I BI-IDEALI NEI SEMIGRUPPI REGOLARI E NEGLI ORTOGRUPPI.

Introduzione.

Il concetto di bi-ideale, che generalizza quello classico di ideale, è stato introdotto nel 1952 da Good e Hughes e si è in seguito rivelato molto utile.

Infatti vari autori (Lajos, Steinfeld, Kuroki, Szàsz,....) hanno riproposto uno studio più approfondito dei semigruppi regolari e loro sottoclassi attraverso i bi-ideali, ottenendo tra l'altro delle interessanti caratterizzazioni.

Recentemente Steinfeld [10] ha dimostrato che la completa regolarità di un semigruppo è sufficiente a garantire la completa regolarità di ogni suo bi-ideale. In questo lavoro si dimostra invece che la regolarità di un semigruppo non è sufficiente a garantire la regolarità di ogni suo bi-ideale.

Si prova inoltre che esiste un isomorfismo tra i semigruppi $\mathcal{B}(S)$ e $\mathcal{B}(S/\mathcal{H})$ dei bi-ideali di S e $S/\mathcal{H}$, quoziente di S rispetto alla relazione di Green $\mathcal{H}$, ove S sia un semigruppo regolare ed $\mathcal{H}$ sia una congruenza.

Spesso i citati autori hanno utilizzato il semigruppo $\mathcal{B}(S)$ dei bi-ideali di S per caratterizzare alcune classi di semigruppi. Analogamente qui si perviene a delle caratterizzazioni di alcune sottoclassi di ortogruppi mediante proprietà di $\mathcal{B}(S)$, caratterizzazioni che tra l'altro evidenziano il legame esistente tra $\mathcal{B}(S)$ e la banda E degli idempotenti dell'ortogruppo S; in particolare si è provato che esiste un isomorfismo tra $\mathcal{B}(S)$ e $\mathcal{B}(E)$.

DEFINIZIONE 1 - Un sottosemigruppo $B(\neq \emptyset)$ di un semigruppo S si dice <u>bi-ideale</u> di S se $BSB \subseteq B$.

E' noto che se S è regolare $BSB = B$, per ogni bi-ideale B di S.

<u>TEOREMA 1</u> -

Se ogni bi-ideale principale di un semigruppo S è regolare, allora S è completamente regolare.

<u>Dim.</u>

Sia a un elemento di un semigruppo S, si consideri il bi-ideale principale

enerato da a, $(a)_b$. Poiché $(a)_b$ è per ipotesi regolare e $(a)_b = aSa$, esisto-
o un elemento x di $(a)_b$ ed un elemento s di S tali che $a = axa = a^2sa^2$. Se-
ue che a è un elemento completamente regolare di S.

In [10] Steinfeld ha dimostrato che la completa regolarità di un semigruppo quivale alla completa regolarità di ogni suo bi-ideale. Da questo risultato e al Teorema 1 segue immediatamente che la regolarità di un semigruppo non garan-isce la regolarità di ogni suo bi-ideale, anzi neppure la regolarità di ogni suo i-ideale principale.

Il seguente teorema fornisce una proprietà dei bi-ideali di un semigruppo re-olare.

TEOREMA 2

Ogni bi-ideale di un semigruppo regolare S è unione delle $\mathcal{H}$-classi dei suoi lementi.

Dim.

Sia B un bi-ideale di un semigruppo regolare S. Evidentemente B è contenuto n $\bigcup_{b\in B} H_b$; inoltre, se x è un elemento di $\bigcup_{b\in B} H_b$, esiste un elemento b' di tale che $x\mathcal{H}b'$, cioé tale che $xS = b'S$ ed $Sx = Sb'$. Da ciò e dalla regola-ità di S segue

$$x = xax = b'sx = b's'b' \quad \text{(con } a,s,s' \text{ opportuni).}$$

Usualmente si denota con $\mathcal{B}(S)$ il semigruppo dei bi-ideali di un semigruppo S.

TEOREMA 3

Sia S un semigruppo regolare con $\mathcal{H}$ congruenza. Allora i semigruppi $\mathcal{B}(S)$ $\mathcal{B}(S/\mathcal{H})$ sono isomorfi.

Dim.

Sia S un semigruppo regolare con $\mathcal{H}$ congruenza e sia

$$f : \mathcal{B}(S) \to \mathcal{B}(S/\mathcal{H})$$

l'applicazione così definita: $f(B) = \mathcal{H}_B$ ove $\mathcal{H}_B = \{H_b\}_{b\in B}$. L'applicazione f è ben posta. Infatti, se b_1, b_2 sono due elementi di B ed s è un elemento di S,

$$H_{b_1} H_s H_{b_2} = H_{b_1 s b_2}$$

con $b_1 s b_2$ elemento di B, per cui $H_{b_1} H_s H_{b_2}$ è un elemento di $\mathcal{H}_B$, che pertanto è un bi-ideale di $S/\mathcal{H}$.

Si dimostra che f è isomorfismo. Siano B e B' due bi-ideali di S tali che $\mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{B'}$; allora, per il teorema 2, B = B', cioé f è iniettiva.

D'altra parte, se T è un sottoinsieme di S tale che $H = \{H_t\}_{t\in T}$ è un bi-ideale di $S/\mathcal{H}$, $\bigcup_{t\in T} H_t$ è un bi-ideale di S. Infatti, se x,y sono due elementi di $\bigcup_{t\in T} H_t$ ed s è un elemento di S, esistono t_1, t_2 elementi di T tali che x sta in H_{t_1} e y sta in H_{t_2} e, poiché H è un bi-ideale di $S/\mathcal{H}$

$$H_{t_1} H_s H_{t_2} = H_{t'}$$

ove t' è un elemento di T. Pertanto

$$xsy \in H_{t_1} H_s H_{t_2} = H_{t'} \subseteq \bigcup_{t\in T} H_t$$

cioé $\bigcup_{t\in T} H_t$ è un bi-ideale di S e quindi f è suriettiva.

Siano infine B e B' due bi-ideali di S e siano b un elemento di B e b' un elemento di B'; allora $H_b H_{b'} = H_{bb'}$ e quindi $\mathcal{H}_B \mathcal{H}_{B'} \subseteq \mathcal{H}_{BB'}$.

Inoltre sia x un elemento di BB' e siano b un elemento di B e b' un elemento di B' tali che $x = bb'$. Allora, se h è un elemento di H_x

$$hS = bb'S \qquad Sh = Sbb' .$$

Da ciò e dalla regolarità di S, segue

$$h = hah = bb'sh = bb's'bb'$$

ove a,s,s' sono opportuni elementi di S. Pertanto h è un elemento di $H_{bb's'b}H_{b'}$. Inoltre se k è un altro elemento di H_x, $k = bb's''bb'$, con s" opportuno elemento di s, è $bb's''b \; H bb's'b$. Allora

$$H_x = H_{bb's'b'b} \; H_{b'}$$

e quindi $H_{BB'} \subseteq H_B \; H_{B'}$.

Pastijn in [6] ha dimostrato che se S è regolare $\mathcal{B}(S)$ è una banda normale (cioé per ogni A,B,C in $\mathcal{B}(S)$, ABCA = ACBA) se e solo se S è intraregolare. Da questa proprietà di $\mathcal{B}(S)$ e da una caratterizzazione di Lajos (cioé, S è regolare e intraregolare se e solo se $\mathcal{B}(S)$ è una banda) (cfr. [9]) segue immediatamente il seguente teorema.

TEOREMA 4

Un semigruppo S è regolare e intraregolare se e solo se $\mathcal{B}(S)$ è una banda normale.

Poiché un ortogruppo è un particolare semigruppo regolare e intraregolare, se S è un ortogruppo $\mathcal{B}(S)$ è una banda normale. Per questa classe di semi-gruppi è interessante ricercare la relazione esistente tra la banda dei bi-ideali e la banda degli idempotenti.

TEOREMA 5

Un semigruppo S è un ortogruppo se e solo se ogni bi-ideale di S è un ortogruppo.

Dim.

Sia S un ortogruppo e sia B un bi-ideale di S, allora è noto che B è comple tamente regolare (cfr. [10]). Inoltre, se e ed f sono idempotenti di B, e f è un idempotente di B perché l'insieme degli idempotenti di S e B sono sottosemigruppi di S.

Il viceversa è immediato.

COROLLARIO 6

Un semigruppo S è un ortogruppo con la banda degli idempotenti di tipo P, ove P è uno qualsiasi dei tipi di banda classificati in [7], se e solo se ogni bi-ideale di S è un ortogruppo con la banda degli idempotenti di tipo P.

Se S è un ortogruppo con H congruenza, le bande E ed S/H sono isomorfe. Allora dal Teorema 3 segue che le bande $\mathcal{B}(S)$ e $\mathcal{B}(E)$ sono isomorfe. Però, se S è un ortogruppo, l'isomorfismo tra $\mathcal{B}(S)$ e $\mathcal{B}(E)$ esiste anche se H non è una congruenza. Vale infatti il seguente teorema.

TEOREMA 7

Sia S un ortogruppo con banda degli idempotenti E. Allora le bande $\mathcal{B}(S)$ e $\mathcal{B}(E)$ sono isomorfe.

Dim.

Sia S un ortogruppo con banda degli idempotenti E e sia

$$Z : \mathcal{B}(S) \to \mathcal{B}(E)$$

l'applicazione così definita: Z(B) = E(B), ove E(B) è la banda degli idempotenti di B. L'applicazione Z è ben posta. Infatti, se B è un bi-ideale di S ed e, f sono due elementi di E(B) e g è un elemento di E, efg sta in E(B) perché E è una banda e B è un bi-ideale di S; pertanto E(B) è un bi-ideale di E.

Si dimostra che Z è un isomorfismo. Siano B e B' due bi-ideali di S tali che E(B) = E(B') e sia b un elemento di B. Per il teorema 5, esiste un elemento x di B tale che $b = bxb$ e $xb = bx$; allora, essendo bx un idempotente di B e quindi di B',

$$b = bxb = bxbxb$$

è un elemento di B'. Analogamente si prova che, se b' è un elemento di B', b' è un elemento di B. Pertanto $B = B'$, cioé Z è iniettiva.

Sia ora B un bi-ideale di E e sia B' il bi-ideale di S generato da B. Allora ogni elemento di B è un idempotente di B'; inoltre, se e è un idempotente di B', poiché $B' = BSB$, esistono b_1, b_2 elementi di B ed s elemento di S tali che

$$e = b_1 s b_2 = b_1^2 s b_2^2 = b_1 e b_2$$

quindi e è un elemento di B. Pertanto B' è un bi-ideale di S la cui banda degli idempotenti è B, cioé Z è suriettiva.

Siano infine B e B' due bi-ideali di S; allora, evidentemente, $E(B)E(B') \subseteq E(BB')$. Inoltre, se e è un elemento di $E(BB')$, esistono b e b' elementi rispettivamente di B e B' tali che $e = bb'$.

Denotate con b' l'unità della H-classe di B' contenente b' e con $\hat{b}$ l'unità della H-classe di B contenente b, si ha

$$e\hat{b} = bb'\hat{b} = bb'\hat{b} = \hat{b}e\hat{b} \in E(B)$$
$$\hat{b}'e = \hat{b}'bb' = \hat{b}'bb'\hat{b}' = \hat{b}'e\hat{b}' \in E(B').$$

Allora, se b^{-1} è l'inverso di b nella H-classe di B che lo contiene e se b'^{-1} è l'inverso di b' nella H-classe di B' che lo contiene

$$e\hat{b}\hat{b}'e = bb'\hat{b}\hat{b}'bb' = bb'\hat{b}'\hat{b}\hat{b}'\hat{b}bb' = bb'(\hat{b}'\hat{b})^2bb' =$$
$$= bb'\hat{b}'\hat{b}bb' = bb'bb' = e^2 = e$$

quindi e è un elemento di $E(B)E(B')$. Pertanto Z è un omomorfismo.

Una banda E è detta <u>regolare sinistra</u> [risp. <u>destra</u>] se, per ogni coppia (e,f) di elementi di E $ef = efe$ [$fe = efe$]. S. Lajos ([3],[4]) ha caratterizzato gli ortogruppi con la banda degli idempotenti E regolare sinistra [risp. destra]. Ha infatti dimostrato il seguente teorema, del quale, ovviamente, vale il duale.

<u>TEOREMA 8</u>

Un semigruppo S è un ortogruppo con la banda degli idempotenti E regolare sinistra se e solo se $\mathcal{B}(S)$ è un semigruppo regolare di cui S è una unità destra.

Il Teorema 9 che segue (del quale vale anche il duale, Teorema 9') caratterizza la stessa classe di semigruppi, mettendo però in evidenza la relazione che esiste tra le bande $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}(S)$.

<u>TEOREMA 9</u>

Un semigruppo S è un ortogruppo con la banda degli idempotenti E regolare sinistra se e solo se $\mathcal{B}(S)$ è una banda regolare sinistra.

<u>Dim.</u>

Sia S un ortogruppo con la banda degli idempotenti E regolare sinistra e siano A,X due bi-ideali di E. Allora, se a è un elemento di A ed x, un elemento di X, ax = axa, cioé l'elemento ax di AX sta in AXA e quindi $AX \subseteq AXA$. Inoltre, se aa' sono due elementi di A ed x è un elemento di X, axa' = a(xa'x), cioè l'elemento axa' di AXA sta in AX e quindi $AXA \subseteq AX$. Pertanto $\mathcal{B}(E)$ è una banda regolare sinistra. Da ciò e dal Teorema 7 segue che $\mathcal{B}(S)$ è una banda regolare sinistra.

Viceversa, sia $\mathcal{B}(S)$ una banda regolare sinistra; allora $\mathcal{B}(S)$ è un semigruppo regolare e BS = BSB = B per ogni bi-ideale B di S. Da ciò e dal Teorema 8, segue che S è un ortogruppo con la banda degli idempotenti E regolare sinistra.

Diciamo che una banda E è <u>normale sinistra</u> [risp. <u>destra</u>] se efg = egf [gfe = fge] per ogni e,f,g elementi di E.

Evidentemente una banda normale sinistra [risp. destra] è regolare sinistra [risp. destra].

TEOREMA 10 [10']

Se il semigruppo $\mathcal{B}(S)$ dei bi-ideali di un semigruppo S è una banda regolare sinistra [destra], allora $\mathcal{B}(S)$ è una banda normale sinistra [destra].

Dim.

Sia $\mathcal{B}(S)$ una banda regolare sinistra e siano A,X,Y bi-ideali di S. Allora

$$AXY = AXYX = AXAYX \subseteq AYX$$

$$AYX = AYXY = AYAXY \subseteq AXY$$

Pertanto AXY = AYX, cioé $\mathcal{B}(S)$ è una banda normale sinistra.

Dai Teoremi 9 - 9' e 10 - 10' si ottengono immediatamente il teorema seguente ed il suo duale.

TEOREMA 11

Un semigruppo S è un ortogruppo con la banda degli idempotenti E regolare sinistra se e solo se $\mathcal{B}(S)$ è una banda normale sinistra.

Immediata conseguenza dei Teoremi 9 - 9' è la seguente caratterizzazione, dovuta a Kuroki (cfr. [5]), degli ortogruppi nei quali la banda degli idempotenti E è un semireticolo.

TEOREMA 12

Un semigruppo S è un ortogruppo nel quale la banda degli idempotenti E è un semireticolo se e solo se $\mathcal{B}(S)$ è un semireticolo.

Poiché, come si è precedentemente osservato, se S è un ortogruppo $\mathcal{B}(S)$ è una banda normale, dai Teoremi 9,10,11,12, e loro duali si ottiene infine il seguente teorema.

TEOREMA 12

Se un semigruppo S è un ortogruppo con la banda degli idempotenti E di tipo $\mathcal{P}$, ove $\mathcal{P}$ è uno qualsiasi dei tipi di banda classificati in [7], allora $\mathcal{B}(S)$ è una banda di tipo $\mathcal{P}$. Inoltre se il tipo $\mathcal{P}$ è quello di banda regolare sinistra, o regolare destra, o semireticolo, allora e solo allora vale il viceversa