E' ancora insoluto il problema di determinare se esistano due costanti positive a,b tali che

$$a\, d_k \le d_S \le b\, d_k \qquad (a > 0,\ b > 0).$$

5. LA CONVERGENZA DEBOLE DI F.R. A r DIMENSIONI.

Se Δ_r è lo spazio delle f.r. a r dimensioni, è interessante studiare i rapporti che intercorrono tra la convergenza debole in Δ_r e la topologia prodotto su $\Delta \times \Delta \times \ldots \times \Delta$ indotta dalla topologia della metrica d_S o d_K su Δ. Basta svolgere tutte le considerazioni nel caso r = 2, il caso r > 2 ottenendosi da quello con semplici avvertenze.

DEFINIZIONE 5.1. Sia Δ_r l'insieme delle f.r. a r dimensioni (per brevità r-f.r.), cioè la famiglia delle funzioni $H : \bar{\mathbb{R}}^r \to [0,1]$ che godono delle seguenti proprietà:

(i) $H(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0$ se $x_i = -\infty$ per almeno un indice i,

(ii) $H(+\infty, +\infty, \ldots +\infty) = 1$;

(iii) H è continua a destra in ogni variabile: $H(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i+0, x_{i+1}, \ldots, x_r) = H_r(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_r)$ $(i=1,2,\ldots,r)$;

(iv) $V_H(R) \geq 0$ per ogni rettangolo $R = \prod_{i=1}^{r}]a_i, b_i[$ ove $a_i \leq b_i$ $(i=1,2,\ldots,r)$, ove $V_H(R) := \Sigma\, \mathrm{sign}(\underline{c})\, H(\underline{C})$, essendo la somma sopra tutti i vertici $\underline{c}$ di R, ed essendo $\mathrm{sign}(\underline{c}) = 1$ oppure -1 secondo che sia $c_i = a_i$ per un numero pari o dispari di indici.

Come è noto, ad ogni H e Δ_r corrispondono un'unica misura di probabilità P su $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}^r)$ - la famiglia degli insiemi di Borel di $\bar{\mathbb{R}}^r$ - e su $(\bar{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ X_i $(i=1,2,\ldots,r)$ tali che $H(x_1,x_2,\ldots,x_r)=P\left[\bigcap_{i=1}^{r}\{X_i\leq x_i\}\right]$.

(Si veda [1]). Indicheremo con Δ_r° il sottoinsieme di Δ_r composto dalle f.r. di quei vettori aleatori $(X_1,X_2,\ldots,X_r)$ le cui componenti sono v.a. quasi certamente finite, cioè $P[|X_i| = +\infty]= 0$ $(i=1,2,..,r)$. Se $H \in \Delta_r^\circ$ le proprietà (i) e (ii) della definizione 1 sono sostituite rispettivamente da

(i) $$\lim_{x_i\to-\infty} H(x_1,x_2,\ldots,x_r) = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,r)$$

e

(ii)' $$\lim_{\min\{x_1,x_2,\ldots,x_r\}\to+\infty} H(x_1,x_2,\ldots,x_r) = 1.$$

Si dicono (*distribuzioni*) *marginali* (unidimensionali) di $H \in \Delta_r$ le funzioni $F_i \in \Delta$ $(i=1,2,\ldots,r)$ definite da $F_i(x_i)=H(+\infty,\ldots,+\infty,x_i,+\infty,\ldots,+\infty)$ $(i=1,2,\ldots,r)$.

Segue dalla definizione 1 che risulta un'applicazione $M_r:\Delta_r\to\Delta\times\Delta..\times\Delta$ mediante $M_r(H) = (F_1,F_2,\ldots,F_r)$; M_r associa quindi a ogni f.r. di Δ_r le sue distribuzioni marginali.

Viceversa, è ben noto che ogni r-pla $(F_1,F_2,\ldots,F_r) \in \Delta_r \times \Delta_r \times..\Delta_r$ determina una classe $\Gamma(F_1,F_2,\ldots,F\ ):= M_r^{-1}(F_1,F_2,\ldots F_r)$, non vuota, di f.r. di Δ_r che ammettono $F_1,F_2,\ldots,F_r$ come marginali; la famiglia $\Gamma(F_1,F_2,\ldots,F_r)$ è chiamata *classe di* Fréchet *di* $F_1,F_2,\ldots,F_n$ (si veda per esempio, [3]).

I tratti salienti della convergenza debole di f.r. a r dimensioni sono contenuti nella definizione e nei due teoremi che la seguono; essi sono annunciati nel caso r=2 perché la notazione ne risulta alleggerita e perché, d'altro canto, l'estensione a r>2 non presenta alcuna difficoltà.

DEFINIZIONE 5.2. Sia $H \in \Delta_2$ e sia $C^2(H) \subset \bar{\mathbb{R}}^2$ l'insieme dei punti di continuità di H. Si dice che una successione $\{H_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Delta_2$ converge debolmente a H se $\lim_{n\to\infty} H_n(x,y) = H(x,y) \quad \forall (x,y) \in C^2(H)$. Si scriverà $H_n \xrightarrow{w} H$.

TEOREMA 5.1. Se $H \in \Delta_2$ e $M_2(H) = (F,G)$ risulta $C(F) \times C(G) \supset C^2(H)$.

TEOREMA 5.2. Una successione $\{H_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Delta_2$ converge debolmente a $H \in \Delta_2$ se, e solo se, esiste un sottoinsieme denso D di $\bar{\mathbb{R}}^2$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} H_n(x,y) = H(x,y) \qquad \forall (x,y) \in D.$$

La dimostrazione di questi due teoremi può essere trovata in [18] ove essi sono formulati in linguaggio differente, ma facilmente riconducibile a quello di questo quaderno e per la f.r. di Δ_2°; le dimostrazioni sono, però, facilmente adattabili a Δ_2.

Vale, inoltre, il teorema di Helly che non verrà, però, usato nel seguito.

TEOREMA 5.3. Per ogni n, con $n = 1,2,\ldots,\infty$, sia $H_n \in \Delta_2$ continua in $\bar{\mathbb{R}}^2$ (quindi in particolare si ha $H_n \in \Delta_2^\circ$ per $n=1,2,\ldots,$). Se $H_n \xrightarrow{w} H_\infty$ allora $M_2(H_n) \to M_2(H\ )$ nel senso della convergenza indotta dalla topologia prodotto in $\Delta \times \Delta$, cioè, se $M_2(H_n)(F_1^{(n)}, F_2^{(n)})$ $(n=1,2,\ldots,)$, allora $F_1^{(n)} \xrightarrow{w} F_1^{(\infty)}$ e $F_2^{(n)} \xrightarrow{w} F_2^{(\infty)}$.

DIM. Poiché tutte le f.r. dell'enunciato sono continue, in questo caso la convergenza debole (che è anzi convergenza completa) equivale alla convergenza puntuale in $\bar{\mathbb{R}}^2$. Perciò $F_1^{(n)}(x) = H_n(x,+\infty) \quad H\ (x,+\infty) =$

$= F_1^{(\infty)}(x)$ per ogni $x \in \bar{\mathbb{R}}$. In maniera analoga si procede per $F_2^{(n)}$.

Q.E.D.

L'esempio seguente mostra che non è possibile nel teorema eliminare la richiesta che H_n sia continua.

ESEMPIO 5.1. Siano ε_a $(a\in\bar{\mathbb{R}})$ definite come negli esempî 1.2 e 2.2 e si ponga $F^{(n)} = \varepsilon_n$ $(n=1,2,\ldots)$, $F^{(\infty)} = \varepsilon_0/2+\varepsilon_\infty/2$, $G^{(n)}=\varepsilon_n/2+\varepsilon_\infty/2$ $(n=1,2,\ldots)$, $G^{(\infty)} = \varepsilon_\infty$. Si ha, intanto, e in modo ovvio, $F^{(n)} \in \Delta$ e $G^{(n)} \in \Delta$ $(n=1,2,\ldots,\infty)$. Si definisca, infine, la successione $\{H_n:n= 1,2,\ldots\infty\}\subset\Delta_2$ mediante $H_n(x,y) = F^{(n)}(x)\, G^{(n)}(y)$ $(n=1,2,\ldots,\infty)$. Allora H_∞ è continua in $\mathbb{R}^2$, poiché $H_\infty(x,y) = 0$ $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ma non in $\bar{\mathbb{R}}^2$, giacché $F_1^{(\infty)}(x) = H_\infty(x,+\infty) = F^{(\infty)}(x)$ e $F_2^{(\infty)}(y)=H(+\infty,y)= = G^{(\infty)}(y)$. In ogni punto (x,y) di $\mathbb{R}^2$ risulta $H_n(x,y)=\varepsilon_n(x)\varepsilon_n(y)/2$ sicché $H_n \to 0$ in $\mathbb{R}^2$ al tendere di n a $+\infty$. Così $\{H_n\}$ converge debolmente a H_∞. Tuttavia $F^{(n)}$ non converge debolmente a $F^{(\infty)}$. Infatti $F^{(\infty)}$ è continua in ogni punto reale $x > 0$, ove $F^{(\infty)}(x) = 1/2$; ma $F^{(n)}(x) = \varepsilon_n(x)$ che tende a zero al tendere di n all'infinito. L'asserto del teorema non è allora valido, perché $M_2(H_2) = (F^{(n)},G^{(n)})$.

L'esempio appena dato mostra, incidentalmente, che se $H \in \Delta_2$ e $M_2(H) = (F,G)$, l'inclusione $C(F) \times C(G) \supset C^2(H)$ (si veda il teorema 1) può essere stretta. Per vederlo, basta prendere $H = H_\infty$, perché ogni punto $(0,y)$ con $y \in \mathbb{R}$ appartiene a $C^2(H_\infty)$ ma non a $C(F^{(\infty)}) \times C(G^{(\infty)})$.

Per stabilire risultati nell'altro verso, vale a dire per dare condizioni sufficienti affinché la convergenza debole delle f.r. marginali implichi la convergenza debole nella classe di Fréchet individuata occorre premettere quanto segue

TEOREMA 5.4. (Sklar). Sia $H \in \Delta_2$ e siano F e G le sue f.r. margina li, $M_2(H) = (F,G)$. Esiste allora una funzione (in generale, non unica) $C : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ chiamata (2-)copula tale che $H(x,y) = C[F(x),F(y)]$ $(x,y \in \bar{\mathbb{R}}^2)$. La funzione C gode, tra le altre, delle seguenti proprietà

(1) $$C(s,1) = s \quad , \quad C(1,t) = t \qquad (s,t \in [0,1]);$$

(2) $$C(s,0) = C(0,t) \qquad (s,t \in [0,1]);$$

(3) $$|C(s_1,t_1)-C(s_2,t_2)| \leq |s_1-s_2|+|t_1-t_2| \quad (s_1,s_2,t_1,t_2 \in [0,1]);$$

e perciò C è uniformemente continua in $[0,1] \times [0,1]$;

(4) $\max\{s+t-1,0\} \leq C(s,t) \leq \min\{s,t\}$ $(s,t \in [0,1])$

e inoltre le funzioni C' e C" definite da $C'(s,t) : \max\{s+t-1,0\}$ e da $C''(s,t) := \min\{s,t\}$ sono esse stesse copule.

Le copule furono introdotte da Sklar ([16]) nel 1959. Per un elenco completo delle loro proprietà si può consultare [17]. Il teorema dà solo quelle proprietà che sono necessarie per il seguito. L'uso delle copule consente di stabilire il

<u>TEOREMA 5.5.</u> Se $F_n \xrightarrow{w} F_\infty$ e $G_n \xrightarrow{w} G_\infty$ ove $F_n, G_n \in \Delta$ per $n=1,2,..,\infty$, cioè se $d(F_n,F_\infty) \to 0$ e $d(G_n,G_\infty) \to 0$, ove $d=d_S$ oppure $d=d_k$, allora risulta, per ogni copula C, $C(F_n,G_n) \to C(F_\infty,G_\infty)$ nel senso della convergenza debole in Δ_2.

<u>DIM.</u> $C(F_n,G_n)$ converge puntualmente a $C(F_\infty,G_\infty)$ in $C(F_\infty) \times C(G_\infty)$: infatti per la (3) si ha

$$|C[F_n(x),G_n(y)] - C[F_\infty(x),G_\infty(y)] \leq |F_n(x)-F_\infty(x)|+ |G_n(y)-G_\infty(y)|.$$

Ma $\bar{\mathbb{R}}^2 \supset \overline{C(F_\infty) \times C(G_\infty)} = \overline{C(F_\infty)} \times \overline{C(G_\infty)} = \bar{\mathbb{R}}^2$, sicché $C(F_\infty) \times C(G_\infty)$ è denso in $\bar{\mathbb{R}}^2$ onde, in virtù del teorema 2, scende l'asserto. Q.E.D.

A ogni successione $\{(F_n,G_n) : n \in \mathbb{N}\}$ in $\Delta \times \Delta$ e a ogni copula C corrisponde una successione $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$ di Δ_2 tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $H_n = C(F_n,G_n)$. Il teorema 5 asserisce che se F_n e G_n convergono debolmente alle f.r. F_∞ e G_∞, rispettivamente, allora $H_n \xrightarrow{w} C(F_\infty,G_\infty)$, quale che sia la copula C.

I teoremi 3 e 5 continuano a valere anche se si sostituiscono Δ_2° e Δ° a Δ_2 e Δ rispettivamente.

TEOREMA 5.6. (a) Siano $H_n \in \Delta_2^\circ$ $(n=1,2,\ldots,\infty)$ f.r. continue in $\mathbb{R}^2$. Se $H_n \xrightarrow{w} H_\infty$ allora $M_2(H_n) \to M_2(H_\infty)$ nel senso della topologia prodotto su $\Delta^\circ \times \Delta^\circ$, ove si è supposto Δ° dotato della metrica di Lévy d_L, cioè se $M_2(H_n) = (F_1^{(n)}, F_2^{(n)})$ allora $F_k^{(n)} \xrightarrow{w} F_k^{(\infty)}$ $(k=1,2)$.

(b) Se $F_n \xrightarrow{w} F_\infty$ e $G_n \xrightarrow{w} G_\infty$ con $F_n,G_n \in \Delta^\circ$ $(n=1,2,\ldots,\infty)$, allora per ogni copula C, risulta $C(F_n,G_n) \xrightarrow{w} C(F_\infty,G_\infty)$.

DIM. La dimostrazione di (a) è identica a quella del teorema 3, mentre quella di (b) è un'immediata conseguenza del seguente fatto: se $(F,G) \in \Delta^\circ \times \Delta^\circ$ allora $C(F,G) \in \Delta_2^\circ$ per ogni copula C. Ciò scende dalla continuità di C, dalla (1) e dalla (2). Poiché $C(F,G) \in \Delta_2$, si deve solo verificare che siano soddisfatte le condizioni (i') e (ii'); ora

$$\lim_{x \to -\infty} C[F(x),G(y)] = C[0,G(y)] = 0, \quad \lim_{y \to -\infty} C[F(x),G(y)] = C[F(x),0] = 0$$

$$\lim_{\min\{x,y\} \to +\infty} C[F(x),G(y)] = C(1,1) = 1$$

Q.E.D.

I teoremi 5 e 6(b) danno solo una risposta parziale al problema di sapere se, per una data successione $\{H_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Delta_2$, la convergenza debole in Δ di entrambe le successioni di distribuzioni marginali implichi la convergenza debole in Δ_2 di $\{H_n\}$. Si è visto sopra che ciò accade quando $H_n = C(F_n, G_n)$ con la *medesima* copula (n=1,2,..,∞. Più in basso l'esempio 2 mostrerà che la risposta è, in generale, negativa perché $\{F_1^{(n)}\}$ e $\{F_2^{(n)}\}$ possono convergere debolmente in Δ senza che $\{H_n = C_n(F_1^{(n)}, F_2^{(n)})\}$ converga necessariamente in Δ_2. Si ha tuttavia la convergenza di $\{H_n = C_n(F_1^{(n)}, F_2^{(n)})\}$ sotto ipotesi più forti sulle f.r. limite $F_1^{(\infty)}$ e $F_2^{(\infty)}$.

<u>TEOREMA 5.7.</u> Sia $\{H_n : n = 1,2,\dots,\infty\} \subset \Delta_2$ e $M_2(H_n) = (F_1^{(n)}, F_2^{(n)})$ $(n = 1,2,\dots,\infty)$. Allora $H_n \overset{w}{\to} H$ se $F_1^{(n)} \overset{w}{\to} F_1^{(\infty)} = \varepsilon_a$ e $F_2^{(n)} \overset{w}{\to} F_2^{(\infty)} = \varepsilon_b$ ove $a,b \in \mathbb{R}$.

<u>DIM.</u> In virtù del teorema 4, esistono copule C_n (n=1,2,...,) tali che $H_n = C_n(F_1^{(n)}, F_2^{(n)})$. Pertanto

$$|H_n(x,y) - H_\infty(x,y)| = |C_n[F_1^{(n)}(x), F_2^{(n)}(y)] - C_\infty[E_a(x), \varepsilon_b(y)] \leq$$

$$\leq |C_n[F_1^{(n)}(x), F_2^{(n)}(y)] - C_\infty|F_1^{(n)}(x), F_2^{(n)}(y)] | + | C[(F_1^{(n)}(x), F_2^{(n)}(y)] -$$

$$- C_\infty[\varepsilon_a(x), \varepsilon_b(y)] |.$$

Per la (3) risulta

$$|C_\infty[F_1^{(n)}(x), F_2^{(n)}(y)] - C_\infty[\varepsilon_a(x), \varepsilon_b(x)] | \leq |F_1^{(n)}(x) - \varepsilon_a(x)| + |F_2^{(n)}(y) -$$

$$- \varepsilon_b(y)|$$

e il secondo membro di quest'ultima diseguaglianza tende a zero al tendere di n a +∞ se $x \neq a$ e $y \neq b$. Si ha anche, per la (4)

$$|C_n[F_1^{(n)}(x),F_2^{(n)}(y)] - C_\infty[F_1^{(n)}(x),F_2^{(n)}(y)]| \leq$$

$$\leq \min\{F_1^{(n)}(x),\ F_2^{(n)}(y)\} - \max\{F_1^{(n)}(x) + F_2^{(n)}(y) - 1,0\}\ .$$

D'altra parte

$$(5)\qquad \lim_{n\to+\infty} \min\{F_1^{(n)}(x),\ F_2^{(n)}(y)\} = \min\{\varepsilon_a(x),\varepsilon_b(y)\} \quad (x\neq a, y\neq b),$$

$$(6)\qquad \lim_{n\to+\infty} \max\{F_1^{(n)}(x) + F_2^{(n)}(y) -1,0\} = \max\{\varepsilon_a(x)+\varepsilon_b(y)-1,0\}$$

$(x\neq a, y \neq b)$.

I limiti (5) e (6) sono uguali, come è facile controllare direttamente, o ricorrendo al teorema 1 (iii) in [3]. Ciò prova l'asserto.

Q.E.D.

<u>ESEMPIO 5.2.</u> Sia $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione reale convergente a $\lambda > 0$, per esempio $\lambda_n = \lambda - 1/n$. Sia $F_k^{(n)} \in \Delta$ $(k=1,2;\ n \in \mathbb{N})$ definita da

$$F_1^{(n)}(t) = F_2^{(n)}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1-\exp(-\lambda_n t), & t > 0. \end{cases}$$

Si consideri ora la f.r. a 2 dimensioni $H_n \in \Gamma(F_1^{(n)},F_2^{(n)})$ definita da

$$H_{2k}(x,y) = \max\{F_1^{(2k)}(x) + F_2^{(2k)}(y)-1,0\} \qquad \text{se } n=2k$$

e da

$$H_{2k+1}(x,y) = \min\{F_1^{(2k+1)}(x),F_2^{(2k+1)}(y)\} \qquad \text{se } n = 2k+1.$$

La successione $\{H_n\}$ non converge debolmente. Infatti, per esempio,

$H_{2k}(x,y) = 0$ nel quadrato $[0,\ell n\ 2/\lambda]x\ [0,\ell n 2/\lambda]$ nel quale invece $H_{2k+1}(x,y) \to 1-\exp\{-\lambda \min\{x,y\}\}$ al tendere di k a $+\infty$.

Con le ovvie modifiche a enunciati e dimostrazioni continuano a valere, per $r > 2$, i teoremi 3,5,6 e 7, oltreché l'esempio 1; non vale tuttavia l'esempio 2. Nel teorema 4, la (1) e la (2) divengono rispettivamente

$$C(1,1,\ldots,1,s,1,\ldots,1) = s$$

e $\quad C(s_1,s_2,\ldots,s_r) = 0 \quad$ se $\quad s_i = 0$ per almeno un indice i; la diseguaglianza (4) si scrive nella forma

(7) $\max\{s_1+s_2+\ldots+s_r-r+1,0\} \leq C(s_1,s_2,\ldots,s_r) \leq \min\{s_1,s_2,\ldots,s_r\}$,

tuttavia la limitazione inferiore *non* è una r-copula se $r \geq 3$, sebbene la (7) fornisca la migliore limitazione inferiore. Per lo stesso motivo, occorre modificare la successione $\{H_{2k}\}$ nell'esempio 2; basta, però, prendere

$$H_{2k}(x_1,x_2,\ldots,x_r) = \prod_{i=1}^{r} F_i^{(2k)}(x_i)$$

E' facile ora desumere, dai teoremi 3,5,6,7, e dai loro analoghi per $r > 2$, che la convergenza debole in Δ_r differisce, per $r > 1$, dalla convergenza nella topologia prodotto in $\Delta x \Delta\ x \ldots x\ \Delta$.
E', allora, naturale domandarsi se esista una metrica d_r su Δ_r $(r \geq 2)$ tale che la convergenza nella metrica d_r equivalga alla convergenza debole in Δ_r. La risposta, a tale domanda costituisce l'argomento della sezione successiva.

6. UNA METRICA PER LA CONVERGENZA DEBOLE IN Δ_r.

Ricordando le funzioni ϕ_{ab} della sezione 3 ove $a,b \in Q$ e $a<b$,