sarà indicata con $[R]$.

L'intersezione di una famiglia non vuota di varietà $\mathcal{V}_i$ $(i \in I)$ è una varietà, perché se $\mathcal{V}_i$ è determinata da un insieme R_i di relazioni identiche $(\forall i \in I)$, allora un semigruppo S appartiene all'intersezione sse l'insieme di relazioni identiche $\cup\{R_i / i \in I\}$ è soddisfatto in S. Così, per esempio, l'intersezione $\mathcal{B}\cap\mathcal{C}$ della varietà $\mathcal{B}$ di bande e della varietà $\mathcal{C}$ di semigruppi commutativi è la varietà $[a^2 = a, ab = ba]$ di semireticoli.

L'unione di una famiglia di varietà invece non è detto che sia una varietà. Si può, comunque, dare una "ben definita" unione $V\{\mathcal{V}_i/i \in I\}$ di una famiglia $\{\mathcal{V}_i/i \in I\}$ di varietà, che di fatto è l'intersezione della famiglia di tutte le varietà contenenti ogni $\mathcal{V}_i$. (Tale famiglia è non vuota, perché la varietà di tutti i semigruppi necessariamente contiene ogni $\mathcal{V}_i$). Può essere difficile determinare un conveniente insieme di relazioni identiche caratterizzanti l'$V\{\mathcal{V}_i/i\in I\}$, sebbene in teoria possiamo sempre ottenere uno relativo all'intersezione della famiglia delle varietà che contengono ogni $\mathcal{V}_i$.

Introduciamo ora per le varietà di bande le seguenti notazioni:

$\mathcal{SL}$	semireticoli	$ab = ba$	
$\mathcal{LN}$	bande normali a sin	$abc = acb$	
$\mathcal{RN}$	bande normali a destra	$abc = bac$	(12.1)
$\mathcal{N}$	bande normali	$abca = acba$	
$\mathcal{T}$	bande triviali	$a = b$	
$\mathcal{LZ}$	bande zero-sinistre	$ab = b$	
$\mathcal{RZ}$	bande zero-destre	$ab = b$	
$\mathcal{RB}$	bande rettangolari	$aba = a$	

In ogni caso la relazione identica data caratterizza la varietà all'interno della varietà di bande. Le caratterizzazioni all'interno della varietà di semigruppi sono ottenute sempre aggiungendo la relazione identica $a^2 = a$. (Naturalmente ciò non è sempre necessario, ad esempio nel caso delle bande rettangolari abbiamo visto che la relazione identica $aba = a$ implica la relazione identica $a^2 = a$).

Con le operazioni $\cap$ e V l'insieme delle varietà di semigruppi diventa un reticolo completo (*) avente come elemento massimo la varietà $[a = a]$ di

(*) Ved. def.in |4| pag. 12

tutti i semigruppi e come elemento minimo la varietà $[a = b]$ dei semigruppi con un solo elemento. L'insieme delle varietà delle bande, cioé l'insieme delle varietà $\mathcal{V}$ dei semigruppi t.c. $\mathcal{V} \subseteq \mathfrak{B}$, è un sottoreticolo $\mathcal{SB}$ di questo reticolo.

Si definisce atomo di un reticolo $(L,\wedge,\vee)$, con elemento minimo 0, un elemento minimale a nell'insieme $L - \{0\}$.

Il reticolo $\mathcal{SB}$ delle varietà di bande ha come insieme degli atomi l'insieme così fatto:

$$\{\mathcal{SL}, \mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}\}^{(*)}$$

Consideriamo ora il sottoreticolo di $\mathcal{SB}$, $\mathcal{Z}\mathcal{L}$, generato dagli atomi di $\mathcal{SB}$, cioé generato da $\mathcal{SL}, \mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}$, e cerchiamo di identificate le varietà che lo costituiscono.

Osserviamo intanto che

$$\mathcal{LZ} \subseteq \mathcal{RB}, \quad \mathcal{RZ} \subseteq \mathcal{RB} \implies \mathcal{LZ} \vee \mathcal{RZ} \subseteq \mathcal{RB}$$

Viceversa ogni banda rettangolare può essere riguardata come il prodotto diretto di un semigruppo zero-sinistro L e di un semigruppo zero-destro R (ved. Parte I, pag. 10 Lemma 1.13), cioé ogni elemento di $\mathcal{RB}$ è del tipo LxR, dove $L \in \mathcal{LZ} \subseteq \mathcal{LZ} \vee \mathcal{RZ}$ e $R \subseteq \mathcal{RZ} \subseteq \mathcal{LZ} \vee \mathcal{RZ}$; quindi LxR $\in \mathcal{LZ} \vee \mathcal{RZ}$. Ne segue che $\mathcal{RB} = \mathcal{LZ} \vee \mathcal{RZ}$.

Vale inoltre la seguente proposizione, che è un rifacimento di un risultato già ottenuto da Yamada e Kimura (Ved. Parte I, pag. 36 Teor. 5.6).

(*) Ved. |4|, Teor. 5.6 pag. 114

Proposizione 12.1. - Una banda B è normale sse essa è un semireticolo forte (*) di bande rettangolari.

Dim.

Sia $B = \mathcal{S}(Y; E_\alpha; \phi_{\alpha,\beta})$ un semireticolo forte di bande rettangolari e siano a,b,c elementi qualsiasi di B, con $a \in E_\alpha$, $b \in E_\beta$, $c \in E_\gamma$ e poniamo $\delta = \alpha\beta\gamma$. Allora

$abca = (a\phi_{\alpha,\delta})(b\phi_{\beta,\delta})(c\phi_{\gamma,\delta})(a\phi_{\alpha,\delta}) = a\phi_{\alpha,\delta}$ (poiché E_δ è una banda rettangolare)

e analogamente $acba = a\phi_{\alpha,\delta}$. Quindi $abca = acba$ $\forall a,b,c \in B$, e così B è normale.

Viceversa, se B è una banda normale, consideriamo la struttura data a B del Teorema di Petrich (Teor. 9.1). Ricordiamo che se $a \in E_\alpha$ e $(x,\xi) \in E_\beta = I_\beta \times \Lambda_\beta$, con $\beta \leq \alpha$, allora per la formula (9.5) risulta

$$a(x,\xi) = (\phi_\beta^a x, \xi) \quad , \quad (x,\xi)a = (x, \xi\psi_\beta^a).$$

Quindi se $a \in E_\alpha$ e se $b = (x,\xi)$ e $c = (y,\eta)$ sono elementi di E_β $(\beta \leq \alpha)$, allora

$$abca = (\phi_\beta^a x, \xi)(y, \eta\psi_\beta^a) = (\phi_\beta^a x, \eta\psi_\beta^a), \qquad \text{mentre}$$
$$acba = (\phi_\beta^a y, \eta)(x, \xi\psi_\beta^a) = (\phi_\beta^a y, \xi\psi_\beta^a)$$

(*) $\mathcal{S}(Y; E_\alpha, \phi_{\alpha\beta})$ è un semireticolo forte di semigruppi sse Y è un semireticolo, $\{E_\alpha / \alpha \in Y\}$ è una famiglia disgiunta di semigruppi t.c. $E_\alpha E_\beta \subseteq E_{\alpha\beta}$ e $S = \cup\{E_\alpha / \alpha \in Y\}$ e $\forall \alpha,\beta \in Y$ t.c. $\alpha \geq \beta$ $\phi_{\alpha,\beta}: E_\alpha \to E_\beta$ è un omomorfismo e risulta che

1) $\phi_{\alpha,\alpha}$ è l'automorfismo identico di E_α $\forall \alpha \in Y$

2) $\phi_{\alpha,\beta}\phi_{\beta,\gamma} = \phi_{\alpha,\gamma}$ $\forall \alpha,\beta,\gamma \in Y$ t.c. $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

Inoltre in S è definita una moltiplicazione "$*$" come segue $\forall a_\alpha \in S_\alpha$, $\forall b_\beta \in S_\beta$: $a_\alpha * b_\beta = (a_\alpha\phi_{\alpha,\alpha\beta})(b_\beta\phi_{\beta,\alpha\beta})$.

così se la banda è normale concludiamo che ϕ^a_β e ψ^a_β sono applicazioni costanti $\forall a \in E_\alpha$ e per ogni coppia (α,β) di elementi di Y per i quali $\alpha \geq \beta$. L'applicazione $\Phi_{\alpha\beta}: E_\alpha \to \mathfrak{J}^*(I_\beta) \times \mathfrak{J}(\Lambda_\beta)$ che manda ogni $a \in E_\alpha$ nella coppia ordinata $(\phi^a_\beta , \psi^a_\beta)$ può essere così identificata con l'applicazione $\phi_{\alpha,\beta} : E_\beta \to I_\beta \times \Lambda_\beta$, che manda a nella coppia ordinata $(\langle\phi^a_\beta\rangle, \langle\psi^a_\beta\rangle)$.

Inoltre presi $a,a' \in E_\alpha$, allora

$$(aa')\phi_{\alpha,\beta} = (\langle\phi^{aa'}_\beta\rangle, \langle\psi^{aa'}_\beta\rangle) = (\langle\phi^a_\beta\phi^{a'}_\beta\rangle,\langle\psi^a_\beta\psi^{a'}_\beta\rangle) = \text{(per le 9.8 e 9.9)}$$

$=(\langle\phi^a_\beta\rangle,\langle\psi^{a'}_\beta\rangle) =$ (poiché I_β è un semigruppo zero sinistro e Λ_β è un semigruppo zero destro)

$= (\langle\phi^a_\beta\rangle,\langle\psi^a_\beta\rangle)(\langle\phi^{a'}_\beta\rangle,\langle\psi^{a'}_\beta\rangle) = (a\phi_{\alpha,\beta})(b\phi_{\alpha,\beta})$, e così

$\phi_{\alpha,\beta}: E_\alpha \to E_\beta$ è un omomorfismo.

Poi notiamo che se $\beta \leq \alpha$ allora per ogni $a \in E_\alpha$ e per ogni $b = (x,\xi)\in E_\beta$,

$$aba = (\phi^a_\beta x,\xi\psi^a_\beta) = (\langle\phi^a_\beta\rangle, \langle\psi^a_\beta\rangle) = a\phi_{\alpha,\beta} \qquad (12.2)$$

Se $\beta = \alpha$ segue che $a\phi_{\alpha,\alpha} = aaa = a$ $\forall a \in E_\alpha$. Così $\phi_{\alpha,\alpha}$ è l'automorfismo identico di E_α.

Se $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ e $a \in E_\alpha$, allora segue dalla (12.2) che $\forall b\in E_\beta$ e $\forall c \in E_\gamma$ $(a\phi_{\alpha,\beta})\phi_{\beta,\gamma} = abacaba$.

Poiché $bacab \in E_\gamma$ segue, ancora per la (12.2), che

$$abacaba = a\phi_{\alpha,\gamma}.$$

Quindi $\phi_{\alpha,\beta}\,\phi_{\beta,\gamma} = \phi_{\alpha,\gamma}$.

Infine, se $a \in E_\alpha$, $b \in E_\beta$ e $\alpha\beta = \gamma$, allora per la regola di moltiplicazione (9.7) risulta:

$$ab = (\langle\phi^a_\gamma\phi^b_\gamma\rangle,\langle\psi^a_\gamma\psi^b_\gamma\rangle) = (\langle\phi^a_\gamma\rangle,\langle\psi^b_\gamma\rangle) =$$

$$= (\langle\phi_\gamma^a\rangle,\langle\psi_\gamma^b\rangle)(\langle\phi_\gamma^b\rangle,\langle\psi_\gamma^b\rangle) = (a\phi_{\alpha,\gamma})(b\phi_{\beta,\gamma}).$$

Quindi B è un semireticolo forte $\mathcal{S}(Y;E_\alpha,\phi_{\alpha,\beta})$ di bande rettangolari.

Corollario 12.1

Una banda è normale a sinistra sse essa è un semireticolo forte $\mathcal{S}(Y;L_\alpha;\phi_{\alpha,\beta})$ di semigruppi zero-sinistri.

Dim.

Se una banda è normale a sinistra allora lo è anche ogni sua sottobanda e quindi, in particolare, ognuna delle bande rettangolari E_α. Ora una banda E_α, che ha entrambe le relazioni identiche

$$abc = acb \qquad e \qquad aba = a,$$

è necessariamente un semigruppo sinistro, poiché $\forall a,b \in E_\alpha$.

$$ab = a.ab = aba = a.$$

Quindi una banda normale a sinistra è un semireticolo forte di semigruppi zero-sinistri.

Viceversa, se $B = \mathcal{S}(Y; L_\alpha;\phi_{\alpha,\beta})$ è un semireticolo forte di semigruppi zero-sinistri L_α, allora, per ogni $a \in L_\alpha$, $b \in L_\beta$, $c \in L_\gamma$, presi in B, $abc = (a\phi_{\alpha,\delta})(b\phi_{\beta,\delta})(c\phi_{\gamma,\delta}) = a\phi_{\alpha,\delta}$, con $\delta=\alpha\beta\gamma$ e analogamente $acb = a\phi_{\alpha,\delta}$, quindi B è una banda normale a sinistra.

Osserviamo che ogni applicazione tra semigruppi zero-sinistri è un omomorfismo, inoltre in $\mathcal{S}(Y;L_\alpha;\phi_{\alpha,\beta})$ risulta che $\ell_\alpha\ell_\beta = \ell_\alpha\phi_{\alpha,\alpha\beta}$ (12.3) $\forall\ell_\alpha \in L_\alpha$, $\forall\ell_\beta \in L_\beta$.

Analogamente si prova il

Corollario 12.2.

Una banda è normale a destra sse essa è un semireticolo forte $\mathcal{S}(Y;R_\alpha,\phi_{\alpha,\beta})$ di semigruppi zero-destri.

Anche in questo caso ogni applicazione tra semigruppi zero-destri è un omomorfismo e la moltiplicazione in $\mathcal{S}(Y;R_\alpha;\phi_{\alpha,\beta})$ è data da

$$r_\alpha r_\beta = r_\beta \phi_{\beta,\alpha\beta} \qquad \forall r_\alpha \in R_\alpha, \quad \forall r_\beta \in R_\beta \tag{12.4}$$

Proviamo che $\mathcal{N} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{RB}$. Infatti, poiché $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{N}$ e $\mathcal{RB} \subseteq \mathcal{N}$, abbiamo che $\mathcal{SL} \vee \mathcal{RB} \subseteq \mathcal{N}$.

Viceversa se $B \in \mathcal{N}$ allora B è un semireticolo forte di semigruppi che stanno in $\mathcal{SL} \vee \mathcal{RB}$ e così esso sta in $\mathcal{SL} \vee \mathcal{RB}$ (v. [4], pag. 119 Prop. 5.12)

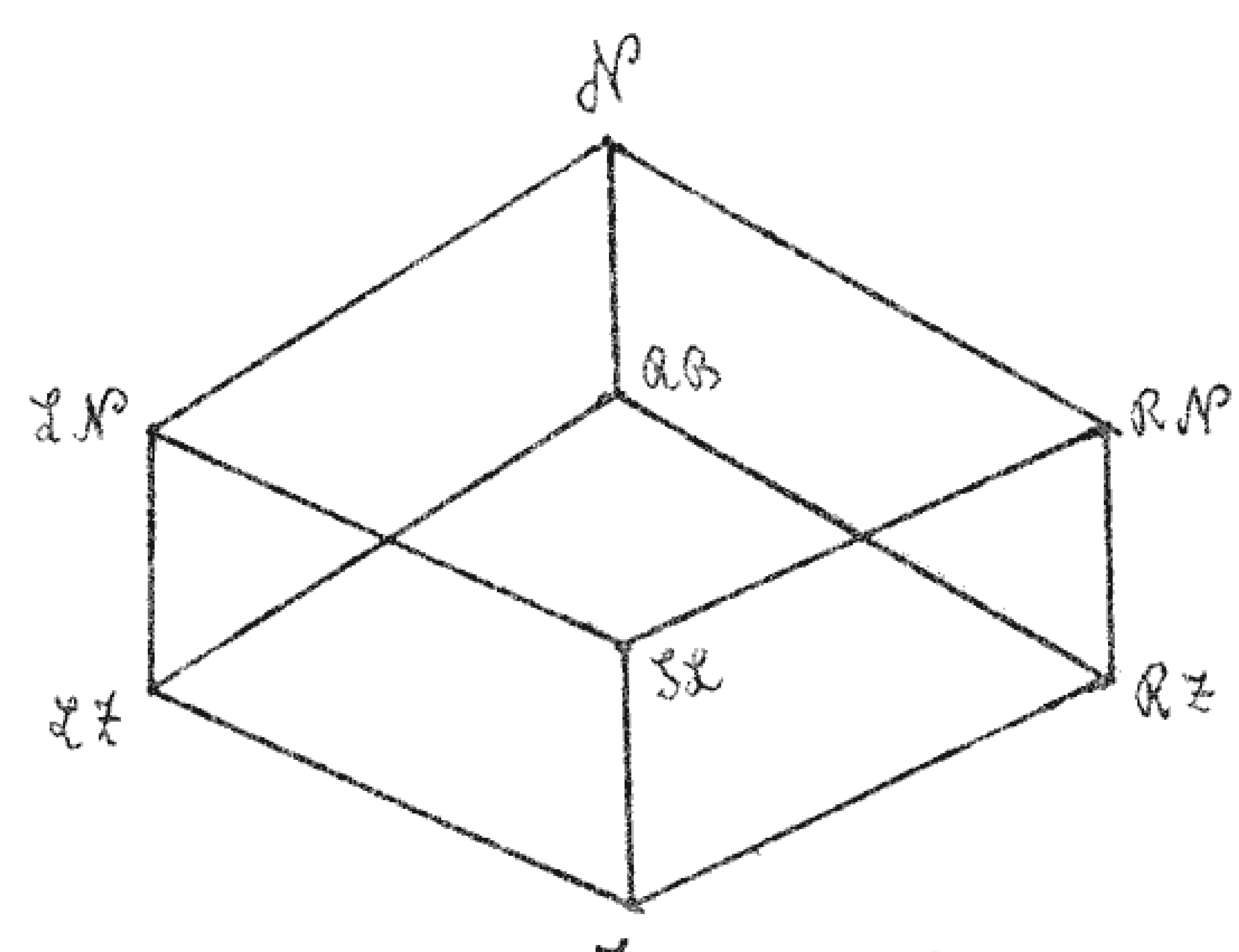
Pertanto $\mathcal{SL} \vee \mathcal{RB} = \mathcal{N}$ (12.5)

Analogamente, per i corollari (12.1) e (12.2) si ha che

$$\mathcal{SL} \vee \mathcal{LZ} = \mathcal{LN} \quad , \quad \mathcal{SL} \vee \mathcal{RZ} = \mathcal{RN} \tag{12.6}$$

Abbiamo già provato nel Teorema 5.4 di pag. 35 (Parte I) che una banda è normale sse è isomorfa al prodotto retratto di una banda normale a sinistra e di una banda normale a destra. Ne consegue ovviamente che $\mathcal{LN} \vee \mathcal{RN} = \mathcal{N}$.

Possiamo ora riassumere le osservazioni fatte sul semireticolo $\mathcal{U}$, generato da $\mathcal{SL}$, $\mathcal{LZ}$, $\mathcal{RZ}$, nel seguente diagramma



TAV. 2

Proviamo alcune implicazioni del diagramma, che non sono state provate prima.

Per esempio, proviamo che $\mathcal{LN} \vee \mathcal{RB} = \mathcal{N}$. I fatti osserviamo che da $\mathcal{RB} \subseteq \mathcal{N}$ e $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{LN} \subseteq \mathcal{N}$ segue che

$$\mathcal{N} = \mathcal{SL} \vee \mathcal{RB} \subset \mathcal{LN} \vee \mathcal{RB} \subseteq \mathcal{N} \quad \text{per la (12.5), e così}$$

$$\mathcal{LN} \vee \mathcal{RB} = \mathcal{N}$$

Proviamo ancora che $\mathcal{SL} = \mathcal{LN} \cap \mathcal{RN}$

Infatti da $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{LN}$ e $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{RN}$, segue che $\mathcal{SL} \subseteq \mathcal{LN} \cap \mathcal{RN}$.
Viceversa, se $B \in \mathcal{LN} \cap \mathcal{RN}$ allora $\forall a,b \in B$

$$ab = aab = aba = \text{(per la normalità a sinistra)}$$
$$= baa = ba \text{(per la normalità a destra)}, \text{ da cui si ricava che } B \in \mathcal{SL}.$$

In conclusione $\mathcal{SL} = \mathcal{LN} \cap \mathcal{RN}$.

13. Il reticolo di tutte le varietà di bande.

Sia X un insieme non vuoto sia F il semigruppo su X, due parole U e V di F le diremo identiche, e scriveremo $U \equiv V$, se U e V sono uguali come elementi di F.

Siano M e N due parole, si dirà che M è contenuta in N se esistono parole R ed S, che possono essere vuote, t.c. $N \equiv RMS$.

Se P', P'' sono due parole, la parola $P \equiv P'P'$ è quella ottenuta per giustapposizione di P' e P''; P' si dice sezione sinistra di P e P'' si dice sezione destra di P (può accadere che $P \equiv P'$ oppure $P \equiv P''$).

Sia P una parola di F, si dice contenuto di P l'insieme c_P delle variabili che compaiono in P;
si dice n-sima parte sinistra di P, e si indica con $1_n(P)$, la sezione sinistra più breve di P contenente le prime n variabili di P, per $1 \leq n \leq |c_P|$,

si dice n-sima parte destra di P, $r_n(P)$, la sezione destra più breve di P contenente le ultime n variabili di P, per $1 \leq n \leq |c_P|$;

si dice n-sima parola sinistra di P, $\gamma_n(P)$, la sezione sinistra più lunga contenente n-1 variabili di P, per $2 \leq n \leq |c_P|$ (cioé $\gamma_n(P)$ è ottenuta da $l_n(P)$ omettendo la coda (*) di $l_n(P)$, che indichiamo con $t(l_n(P))$);

si dice n-sima parola destra di P, $\delta_n(P)$, la sezione destra più lunga di P contenente esattamente n-1 variabili di P, per $2 \leq n \leq |c_P|$ (cioé $\delta_n(P)$ è ottenuta da $r_n(P)$ omettendo la testa (*) di $r_n(P)$, che indichiamo con $h(r_n(P))$);

si dice parte sinistra di P, $l(P)$, la sezione sinistra più breve di P contenente tutte le variabili di P, cioé $l(P) = l_n(P)$ con $n = |c_P|$;

si dice parte destra di P, $r(P)$, la sezione destra più breve di P contenente tutte la variabili di P, cioé $r(P) = r_n(P)$ con $n = |c_P|$;

si dice immagine riflessa di P, $\bar{P}$, la parola ottenuta da P scambiando da sinistra a destra, l'ordine di tutte le variabili di P, cioé se $P \equiv x_1 x_2 \ldots\ldots x_n$, allora $\bar{P} \equiv x_n x_{n-1}, \ldots\ldots x_1$;

$$\gamma(P) = \gamma_n(P) \qquad \text{se} \quad n = |c_P|$$

$$\delta(P) = \delta_n(P) \qquad \text{se} \quad n = |c_P|$$

e scriviamo $hr(P)$ al posto di $h(r(P))$ e $\gamma^2(P)$ al posto di $\gamma(\gamma(P))$.

Sia $\sim$ la minima congruenza di banda in F. Si ha il seguente

Lemma 13.1. Se A,B,C sono parole di F t.c. $c_B \subseteq c_A = c_C$ allora $ABC \sim AC$.

Dim.

Per il Lemma 10.2, pag. 15 (Parte I) le $\sim$-classi delle parole ABC e AC sono uguali, pertanto $ABC \sim AC$.

(*) Ved. Parte I, pag.40.

Date due parole A e B

i) diremo che B è ottenuta da A per <u>inserzione</u>, o che A è ottenuta da B per <u>cancellazione</u>, se esistono parole C,D,E t.c.

$$c_D \subseteq c_C = c_F\ , \quad A \equiv CE \qquad e\ B \equiv CDE;$$

ii) diremo che B è ottenuta da A (o che A è ottenuta da B) per <u>idempotenza</u> se esistono parole C,D,E, dove C o E possono essere vuote, t.c. $A \equiv CDE$ e $B \equiv CDDE$ (o $A \equiv CDDE$ e $B \equiv CDE$).

Osserviamo che se B è ottenuta da A applicando un numero finito di volte i), ii), allora $A \sim B$ (e diciamo che B è ottenuta da A per mezzo di $\sim$), per il Lemma 12.1. Inoltre $A \sim B$ sse B può essere ottenuta da A applicando un numero finito di volte ii).

Siano A,B,C,D parole t.c. $c_A \cup c_B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Diciamo che la parola D è ottenuta da C applicando l'identità (*) $A = B$, se esistono parole $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ su $c_C \cup c_D$ t.c., dette A' e B' le parole su $c_C \cup c_D$ ottenute sostituendo ogni x_i in A e B con X_i, $1 \leq i \leq n$, esistono parole Y e Z su c_C, che possono essere vuote, per cui $C \equiv YA'Z$ e $D \equiv YB'Z$ o viceversa.

Applicando le definizioni precedenti, si dimostrano facilmente i seguenti lemmi:

<u>Lemma 13.2</u>

Siano U,V,W e Y parole su un insieme X, allora $U = V$ implica(*) $W=Y$ sse Y può essere ottenuta da W applicando per un numero finito di volte l'identità $U = V$ e $\sim$.

(*) Ved. Pag. 39, Parte I.

Lemma 13.3

Siano P e Q parole, allora $P = Q$ è equivalente (*) ad $a = a$ sse $P \sim Q$, cioé P e Q sono $\sim$-congruenti sse ogni semigruppo idempotente soddisfa $P=Q$.

Dim. Evidente.

Siano P e Q due parole, e d sia una delle lettere h,t,i,f, dove con h(P) indichiamo la testa di P, con t(P) la coda, con i(P) la parte iniziale e con f(P) la parte finale (**). Allora dalle definizioni di testa, coda, parte iniziale, parte finale segue evidentemente che
$d(P) \sim d(Q)$ sse $d(P) \equiv d(Q)$.

Per ogni identità $P = Q$ t.c. $i(P) \sim i(Q)$ e $f(P) \sim f(Q)$, definiamo

$$\mathfrak{U}[P,Q] = \{\gamma_n(P) = \gamma_n(Q)/2 \leq n \leq |c_P|\}$$
$$\mathfrak{V}[P,Q] = \{\delta_n(P) = \delta_n(Q)/2 \leq n \leq |c_P|\}$$
$$\mathfrak{R}[P,Q] = \{P = Q\} \cup \mathfrak{U}[P,Q]$$
$$\mathfrak{S}[P,Q] = \{P = Q\} \cup \mathfrak{V}[P,Q]$$

Una parola si dice ricorrente se vi è una parola A contenuta in P t.c. AA sia anche una parola contenuta in P.

D'ora in poi, per semplicità, useremo parole non ricorrenti, a meno che non lo si dica esplicitamente e ciò senza ledere la generalità perché considereremo solo identità in bande.

Per ottenere tutte le possibili identità di bande è sufficiente studiare solo quelle identità $P = Q$ le cui parole soddisfano una delle seguenti

(*) Ved. Parte I pag. 39

(**) Ved. Parte I pag. 48.

relazioni(*):

	teste	parti iniziali	parti sinistre	parti destre	parti finali	code
D1	$\sim$	$\not\sim$	$\not\sim$	$\not\sim$	$\sim$	$\sim$
D2	$\sim$	$\sim$	$\not\sim$	$\not\sim$	$\not\sim$	$\sim$
D3	$\sim$	$\sim$	$\not\sim$	$\not\sim$	$\sim$	$\sim$
D4	$\sim$	$\sim$	$\sim$	$\not\sim$	$\sim$	$\sim$
D5	$\sim$	$\sim$	$\not\sim$	$\sim$	$\sim$	$\sim$

TAV. 3

Per esempio le parole dell'identità $yxa = yaxa$ soddisfano D1.

Diamo ora una caratterizzazione delle identità che soddisfano D1; le identità che soddisfano D2 si possono caratterizzare dualmente.

Teorema 13.1. Siano P e Q parole che soddisfano D1, allora $P = Q$ è equivalente a:

i) $yxa = yayxa$ ossia alla seminormalità destra(**) se $h\delta_n(P) \sim h\delta_n(Q)$, per $2 \leq n \leq |c_P|$

ii) $yxa = yaxa$ ossia alla quasi-normalità destra (**) negli altri casi.

Per dimostrare questo teorema premettiamo i seguenti lemmi, in ognuno dei quali le parole P e Q soddisfano D1.

Lemma 13.4. L'identità $yxa = yaxa$ implica l'identità $P = Q$.

Dim.

E' evidente che $yxa = yaxa$ implica contemporaneamente $P = h(P)f(P)$ e $Q = h(Q)f(Q)$. Per la D1 $h(P) \sim h(Q)$ e $f(P) \sim f(Q)$, così $h(P)f(P) \sim h(Q)f(Q)$, ovvero $P \sim Q$. Di conseguenza $yxa = yaxa$ implica $P = Q$.

(*) ved. [8]

(**) ved. Parte I, pag. 33.

Lemma 13.5. L'identità $P = Q$ implica l'identità $yxa = yayxa$.

Dim.

L'identità $P = Q$ implica l'identità $Pl(P) = Ql(P)$, per il Lemma 6.3 pag. 40, Parte I, e $Pl(P) = Ql(P)$ è equivalente a $l(P) = l(Q)l(P)$ per cancellazione e idempotenza. Allora $P = Q$ implica $l(P) = l(Q)l(P)$. Ma $l(P) = l(Q)l(P)$ è equivalente all'identità $yxa = yayxa$ per la D1 e per il Teorema 5 di [8]. Così $P = Q$ implica $yxa = yayxa$.

Lemma 13.6. L'identità $P = Q$ è equivalente a $yxa = yaxa$ sse $P = Q$ implica un'identità $A = B$ in tre variabili per cui $r(A) \not\sim r(B)$.

Dim.

La condizione necessaria è evidente, in quanto ogni semigruppo che soddisfa $P = Q$ soddisfa anche $yxa = yaxa$, e quindi soddisfa un'identità $A = B$ in tre variabili t.c. $r(A) \not\sim r(B)$.

Proviamo ora la condizione sufficiente. Supponiamo che $P = Q$ implichi un'identità $A = B$ in tre variabili t.c. $r(A) \not\sim r(B)$.

L'identità $A = B$ implica $axy = axyayxy$ cioé la semiregolarità a sinistra per le Conclusioni di [6] e per il diagramma della TAV 1, pag. 33, Parte I.

Quindi $yxa = yaxa$ implica $P = Q$ per il Lemma 13.4 e $P = Q$ implica $axy = axyayxy$ e $yxa = yayxa$ per il Lemma 13.5. Poiché il diagramma della TAV. 1, pag. 33, Parte I è un semireticolo inferiore, $P = Q$ deve essere equivalente a $yxa = yaxa$.

Lemma 13.7 Sia P una parola t.c. $|c_P| = n$. Allora $P = Q$ è equivalente a $yxa = yaxa$ se $h\delta_m(P) \not\sim h\delta_m(Q)$, per $3 \leq m \leq n$.

Dim.

Sia P una parola t.c. $c_P = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$. Supponiamo che esista un m,

$3 \leq m \leq n$, t.c. $h\delta_n(P) \not\sim h\delta_m(Q)$. Siano $a \equiv h\delta_m(P)$, $b \equiv h\delta_m(Q)$ e $c \equiv h\, r_m(P) \equiv h\, r_m(Q)$, allora $a \not\equiv b$, $a \not\equiv c$, $b \not\equiv c$. Sia $x_j \equiv a$ $\forall j, 1 \leq j \leq n$, ad eccezione di quei j per cui $x_j \equiv b$ o $x_j \equiv c$. Così otteniamo un'identità in tre variabili $A = B$ t.c. $h\delta(A) \not\sim h\delta(B)$.

Ne segue facilmente che $r(A) \not\sim r(B)$, così $P = Q$ è equivalente a $yxa = yaxa$, per il lemma 12.6.

Lemma 13.8. L'identità $yxa = yayxa$ è equivalente a $P = Q$ sse $h\delta_m(P) \sim h\delta_m(Q)$ $\forall m$, $2 \leq m \leq |c_P|$.

Dim.

Valgono evidentemente le seguenti proprietà:

a) Se $A = B$ implica $C = D$, $h(A) \sim h(B)$ e $c_A = c_B$ allora $h(C) \sim h(D)$ e $c_C = c_D$

b) Siano A e B parole t.c. $c_A = c_B$ e $h(A) = h(B)$. Allora $yxa = yayxa$ implica $A = B$ sse $yxa = yayxa$ implica $\delta(A) = \delta(B)$, perché $\delta(A)$ è la sezione destra più lunga di A contenente esattamente $n-1$ variabili, dove $n = |c_A|$, analogamente per $\delta(B)$, e $h(A) = h(B)$. Inoltre ragionando per induzione su $|c_P|$ e applicando il Lemma 13.5, si ottiene la tesi.

Diamo ora la dimostrazione del Teorema 13.1.

Siano dunque P e Q parole che soddisfano D1 e supponiamo che $P = Q$ non sia equivalente a $yxa = yaxa$. Allora sarà certamente $h\delta_n(P) \sim h\delta_n(Q)$, $3 \leq n \leq |c_P|$, perché se così non fosse, per il Lemma 13.7, sarebbe $P = Q$ equivalente ad $yxa = yaxa$, contro l'ipotesi. Ora $h\delta_2(P) \sim h\delta_2(Q)$, poiché, per la D1, $f(P) \sim f(Q)$ e $t(P) \sim t(Q)$ e $h\delta_2(P) \equiv t(P)$ e $h\delta_2(Q) \equiv t(Q)$. Quindi $h\delta_n(P) \sim h\delta_n(Q)$, per $2 \leq n \leq |c_P|$. Perciò, per il Lemma 13.8, l'identità $P = Q$ è equivalente all'identità $yxa = yayxa$. c.v.d.

Un esempio di identità equivalente all'identità yxa = yayxa è dato dall'identità yxasyxa = yaxdyayx, le cui parole soddisfano D1.

Dualmente si prova il seguente

Teorema 13.2 Siano P e Q parole che soddisfano D1, allora P = Q è equivalente a

a) axy = axyay, ossia alla seminormalità sinistra, se $t_{\gamma_n}(P) \sim t_{\gamma_n}(Q)$ $\forall n,\ 2 \leq n \leq |c_p|$,

b) axy = axay, ossia alla quasi normalità sinistra, negli altri casi,

Abbiamo caratterizzato sinora le identità di bande inequivalenti le cui parole soddisfano le relazioni D1 e D2. Resta ancora da trovare un elenco completo delle identità di bande non equivalenti le cui parole soddisfano le condizioni descritte rispettivamente in D3,D4,D5.

Entrare in dettagli è compito che esula dagli scopi di questo Quaderno. Comunque si dimostra che per ognuno dei casi D3,D4,D5 esiste una infinità numerabile di identità non equivalenti.

Sia $\mathcal{G}$ l'insieme di tutte queste infinite identità. In |3| Fennemore trova ancora i collegamenti tra gli elementi di $\mathcal{G}$.

A titolo informativo riportiamo la Tavola 4 alla pag. seguente che illustra $\mathcal{G}$.

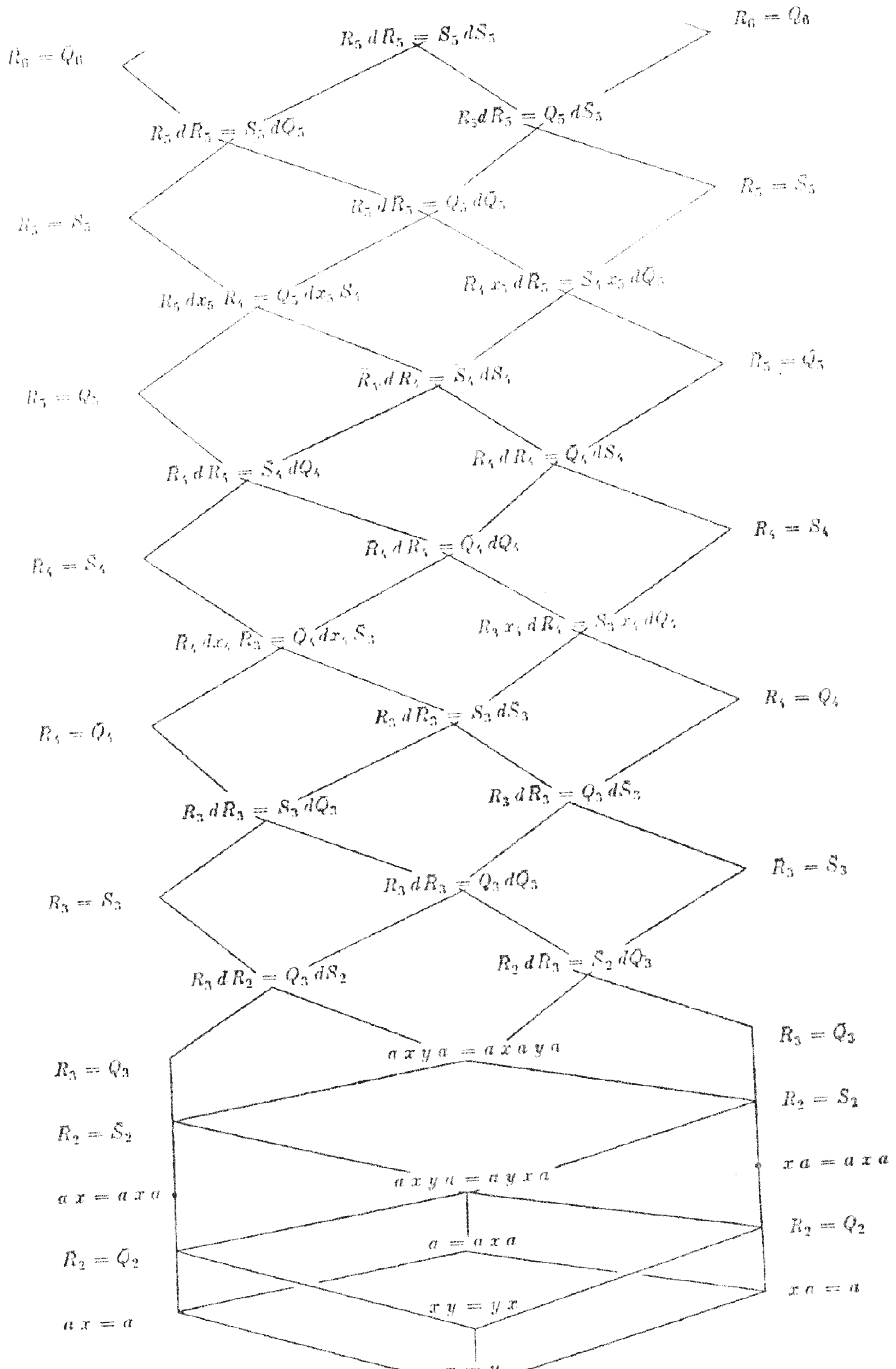
Nel diagramma $R_i, Q_i, S_i, \bar{R}_i, \bar{Q}_i, \bar{S}_i$ $(i = 2,3,\ldots.)$ sono parole definite induttivamente, nelle variabili x_i, mentre d è una variabile distinta dalle x_i:

$R_2 = x_3x_2x_1$, $\quad Q_2 = x_2x_3x_1$, $\quad S_2 = x_3x_1x_2x_1$

$R_3 = x_1x_2x_3$, $\quad Q_3 = x_1x_2x_3x_1x_3$, $\quad S_3 = x_1x_2x_3x_1x_3x_2x_3$

$R_n = R_{n-1}x_n$, $\quad Q_n = Q_{n-1}x_nR_n$; $\quad S_n = S_{n-1}x_nR_n$ per n pari, $n \geq 4$

$R_n = x_nR_{n-1}$, $\quad Q_n = R_nx_nQ_{n-1}$, $\quad S_n = R_nx_nS_{n-1}$ per n dispari $n \geq 5$.



Il reticolo di tutte le identità su bande

TAV. 4

Nel suo secondo lavoro |3| Fennemore dimostra che $\mathcal{G}$ è l'elenco completo di tutte le identità non equivalenti sulle bande. Sostituendo, pertanto, nel diagramma della TAV.4 ogni varietà di bande alla identità che la definisce si ottiene il reticolo di tutte le varietà di bande. Ricordato che una identità P = Q in n variabili è <u>irriducibile</u> se non è equivalente ad alcuna identità in meno di n variabili, (le 18 identità trovare da Kimura in |6| e poi riprese da Petrich in |8| si prova che sono irriducibili), i principali risultati di |3| sono i seguenti:

<u>Teorema 13.3.</u> Se P = Q è in $\mathcal{G}$, allora P = Q è una identità irriducibile.

<u>Teorema 13.4.</u> Ogni identità sulle bande è equivalente ad una, ed una sola, delle identità in $\mathcal{G}$.

<u>Teorema 13.5.</u> Ogni varietà di bande può essere definita da una, ed una sola, delle identità dell'insieme $\mathcal{G}$.

Dal diagramma di tutte le varietà di bande si ricavano direttamente molti risultati.

Ad esempio, i seguenti:

i) esistono esattamente 8 + 10 (n-2) distinte varietà di bande che possono essere definite mediante una identità in n variabili, $n \geq 2$;

ii) esistono esattamente 10(n-1) distinte varietà di bande che possono essere definite mediante insiemi di identità che implicano una identità in n variabili, $n \geq 2$.

E ancora, detta $\mathcal{V}$ la varietà di tutte le bande ed L(B) il reticolo di tutte la varietà di bande, si ha:

iii) $\mathcal{V}$ non è generata da nessun insieme finito di sottovarietà proprie;

iv) L(B) contiene unità e zero, non è complementato, non soddisfa la condizione delle catene ascendenti, soddisfa la condizione delle catene discendenti, è completo e distributivo.

Da notare, anche, la particolare posizione nel reticolo L(B) occupata dalle bande già classificate da Petrich in |8| di cui ci siamo occupati nella Parte I, § 5, di questo Quaderno.