$H_{2k}(x,y) = 0$ nel quadrato $[0,\ell n\, 2/\lambda] \times [0,\ell n 2/\lambda]$ nel quale invece $H_{2k+1}(x,y) \to 1-\exp\{-\lambda \min\{x,y\}\}$ al tendere di k a $+\infty$.

Con le ovvie modifiche a enunciati e dimostrazioni continuano a valere, per $r > 2$, i teoremi 3,5,6 e 7, oltreché l'esempio 1; non vale tuttavia l'esempio 2. Nel teorema 4, la (1) e la (2) divengono rispettivamente

$$C(1,1,\ldots,1,s,1,\ldots,1) = s$$

e $C(s_1,s_2,\ldots,s_r) = 0$ se $s_i = 0$ per almeno un indice i; la diseguaglianza (4) si scrive nella forma

$$(7)\quad \max\{s_1+s_2+\ldots+s_r-r+1,0\} \leq C(s_1,s_2,\ldots,s_r) \leq \min\{s_1,s_2,\ldots,s_r\},$$

tuttavia la limitazione inferiore *non* è una r-copula se $r \geq 3$, sebbene la (7) fornisca la migliore limitazione inferiore. Per lo stesso motivo, occorre modificare la successione $\{H_{2k}\}$ nell'esempio 2; basta, però, prendere

$$H_{2k}(x_1,x_2,\ldots,x_r) = \prod_{i=1}^{r} F_i^{(2k)}(x_i)$$

E' facile ora desumere, dai teoremi 3,5,6,7, e dai loro analoghi per $r > 2$, che la convergenza debole in Δ_r differisce, per $r > 1$, dalla convergenza nella topologia prodotto in $\Delta \times \Delta \times \ldots \times \Delta$.
E', allora, naturale domandarsi se esista una metrica d_r su Δ_r ($r \geq 2$) tale che la convergenza nella metrica d_r equivalga alla convergenza debole in Δ_r. La risposta, a tale domanda costituisce l'argomento della sezione successiva.

6. UNA METRICA PER LA CONVERGENZA DEBOLE IN Δ_r.

Ricordando le funzioni ϕ_{ab} della sezione 3 ove $a,b \in Q$ e $a<b$,

si può definire, mediante un'opportuna numerazione, una successione $\{\gamma_r : r \in \mathbb{N}\}$ di funzioni $\gamma_r : \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \to [0,1]$ tali che $\gamma_r(x,y) = \phi_{ab}(x)\phi_{cd}(y)$ $(r \in \mathbb{N},\ a,b,c,d \in Q,\ a < b,\ c < b,\ (x,y) \in \bar{\mathbb{R}}^2)$. Mostreremo più in basso (teorema 1.2) che l'applicazione $d_2 : \Delta_2 \times \Delta_2 \to \mathbb{R}^+$ definita da

$$(1)\quad d_2(F,G) := \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-r} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \gamma_r(x,y)\,dF(x,y) - \int_{\mathbb{R}^2} \gamma_r(x,y)\,dG(x,y) \right|$$

è la metrica con le proprietà richieste alla fine della sezione 2. La dimostrazione si basa sul seguente

<u>LEMMA 6.1.</u> Per $F \in \Delta_2$, $a,b,c,d \in Q$ con $a<b$ e $c<d$ risulta

$$(2)\quad \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{ab}(x)\phi_{cd}(y)\,d_{x,y}F(x,y) = (b-a)^{-1}(d-c)^{-1} \int_a^b dx \int_c^d F(x,y)\,dy\ .$$

<u>DIM.</u> L'uso ripetuto del teorema di Fubini e la formula d'integrazione per parti per l'integrale di Stizltjes ([5]) dà per l'integrale a primo membro della (2)

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_{ab}(y) \int_{\mathbb{R}} \phi_{ab}(x)\,d_{x,y}F(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \phi_{cd}(y)\{\ell'_x(d_yF) + (b-a)^{-1} \int_a^b d_yF(x,y)\,dx -$$

$$- \ell'_x(d_yF)\} =$$

$$= (b-a)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \phi_{cd}(y) \int_a^b d_yF(x,y)\,dx = (b-a)^{-1} \int_a^b dx \int_{\mathbb{R}} \phi_{cd}(y)\ d_y\,F(x,y) =$$

$$= (b-a)^{-1} \int_a^b \{\ell'_y(F) + (d-c)^{-1} \int_c^d F(x,y)\,dy - \ell'_y(F)\}dx = (b-a)^{-1}(d-c)^{-1} \int_a^b dx \int_c^d F(x,y)\,dy,$$

ove $\ell'_x(d_yF) := \lim_{x \to -\infty} d_y\,F(x,y)$, $\ell'_y(F) = \lim_{y \to -\infty} F(x,y)$. Q.E.D.

<u>TEOREMA 6.2.</u> La funzione $d_2 : \Delta_2 \times \Delta_2 \to \mathbb{R}^+$ definita dalla (1) è una metrica su Δ_2.

<u>DIM.</u> E' evidente che basta provare l'implicazione $d_2(F,G) \Longrightarrow F=G$, come si farà modificando la dimostrazione del teorema 3.1.

$$d_2(F,G) = 0 \Longrightarrow \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-1} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \gamma_r(x,y)dF(x,y) - \int_{\mathbb{R}^2} \gamma_r(x,y)dG(x,y) \right| = 0 \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \int_{\bar{\mathbb{R}}^2} \gamma_r dF = \int_{\bar{\mathbb{R}}^2} \gamma_r \, dG \qquad (\forall r \in \mathbb{N}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int_{\bar{\mathbb{R}}^2} \phi_{ab}(x) \, \phi_{cd}(y) \, dF(x,y) = \int_{\bar{\mathbb{R}}^2} \phi_{ab}(x) \, \phi_{cd}(y) dG(x,y)$$

$$(\forall a,b,c,d \in Q, \ a<b, \ c<d).$$

In virtù della (2) quest'ultima diseguaglianza implica

$$(3) \qquad \int_a^b dx \int_c^d F(x,y)dy = \int_a^b dx \int_c^d G(x,y)dy \qquad (\forall a,b,c,d \in Q, \ a<b, c<d).$$

La (3) implica l'eguaglianza $F=G$. Infatti, si supponga, per assurdo, che esista un punto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $F(x_0,y_0) \neq G(x_0,y_0)$, per esempio $F(x_0,y_0) < G(x_0,y_0)$, e si ponga $\varepsilon = \{G(x_0,y_0)-F(x_0,y_0)\}/2$. Poiché F è continua a destra e crescente in ciascuna variabile, esistono due numeri reali x' e y', con $x' > x_0$ e $y' > y_0$, tali che $F(x_0,y_0) \leq F(x,y_0) \leq F(x_0,y_0) + \varepsilon$ per ogni $x \in [x_0,x']$ e $F(x_0,y_0) \leq$ $\leq F(x',y_0) \leq F(x',y') \leq F(x_0,y_0) + \varepsilon$. Perciò, se $a,b \in [x_0,x']$ e $c,d \in [y_0,y']$ risulta

$$\int_a^b dx \int_c^d F(x,y)dy \leq (b-a)(d-c)\{F(x_0,y_0)+\varepsilon\} = (b-a)(d-c)\{F(x_0,y_0)+G(x_0,y_0)\}/2 <$$

$$< (b-a)(d-c)\, G(x_o,y_o) \leq \int_a^b dx \int_c^d G(x,y)dy$$

che contraddice la (3). Q.E.D.

TEOREMA 6.3. Se F_n, $F \in \Delta_2$ $(n \in \mathbb{N})$, $d_2(F_n,F) \to 0$, se, e solo se $F_n \xrightarrow{W} F$.

DIM. ($\Longrightarrow$) Si supponga $d_2(F_n,F) \to 0$. Posto

$$\delta_2(r,n) := \left| \int_{\mathbb{R}^2} \gamma_r(x,y)dF(x,y) - \int_{\mathbb{R}^2} \gamma_r(x,y)dG(x,y) \right| \quad (r,n \in \mathbb{N})$$

è

$$0 \leq \delta_2(r,n) \leq 2^r d_2(F_n,F), \text{ sicché } \lim_{n\to\infty} \delta_2(r,n) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{N}.$$ Per

la (2) ciò significa

$$(4)\ \lim_{n\to\infty} \int_a^b dx \int_c^d F_n(x,y)dy = \int_a^b dx \int_c^d F(x,y)dy \qquad (\forall a,b,c,d \in Q,\ a<b, c<d).$$

La (4) implicherà che $F_n \xrightarrow{W} F$. Posto $\bar{F}(x,y) := \limsup_{n\to\infty} F_n(x,y)$ scende della (4)

$$(b-a)(d-c)\, \bar{F}(a,c) = \limsup_{n\to\infty} (b-a)(d-c)\, F_n(a,c) \leq$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \int_a^b dx \int_c^d F_n(x,y)dy = \int_a^b dx \int_c^d F(x,y)dy \leq (b-a)(d-c)\, F(b,d)$$

cioè $\bar{F}(a,c) \leq F(b,d)$. Facendo tendere $b \downarrow a$ e poi $d \downarrow c$ si ottiene $\bar{F}(a,c) \leq F(a,c)$. Ora se $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si prendano $a,c \in Q$ tali che $a>x$ e $c>y$ sicché $\bar{F}(x,y) \leq \bar{F}(a,c) \leq F(a,c)$. Allora, facendo $a \downarrow x$ e $c \downarrow y$, $\bar{F}(x,y) \leq F(x,y)$. Un ragionamento del tutto analogo dà $\underline{F}(x,y) := \liminf_{n\to\infty} F_n(x,y) \geq F(b-0,d-0)$ ove $b,d \in Q$ con $b<x$ e $d<y$.

$$F(x-0,y-0) \leq \underline{F}(x,y) \leq \bar{F}(x,y) \leq F(x,y).$$

Se, dunque, (x,y) è un punto di continuità di F, si ha $F_n(x,y) \to F(x,y)$.

($\Longleftarrow$) La dimostrazione del viceversa è identica a qualla della parte corrispondente del teorema 3.2 con la sola sostituzione di $\delta_2(r,n)$ a $\delta(r,n)$.

Q.E.D.

L'estensione dei risultati di questa sezione al caso della convergenza debole in Δ_r con $r>2$ è ovvia.

BIBLIOGRAFIA

[1] R.B.ASH, "*Real Analysis and Probability*", Academic Press, New York - London, 1972.

[2] K.L.CHUNG, "*A Course in Probability Theory*", Academic Press, New York - London, 1974 (2nd.ed.)

[3] G.DALL'AGLIO, "*Fréchet Classes and Compatibility of Distribution Functions*" Symposia Mathematica 9, 131-150 (1972).

[4] J.DIEUDONNE', "*Foundations of Modern Analysis*", Academic Press, New York - London, 1969.

[5] N.DUNFORD and J.T.SCHWARZ, "*Linear Operators*. Part. I: General Theory", Interscience, New York, 1958.

[6] J.L.KELLEY, "*General Topology*", Van Nostrand, New York, 1955; ristampata da Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (GTM 27)

[7] J.F.C.KINGMAN and J.S.TAYLOR, "*Introduction to Measure and Probability*" Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

[8] M.LOEVE, "*Probability Theory*", 4 th ed. Springer-Verlag, New York-Heidelberg - Berlin, 1977.

[9] E. LUKACS, "*Stochastic Convergence*", Academic Press, New York-London, 1975.

[10] B. SCHWEIZER, "*Multiplication on the Space of Distribution Functions*" Aequationes Math. 12, 156-183 (1975).

[11] B.SCHWEIZER and A. SKLAR, "*Probabilistic Metric Spaces*", Elsevier-North-Holland, New York, 1983.