PARTE II

GRUPPI DI CONICHE

N.I Premessa

Nella prima parte abbiamo visto come l'insieme delle forme quadratiche omogenee e dei polinomi di grado ≤ 2 di n variabili si possano strutturare come un gruppo di polinomi (secondo Lie) tramite una matrice antisimmetrica di ordine n ed a coefficienti costanti.

Ora, se una conica $\mathscr{C}$ ha equazione:

$$F(x^\circ, x^1, x^2) = 0$$

in coordinate proiettive omogenee e:

$$f(x,y) = 0$$

in coordinate proiettive non omogenee, certamente F è una forma quadratica omogenea in 3 variabili ed f è un polinomio di 2° grado; risulta quindi naturale applicare la definizione di gruppo di polinomi alle coniche.

N.2 Gruppi di coniche.

Siano $\mathcal{C}^1$ e $\mathcal{C}^2$ due coniche di equazione, in coordinate proiettive omogenee $(x^0,x^1,x^2,)$:

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} \mathcal{C}^1&: a_{ij}x^i x^j = F^1(x^0,x^1,x^2) = 0 \\ \mathcal{C}^2&: b_{ij}x^i x^j = F^2(x^0,x^1,x^2) = 0 \end{aligned}$$

Se

$$\eta = (\eta^{\alpha\beta})_{\alpha,\beta} = 0,1,2 = \begin{pmatrix} 0 & \eta^{01} & \eta^{02} \\ \eta^{10} & 0 & \eta^{12} \\ \eta^{20} & \eta^{21} & 0 \end{pmatrix}$$

è una matrice a coefficienti costanti ed antisimmetrica, si può definire tramite essa la P.P.G. di $\mathcal{C}^1$ e $\mathcal{C}^2$ al modo seguente: $(\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2)^*$ è la conica di equazione:

$$(2.3)\qquad (a_{ij}x^i x^j, b_{ij}x^i x^j)^* = 0$$

cioè:

$$(2.4)\qquad (F^1,F^2)^*(x^0,x^1,x^2) = 0$$

che, com'è noto ha la forma esplicita:

$$(2.5)\qquad \eta^{\alpha\beta}a_{\alpha j}b_{\beta k}x^j x^k = 0$$

Risulta chiaro a questo punto come, partendo dalla definizione di gruppo di polinomi, è naturale definire il gruppo di coniche come l'insieme delle coniche aventi equazione in cui il primo membro è un elemento del gruppo di polinomi costruito tramite la matrice η e partendo dai polinomi $F^1(x^0,x^1,x^2)$ ed $F^2(x^0,x^1,x^2)$.

Ovviamente si ottiene ancora un gruppo di coniche se, invece di partire da due coniche, si parte da un numero finito o infinito di coniche; considerando infine l'insieme di tutte le coniche ed introducendo in esso l'operazione P.P.G. definita da η, si ha direttamente un gruppo di coniche.

Se le equazioni delle coniche sono espresse in coordinate proiettive non omogenee, considerando due coniche $\mathcal{C}^1$ e $\mathcal{C}^2$ di equazioni rispettivamente:

$$\mathfrak{C}^1 : f^1(x,y) = 0 \qquad ; \qquad \mathfrak{C}^2 : f^2(x,y) = 0$$

dove

$$f^1(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{oo}$$

$$f^2(x,y) = b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + 2b_{12}xy + 2b_{01}x + 2b_{02y} + b_{oo}$$

la loro P.P.G. si definisce tramite una matrice non singolare del tipo:

$$\eta = \begin{vmatrix} o & \alpha \\ -\alpha & o \end{vmatrix}$$

esplicitando si ha:

$$(\mathfrak{C}^1, \mathfrak{C}^2)^*(x,y) = (f^1, f^2)^*(x,y) = 0$$

cioè

$$\alpha(2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_{01})(2b_{12}x + 2b_{22}y + 2b_{2o}) -$$

$$- \alpha\ (2a_{12}x + 2a_{22}y + 2a_{02})(2b_{11}x + 2b_{12}y + 2b_{01}) = 0$$

Si può osservare quindi in primo luogo che la P.P.G. di due coniche in coordinate proiettive non omogenee è indipendente dalla matrice η ; in secondo luogo la conica di equazione

$$(f^1, f^2)^*(x,y) = 0$$

ha in coordinate proiettive omogenee equazione:

$$(F^1, F^2)^*(x^o, x^1, x^2) = 0$$

ottenuta con la P.P.G. definita dalla matrice:

$$\text{(2.6)} \qquad \begin{vmatrix} o & o & o \\ o & o & \alpha \\ o & -\alpha & o \end{vmatrix}$$

e cioè con la matrice:

$$\text{(2.7)} \qquad \Upsilon = \begin{vmatrix} o & o & o \\ o & o & 1 \\ o & -1 & o \end{vmatrix}$$

per il seguito noi faremo uso di coordinate proiettive omogenee, ma perchè quanto detto sia valido anche in coordinate non omogenee, considereremo P.P.G. definite dalla matrice (2.7).

N.3 Centro di una conica .

Consideriamo l'insieme delle coniche reali con una struttura di gruppo di coniche definita da una matrice $\eta = (\eta^{\alpha\beta})$ anch'essa reale.

Se consideriamo due coniche $\mathcal{C}^1$ e $\mathcal{C}^2$ aventi equazioni (2.1), esplicitando la (2.3) si ha:

$$\eta^{\alpha\beta}(2a_{\alpha j}x^j)(2b_{\beta k}x^k) = 0$$

ovvero:

$$\begin{aligned}
&\eta^{01}(a_{00}x^0 + a_{01}x^1 + a_{02}x^2)(b_{10}x^0 + b_{11}x^1 + b_{12}x^2) + \\
&+ \eta^{02}(a_{00}x^0 + a_{01}x^1 + a_{02}x^2)(b_{20}x^0 + b_{21}x^1 + b_{22}x^2) + \\
&+ \eta^{12}(a_{10}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2)(b_{20}x^0 + b_{21}x^1 + b_{22}x^2) + \\
&+ \eta^{10}(a_{10}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2)(b_{00}x^0 + b_{01}x^1 + b_{02}x^2) + \\
&+ \eta^{20}(a_{20}x^0 + a_{21}x^1 + a_{22}x^2)(b_{00}x^0 + b_{01}x^1 + b_{02}x^2) + \\
&+ \eta^{21}(a_{20}x^0 + a_{21}x^1 + a_{22}x^2)(b_{10}x^0 + b_{11}x^1 + b_{12}x^2) = 0
\end{aligned}$$

che si può scrivere anche, tenendo conto dell'antisimmetria dei coefficienti $\eta^{\alpha\beta}$ e dalle (2.1):

$$\eta^{01}(F^1_{x^0} F^2_{x^1} - F^1_{x^1} F^2_{x^0}) + \eta^{02}(F^1_{x^0} F^2_{x^2} - F^1_{x^2} F^2_{x^0}) + \eta^{12}(F^1_{x^1}F^2_{x^2} - F^1_{x^2}F^2_{x^1}) = 0 \qquad (3.1)$$

considerando poi $\eta = \tilde{I}$, la (3.1) diviene

$$F^1_{x^1} F^2_{x^2} - F^1_{x^2} F^2_{x^1} = 0 \qquad (3.2)$$

Ora, tenendo presente che le coordinate del centro di $\mathcal{C}^1$ sono tali da verificare il sistema:

$$\begin{cases} F^1_{x^1}(x^0, x^1, x^2) = 0 \\ F^1_{x^2}(x^0, x^1, x^2) = 0 \end{cases}$$

e che le coordinate del centro di $\mathcal{C}^2$ sono tali da verificare il sistema:

$$\begin{cases} F_{x^1}^2 (x^0,x^1,x^2) = 0 \\ F_{x^2}^2 (x^0,x^1,x^2) = 0 \end{cases}$$

risulta evidente che la conica di equazione (3.2) passa per il centro di $\mathcal{C}^1$ e per quello di $\mathcal{C}^2$.

Ciò dimostra che:

In un gruppo di coniche con la P.P.G. definita dalla matrice Υ, la P.P.G. di due coniche $\mathcal{C}^1$ e $\mathcal{C}^2$ passa per il centro di entrambe.

Inoltre, come conseguenza si ha che, assegnata una conica $\mathcal{C}$ di centro C (proprio o improprio) e tre coniche $\mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2, \mathcal{C}^3$ risulta:

$$C \in (\mathcal{C}^1,\mathcal{C})^* \cap (\mathcal{C}^2,\mathcal{C})^* \cap (\mathcal{C}^3,\mathcal{C})^* .$$

In virtù di questo fatto, considerata una conica $\mathcal{C}$ di equazione:

$$F(x^0,x^1,x^2) = 0$$

e le tre coniche:

$$\mathcal{C}^1 : x^1x^2 = 0; \qquad \mathcal{C}^2 : x^1(x^2 - x^0) = 0; \qquad \mathcal{C}^3 : (x^1 - x^0)\,x^2 = 0$$

risulta che il centro C è un punto le cui coordinate soddisfano il sistema:

$$(5.3) \quad \begin{cases} (\mathcal{C}^1,\mathcal{C})^* : \; x^2F_{x^2} - x^1F_{x^1} = 0 \\ (\mathcal{C}^2,\mathcal{C})^* : \; (x^2-x^0)F_{x^2} - x^1F_{x^1} = 0 \\ (\mathcal{C}^3,\mathcal{C})^* : \; x^2F_{x^2} - (x^1-x^0)F_{x^1} = 0 \end{cases}$$

che si può anche scrivere:

$$(3.4) \quad \begin{cases} x^0F_{x^2} = 0 \\ x^0F_{x^1} = 0 \\ x^0(F_{x^1} + F_{x^2}) = 0 \end{cases}$$

le soluzioni proprie di tale sistema sono le stesse del sistema lineare:

$$(3.5)\quad \begin{cases} F_{x^1} = 0 \\ F_{x^2} = 0 \end{cases}$$

e quindi, nel caso in cui $\mathfrak{C}$ è a centro (proprio), il sistema (3.3) ha un'unica soluzione propria che fornisce le coordinate di C.

Se $\mathfrak{C}$ è una parabola, la ricerca della soluzione impropria del sistema (3.3) porta a risolvere il sistema:

$$(3.6)\quad \begin{cases} x^0 = 0 \\ x^2(a_{12}x^1 + a_{22}x^2) - x^1(a_{11}x^1 + a_{12}x^2) = 0; \end{cases}$$

la soluzione $(0, a_{12}, -a_{11}) = (0, a_{22}, -a_{12})$ del sistema (3.6), poichè soddisfa anche l'equazione della parabola $\mathfrak{C}$, fornisce le coordinate del centro.

Osserviamo ancora che, se di due coniche $\mathfrak{C}^1$ e $\mathfrak{C}^2$ una è una parabola, allora $(\mathfrak{C}^1, \mathfrak{C}^2)^*$, dovendo passare per un punto improprio, è parabola o iperbole; se $\mathfrak{C}^1$ e $\mathfrak{C}^2$ sono parabole aventi centri distinti, allora $(\mathfrak{C}^1, \mathfrak{C}^2)^*$è iperbole; infine, se

$$\mathfrak{C}^1 : a_{ij}x^i x^j = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathfrak{C}^2 : b_{ij}x^i x^j = 0$$

sono due circonferenze, allora la conica $(\mathfrak{C}^1, \mathfrak{C}^2)^*$ risulta avere equazione :

$$x^0 \left[x^1(b_{2o} - a_{2o}) + x^2(a_{1o} - b_{1o}) + (a_{1o}b_{2o} - a_{2o}b_{1o}) \right] = 0$$

che è una conica semplicemente degenere con una componente coincidente con la retta impropria, e l'altra componente coincidente con la retta che congiunge i centri di $\mathfrak{C}^1$e $\mathfrak{C}^2$.

N.4 Assi ed asintoti di una conica.

La possibilità di strutturare l'insieme delle coniche di un piano come gruppo di coniche nel senso del precedente N.2, consente di ritrovare alcuni enti geometrici legati appunto alle curve del secondo ordine.

Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro proprio e $\mathcal{C}^1$ una conica doppiamente degenere rispettivamente di equazioni:

$$\mathcal{C}:\ a_{ij}x^i x^j = 0 \qquad \mathcal{C}':\ (ax^o + bx^1 + cx^2)^2 = 0\,;$$

risulta:

$$(\mathcal{C},\mathcal{C}')^* = (2a_{11}x^1 + 2a_{12}x^2 + 2a_{1o}x^o)(2ax^o + 2bx^1 + 2cx^2)c -$$
$$(2a_{12}x^1 + 2a_{22}x^2 + 2a_{2o}x^o)(2ax^o + 2bx^1 + 2cx^2)b = 0$$

cioè:

$$(ax^o + bx^1 + cx^2)\left[(a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{1o}x^o)c - (a_{12}x^1 + a_{22}x^2 + a_{2o}x^o)\,b\right] = 0$$

La conica $(\mathcal{C},\mathcal{C}')^*$ è dunque degenere e composta dalle rette

$$r: ax^o + bx^1 + cx^2 = 0$$

che è componente doppia di $\mathcal{C}'$,

$$r': (a_{11}c - a_{12}b)x^1 + (a_{12}c - a_{22}b)x^2 + (a_{1o}c - a_{2o}b)x^o = 0\,;$$

imponendo ora che r' sia asse per C, risulta che una coppia di suoi parametri direttori:

$$\ell = (a_{22}b - a_{12}c) \qquad m = (a_{11}c - a_{12}b)$$

deve soddisfare l'equazione:

$$(4.1)\quad a_{12}\left[(a_{22}b - a_{12}c)^2 - (a_{11}c - a_{12}b)^2\right] + (a_{22} - a_{11})(a_{22}b - a_{12}c)(a_{11}c - a_{12}b) = 0$$

che si può anche scrivere:

$$(4.2)\quad a_{12}(b^2-c^2) + (a_{22}-a_{11})bc = 0$$

In conclusione: calcolando la P.P.G. definita dalla matrice (2.7) fra una data conica $\mathscr{C}$ ed una conica $\mathscr{C}'$ doppiamente degenere di parametri direttori b,c soddisfacenti la (4.1) o la (4.2) si ottiene una conica degenere di cui una componente è la componente doppia di $\mathscr{C}$ e l'altra è asse di $\mathscr{C}$.

Osserviamo che non dipendendo le (4.1) e (4.2) dal coefficiente a che figura nell'equazione di $\mathscr{C}'$, si può sempre considerare $a = 0$. Inoltre, se $\mathscr{C}$ è circonferenza, cioè se $a_{11} = a_{12}$ e $a_{12} = 0$ le (4.1) e (4.2) sono identicamente soddisfatte, a riprova del fatto che per la circonferenza tutte le rette per il centro sono assi (si ricordi che r' passa per il centro di $\mathscr{C}$).

Se $\mathscr{C}$ è una parabola, perchè r' risulti essere il suo asse deve essere la polare di $\overline{c}\ (0,a_{12},a_{22})^{(*)}$, e quindi, se $\mathscr{C}$ ha equazione:

$$a_{ij}x^ix^j = F(x^0,x^1,x^2) = 0$$

deve essere:

$$\begin{cases} a_{1o}c-a_{2o}b = \rho\, F_{x^o}(\overline{C}) = 2\rho(a_{o1}a_{12}+a_{o2}a_{22}) \\ a_{11}c-a_{12}b = \rho\, F_{x^1}(\overline{C}) = 2\rho\ (a_{11}a_{12}+a_{12}a_{22}) \\ a_{12}c-a_{22}b = \rho\, F_{x^2}(\overline{C}) = 2\rho\ (a_{12}^2 + a_{22}^2) \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} a_{1o}(c - 2\rho a_{12}) - a_{2o}(b+2\rho a_{22}) = 0 \\ a_{11}(c - 2\rho a_{12}) - a_{12}(b+2\rho a_{22}) = 0 \\ a_{12}(c - 2\rho a_{12}) - a_{22}(b+2\rho a_{22}) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c = 2\rho a_{12} \\ b = 2\rho a_{22} \end{cases}$$

Quindi calcolando la P.P.G. di $\mathscr{C}$ con la conica

$$\mathscr{C}' : (- a_{22}x + a_{12}y)^2 = 0$$

si ottiene una conica le cui componenti sono:

$$r : - a_{22}x + a_{12}y = 0$$

r' = asse della parabola.

Qualora si abbia $a_{12} = a_{22} = 0$ ed $a_{11} \neq 0$, per asse si assume la retta:

$$x = - \frac{a_{10}}{a_{11}}$$

Per determinare l'equazione degli asintoti, si procede analogamente al caso degli assi; in questo caso bisogna imporre che i parametri direttori di r':

$$\ell = (a_{22}b - a_{12}c) \qquad m = (a_{11}c - a_{12}b)$$

verifichino l'equazione

$$(4.3) \quad a_{11}(a_{22}b - a_{12}c)^2 + 2a_{12}(a_{22}b - a_{12}c)(a_{11}c - a_{12}b) + $$
$$+ a_{22}(a_{11}c - a_{12}b)^2 = 0$$

che sviluppata e ridotta ai minimi ternmini diventa :

$$(4.4) \quad (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\left[a_{22}b^2 + a_{11}c - 2_{12}bc\right] = 0$$

Per le coniche a centro è:

$$a_{11}a_{12} - a_{12}^2 \neq 0$$

per cui si ha: calcolando la P.P.G. definita dalla matrice (2.7) fra una assegnata conica $\mathcal{C}$ ed un'altra conica $\mathcal{C}'$ che sia doppiamente degenere ed avente parametri direttori b , c soddisfacenti la:

(*) Il centro di $\mathcal{C}$ è il punto improprio $C(0,a_{22},- a_{12})$.

$$(4.5) \quad a_{22}b^2 + a_{11}c^2 - 2a_{12}bc = 0$$

si ottiene una conica degenere di cui una componente è la retta doppia di $\mathfrak{C}$ e l'altra è asintoto per $\mathfrak{C}$.

Anche in questo caso, data l'indipendenza di (4.4) e (4.5) dal coefficiente a nell'equazione di $\mathfrak{C}'$, si potrà supporre $a = 0$.

N. 5 Esempi.

Siano assegnate le seguenti coniche:

$\mathscr{C}^1$: $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 1 = 0$ circonferenza

$\mathscr{C}^2$: $2x^2 + 4y^2 - 2xy - 2x + y + 2 = 0$ ellisse

$\mathscr{C}^3$: $x^2 + 2xy - x + y = 0$ iperbole

$\mathscr{C}^4$: $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4y - 3 = 0$ parabola.

Determiniamo il centro di $\mathscr{C}^1$; per questo consideriamo le tre coniche:

$\mathscr{C}$: $xy = 0$ $\mathscr{C}'$: $x(y-1) = 0$ $\mathscr{C}''$: $y(x-1) = 0$

di centri rispettivamente $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,0)$ e le P.P.G.

$(\mathscr{C}^1,\mathscr{C})$: $(x+1)x - (y-3)y$ cioè $x^2 - y^2 + x + 3y = 0$

$(\mathscr{C}^1,\mathscr{C}')$: $(x+1)x - (y-3)(y-1)$ cioè $x^2 - y^2 + x + 4y - 3 = 0$

$(\mathscr{C}^1,\mathscr{C}'')$: $(x+1)(x-1) - (y-3)y$ cioè $x^2 - y^2 + 3y - 1 = 0$

Si trova che:

$(\mathscr{C}^1,\mathscr{C}) \cap (\mathscr{C}^1,\mathscr{C}') \cap (\mathscr{C}^2,\mathscr{C}'') = C(-1,3)$

Determiniamo ora gli assi di $\mathscr{C}^2$; determiniamo b e c in modo che soddisfino l'equazione:

$$-(b^2-c^2) + 2bc = 0$$

da cui si ha:

$$c = b(-1 \pm \sqrt{2})$$

gli assi di $\mathscr{C}^2$ sono dunque le rette:

s_1: $(2x - y -1)(-1- \sqrt{2}) -(-x + 4y +\frac{1}{2}) = 0$

s_2: $(2x- y -1)(-1+ \sqrt{2}) -(-x +4y + \frac{1}{2}) = 0$

cioè

s_1: $2x(-1-2\sqrt{2}) + 2y(-3+ \sqrt{2}) + (1+2 \sqrt{2}) = 0$

s_2: $2x(-1+2 \sqrt{2}) -2y(3+ \sqrt{2}) + (1-2 \sqrt{2}) = 0$

che si possono anche scrivere:

s_1: $(x- \frac{1}{2}) + (-1+ \sqrt{2})y = 0$

s_2: $(x- \frac{1}{2}) - (1+ \sqrt{2})y = 0$

Determiniamo gli asintoti di $\mathcal{C}^3$; b e c debbono soddisfare la (4.5), cioè l'equazione

$c^2 - 2bc = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 0 \qquad c_2 = 2b$

Gli asintoti cercati hanno dunque equazione:

t_1: $(x+y- \frac{1}{2}) \cdot 0 -(x + \frac{1}{2})b = 0$

t_2: $(x+y- \frac{1}{2})\, 2 - (2x + 1) = 0$

cioè

$t_1 : x + \frac{1}{2}$

$t_2 : 2x + 4y - 3 = 0$

Determiniamo infine l'equazione dell'asse di $\mathcal{C}^4$; ponendo:

$$c = 2 \quad e \quad b = 4$$

si ha l'equazione dell'asse :

$$(2x + 4y)(2) - (4x + 8y - 4)(-4\ ) = 0$$

cioè:

$$5x + 10y - 4 = 0$$