valgono se, e solo se, $2n > 1/\varepsilon^2$, che è ovvia. Vale quindi anche la $(F,F_n;\varepsilon)$. Perciò $\lim_{n\to\infty} d_S(F_n,F) = 0$. Si osservi che è possibile estendere la definizione di d_L da Δ_o a Δ poiché essa dipende solo dai valori che le f.r. assumono in $\mathbb{R}$. In questo caso risulta $d_L(F_n,F) = 1/2$.

ESEMPIO 2.2. Sia ε_n come nell'esempio 2.1 e ε_∞ definita come segue:

$\varepsilon_\infty(x) = 0$ se $x < +\infty$, $\varepsilon_\infty(+\infty) = 1$. Allora $\varepsilon_\infty(x) = N(x)$ per $x \in \mathbb{R}$.

Vogliamo mostrare che $d_S(\varepsilon_n,\varepsilon_\infty) \to 0$. Preso $h > 0$, sia $x \in I(h)$ e $n > 1/h$; allora riesce

$$\varepsilon_\infty(x-h) - h = -h \leq \varepsilon_n(x) \leq h = \varepsilon_\infty(x+h)+h,$$

che è la condizione $(\varepsilon_\infty,\varepsilon_n;h)$, e, analogamente,

$$\varepsilon_n(x-h)-h \leq 0 = \varepsilon_\infty(x) \leq \varepsilon_n(x+h) + h$$

cioè la $(\varepsilon_n,\varepsilon_\infty;h)$, onde l'asserto in virtù dell'arbitrarietà di h.

3. UNA SECONDA METRICA SU Δ .

Siano a e b numeri razionali ($a,b \in Q$) con $a < b$. Per ogni tale coppia si definisce una funzione $\phi_{ab} : \bar{\mathbb{R}} \to [0,1]$ mediante $\phi_{ab}(-\infty)=1$, $\phi_{ab}(+\infty) = 0$ e per $x \in \mathbb{R}$

$$\phi_{ab}(x) := \begin{cases} 1, & x \leq a, \\ (b-a)^{-1}(b-x), & x \in [a,b], \\ 0, & x \geq b \end{cases} .$$

Sia ora $\{\theta_n : n \in \mathbb{N}\}$ un'enumerazione delle funzioni ϕ_{ab} ora introdotte e si definisca $d_k : \Delta \times \Delta \to \mathbb{R}_+$ mediante

$$d_k(F,G) := \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-r} \left| \int_{\mathbb{R}} \theta_r \, dF - \int_{\mathbb{R}} \theta_r \, dG \right| \qquad (F,G \in \Delta).$$

Anche d_k è una metrica su Δ . Alla dimostrazione conviene premettere il seguente lemma che verrà richiamato più volte.

<u>LEMMA 3.1.</u> Se $F \in \Delta$ e ϕ_{ab} è definita come sopra $(a,b \in Q,\ a < b)$ vale

$$(1) \qquad \int_{\mathbb{R}} \phi_{ab}(t)dF(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b F(t)\, dt.$$

<u>DIM.</u>

$$\int_{\bar{\mathbb{R}}} \phi_{ab}(t)dF(t) = \ell'(F) + \int_{\mathbb{R}} \phi_{ab}(t)dF(t) =$$

$$= \ell'(F) + \{- \int_{\mathbb{R}} F(t)d\phi_{ab}(t) + \ell''(F\phi_{ab}) - \ell'(F\phi_{ab})\} =$$

$$= \ell'(F) + \frac{1}{b-a} \int_{\mathbb{R}} F(t)dt - \ell'(F) = \frac{1}{b-a} \int_{\mathbb{R}} F(t)dt$$

ove si è fatto uso delle formule di integrazione per parti per gli integrali di Stieltjes ([5] teorema III.6.22).

Q.E.D.

TEOREMA (Δ, d_k) è uno spazio metrico.

<u>DIM.</u> L'unica proprietà non immediatamente ovvia è che $d_k(F,G) = 0$ implichi $F = G$. Ora $d_k(F,G) = 0$ implica $\int_{\bar{\mathbb{R}}} \theta_r \, dF = \int_{\bar{\mathbb{R}}} \theta_r dG \ (\forall r \in \mathbb{N})$, che per la (1) dà per ogni coppia $a,b \in Q$ con $a < b$

$$(2) \qquad \int_a^b F(t)dt = \int_a^b G(t)dt.$$

La (2) assicura che $F = G$. Si supponga infatti, per assurdo, che esista $x_o \in \mathbb{R}$ tale che $F(x_o) \neq G(x_o)$, per esempio $F(x_o) < G(x_o)$; si prenda, allora, $\varepsilon = \{G(x_o) - F(x_o)\}/2 > 0$. Per la continuità a destra di F esiste $x' > x_o$ tale che $x \in [x_o, x']$ implichi $F(x_o) \leq$ $\leq F(x) \leq F(x_o) + \varepsilon$. Se ora $a,b \in [x_o,x'] \cap Q$ con $a < b$ si ha

$$\int_a^b F(t)dt \leq (b-a)\{F(x_o)+\varepsilon\} = (b-a)\,\{F(x_o)+G(x_o)\}/2 < (b-a)G(x_o) \leq \int_a^b G(t)dt$$

che contraddice la (2).

Q.E.D.

La distanza d_k è stata introdotta in [12] adattando un'idea di Kingman ([7]).

TEOREMA 3.2. La convergenza nella metrica d_k equivale alla convergenza debole di f.r., cioè $F_n \xrightarrow{w} F$ se, e solo se, $d_k(F_n,F) \to 0$.

DIM. Si supponga che $d_k(F_n,F) \to 0$. Allora se

$$\delta(r,n) := \left| \int_{\mathbb{R}} \theta_r \, dF_n - \int_{\mathbb{R}} \theta_r \, dF \right| \qquad (r,n \in \mathbb{R})$$

risulta $0 \leq \delta(r,n) \leq 2^r d_k(F_n,F)$ $(r,n \in \mathbb{N})$ sicché $\lim_{n\to\infty} \delta(r,n) = 0$ per ogni $r \in \mathbb{N}$. In virtù della (1) ciò significa

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b F_n(t)dt = \int_a^b F(t)dt \qquad \forall a,b \in Q.$$

Posto $\bar{F}(x) := \lim_{n\to\infty} \sup F_n(x)$ riesce, per $a < b$ e in virtù della (3)

$$(b-a)\bar{F}(a) = \limsup_{n\to\infty}(b-a)F_n(a) \leq \limsup_{n\to\infty} \int_a^b F_n(t)dt = \int_a^b F(t)dt \leq (a-b)F(b)$$

onde $\bar{F}(a) \leq F(b)$ sicché, se $b \downarrow a$, $\bar{F}(a) \leq F(a)$ per ogni $a \in Q$. Se $x \in \mathbb{R}$ e $a > x$ è razionale, risulta $\bar{F}(x) \leq \bar{F}(a) \leq F(a)$ onde, per $a \downarrow x$, $\bar{F}(x) \leq F(x)$. Similmente se $\underline{F}(x) := \liminf_{n \to \infty} F_n(x)$, si ha dalla (3)

$$(b-a)\,\underline{F}(b) = \liminf_{n \to \infty} (b-a)F_n(b) \geq \liminf_{n \to \infty} \int_a^b F_n(t)dt = \int_a^b F(t)dt \geq$$

$$\geq (b-a)F(x),$$

onde $\underline{F}(b) \geq F(a)$ e, imponendo $a \uparrow b$, $\underline{F}(b) \geq F(a-0)$. Come sopra si ottiene di qui se, $x \in \mathbb{R}$, $\underline{F}(x) \geq F(x-0)$. In definitiva, dunque, si ha

$$F(x-0) \leq \underline{F}(x) \leq \bar{F}(x) \leq F(x),$$

sicché, se $x \in C(F)$, $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ cioé $F_n \xrightarrow{w} F$.

Viceversa, si supponga che sia $F_n \xrightarrow{w} F$. Scende pertanto dal teorema di Helly che $\lim_{n\to\infty} \delta(r,n) = 0$ per ogni $r \in \mathbb{N}$. Poiché $\delta(r,n) \leq 1$ $\forall r,n \in \mathbb{N}$, il teorema di convergenza dominata, applicato alla misura μ su $\mathbb{N}$ tale che $\mu(\{k\}) = 1$ $(k \in \mathbb{N})$("counting measure"), dà

$$\lim_{n\to\infty} d_k(F_n,F) = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-r}\,\delta(r,n) = 0.$$

Q.E.D.

La dimostrazione del teorema che segue è identica a quella del teorema 2.4.

<u>TEOREMA 3.3.</u> (Δ, d_k) è compatto e quindi completo.

<u>ESEMPIO 3.1.</u> Riprendiamo l'esempio 1.1. Si ha $\int_{\mathbb{R}} \theta_r \, dF = \frac{1}{2}\,\theta_r(-\infty) = \frac{1}{2}$ mentre, se n è sufficientemente grande da avere $-n<a<b<n$ $(a,b \in Q)$,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_{ab}(t)dF_n(t) = \frac{1}{2n}\int_{-n}^{a} dt + \frac{1}{2n(b-a)}\int_a^b (b-t)dt = \frac{a+n}{2n} + \frac{b-a}{4n}\,.$$

Si ha perciò, ricorrendo alla notazione del teorema 2, $\lim_{n\to\infty} \delta(r,n)=0$

$\forall r \in \mathbb{N}$, da cui scende, come nel teorema appena citato $d_k(F_n,F) \to 0$.

ESEMPIO 3.2. Riprendiamo l'esempio 1.2. Risulta

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_{ab}\, d\varepsilon_n = \phi_{ab}(n) \text{ e quindi } d_k(\varepsilon_n,\varepsilon_\infty) = \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-n} \left| \int_{\mathbb{R}} \theta_r\, d\varepsilon_n \right| = \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-r}\theta_r(n).$$

Fissato $\varepsilon > 0$, sia $s = s(\varepsilon)$ il minimo numero naturale tale che $2^{-s} < \varepsilon$. Si può allora scegliere n sufficientemente grande, sia $n \geq \nu$, perché risulti $\theta_r(n) = 0$ per $r = 1,2,\ldots,s$. Di conseguenza, per $n \geq \nu$

$$d_k(\varepsilon_n,\varepsilon_\infty) = \sum_{r=s+1}^{\infty} 2^{-r}\theta_r(n) \leq \sum_{r=s+1}^{\infty} 2^{-r} = 2^{-s} < \varepsilon$$

sicché $d_k(\varepsilon_n,\varepsilon_\infty) \to 0$.

4. UN BREVE CONFRONTO DELLE METRICHE d_S E d_k.

Si è visto, nelle due sezioni precedenti, che sia d_S sia d_k rendono Δ uno spazio metrico, che la convergenza debole di f.r. è equivalente indifferentemente alla convergenza in d_S o in d_k e che (Δ,d_S) e (Δ,d_k) sono compatti. Vi è quindi un indubbio vantaggio ad operare in Δ munito di una delle due metriche d_S o d_k anziché in Δ_o munito della metrica di Lévy d_L.

Ora d_S e d_k sono topologicamente equivalenti; infatti, poiché uno spazio metrico soddisfa, in modo ovvio, al primo assioma di numerabilità (ogni punto ammette una base d'intorni numerabile), le due metriche d_S e d_k, che implicano la stessa convergenza sulle successioni, generano la medesima topologia su Δ (si veda [6], capitolo 2, teorema 8). Tuttavia, esse differiscono per un aspetto importante. Infatti riguardato Δ come un sottoinsieme di $BV(\bar{\mathbb{R}})$, lo spazio delle funzioni a variazione limitata definite in $\bar{\mathbb{R}}$, d_k deriva da una norma su $BV(\bar{\mathbb{R}})$ (si veda il teorema qui di seguito) mentre ciò non accade per d_S.