## 1. LA DEFINIZIONE CLASSICA E LA SUA ESTENSIONE

Nella quasi totalità dei libri di Probabilità una funzione di ripartizione (f.r.) è definita come una funzione $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ che gode delle seguenti proprietà:

(i) $F$ è crescente $(x_1 \leq x_2 \Longrightarrow F(x_1) \leq F(x_2))$

(ii) $F$ è continua a destra $\left(F(x) = F(x+0) := \lim_{y \to x, y > x} F(y)\right)$;

(iii) $\ell'(F) := \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$;

(iv) $\ell''(F) := \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Il legame tra una variabile aleatoria $X$ e la sua f.r. $F_X$ è dato da $F_X(x) = P[X \leq x]$. Se invece, come fanno taluni autori, si pone $F_X(x) := P[X < x]$, allora la proprietà (ii) viene sostituita dalla continuità a sinistra. E' noto che per ogni f.r. $F$ esistono una v.a. $X$ e una probabilità $P$ su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tali che $F(x) = P[X \leq x]$.

Si indichi con $\Delta^\circ$ lo spazio delle f.r. definite come sopra (si osservi che $\Delta^\circ$ non è uno spazio lineare) e con $\Delta$ quello delle funzioni $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ che soddisfano a (i) e (ii). Una delle proprietà più importanti delle f.r. è la convergenza completa.

DEFINIZIONE 1.1. Si dice che una successione $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Delta^\circ$ completamente a $F \in \Delta^\circ$ (e si scriverà $F_n \xrightarrow{c} F$) se

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x) \qquad \forall x \in C(F).$$

TEOREMA 1.1. Se $F \in \Delta^\circ$ e $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Delta^\circ$ sono equivalenti le seguenti proprietà:

(i) $F_n \to F$ completamente;

(ii) esiste un sottoinsieme denso $D$ di $\mathbb{R}$ tale che $F_n(x) \to F(x)$ $\forall x \in D$;

(iii) $\int_{\mathbb{R}} f\, dF_n \to \int_{\mathbb{R}} f\, dF$ $\quad \forall f \in C_B(\mathbb{R})$ (convergenza stretta);

(iv) se $\phi_n$ è la f.c. di $F_n$, è $\phi_n(t) \to \phi(t)$ $\quad \forall t \in \mathbb{R}$ ove $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è continua in $t = 0$; in questo caso $\phi$ è una f.c.

Per la dimostrazione di quanto procede si può consultare [2]. Vale inoltre il seguente teorema, noto come primo teorema di Helly, che useremo nel seguito

TEOREMA 1.2. Da ogni successione $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Delta°$ si può estrarre una successione $\{F_{n(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ tale che $\lim_{k\to\infty} F_{n(k)}(x) = G(x)$ $\forall x \in C(G)$ ove $G : \mathbb{R} \to [0,1]$ è crescente e continua a destra, cioé $G \in \Delta$.

DEFINIZIONE 1.2. Si dice che una successione $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ di funzioni monotone converge debolmente a una funzione $g$ se $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ $\forall x \in C(g)$.

Il teorema di Helly asserisce che da ogni successione di $\Delta°$ si può estrarre una successione che converge debolmente a una funzione crescente e continua a destra (che però non appartiene necessariamente a $\Delta°$).

La dimostrazione si può trovare, per esempio, in [8].

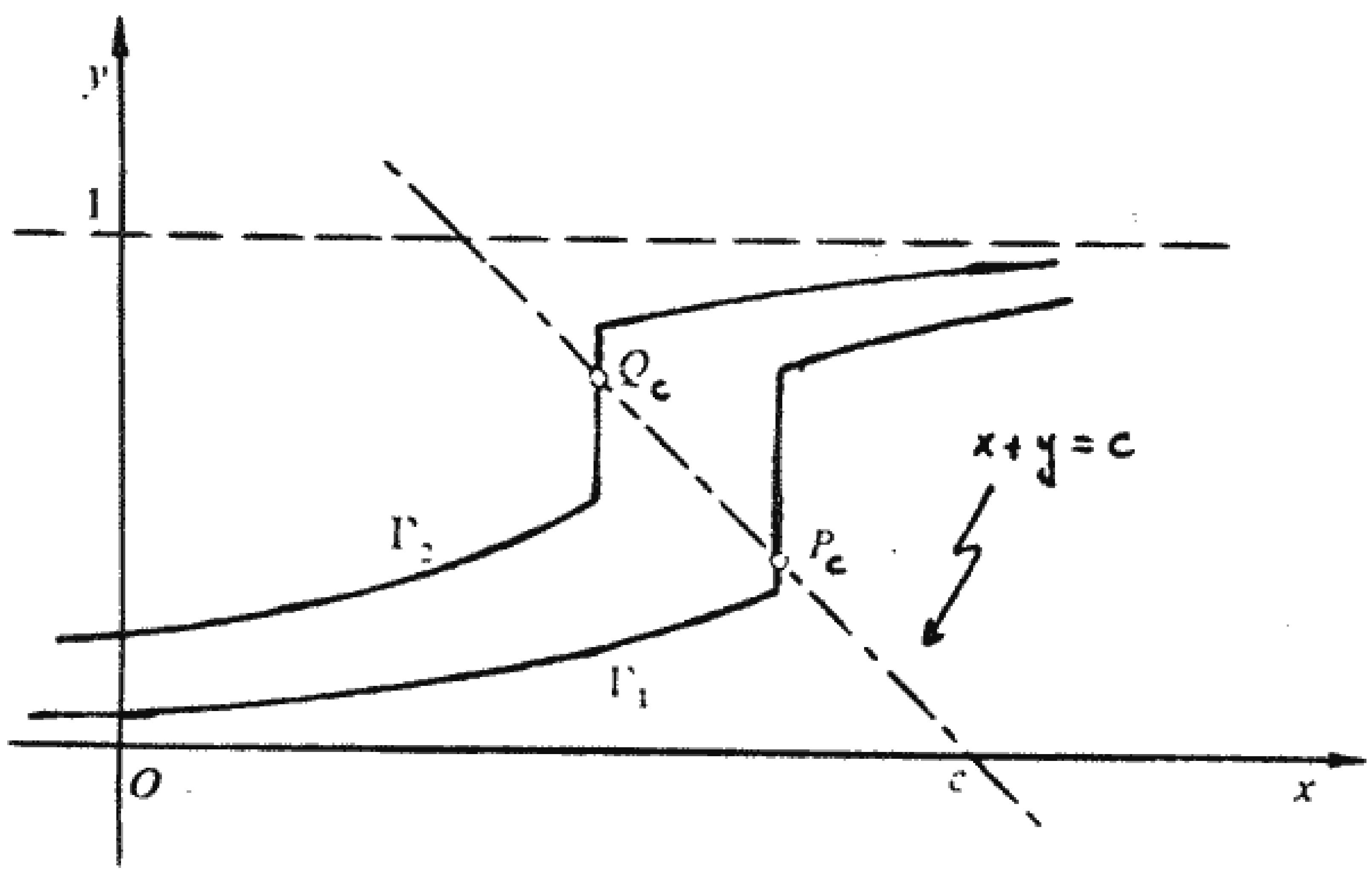
E' possibile introdurre in $\Delta°$ una metrica tale che la convergenza nella topologia della metrica sia proprio la convergenza completa. A tal fine si introduca l'applicazione $d_L : \Delta° \times \Delta° \to [0,1]$ definita da

$$d_L(F,G) := \inf\{h > 0 : F(x-h)-h \leq G(x) \leq F(x+h)+h \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$$

TEOREMA 1.3. $(\Delta°, d_L)$ è uno spazio metrico.

La distanza $d_L$ è detta di Lévy ([11]). Essa può essere interpretata come segue. Si completino i grafici delle curve $y = F(x)$ e $y=G(x)$ in modo da ottenere due curve continue $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$. Si considerino le intersezioni $P_c$ e $Q_c$ di tali curve con la retta $x+y = c$. Se $d(P_c,Q_c)$ indica la distanza euclidea di $P_c$ e $Q_c$, risulta

$$d_L(F,G) = \sup \{d(P_c,Q_c)/\sqrt{2} : c \in \mathbb{R}\}$$




TEOREMA 1.4. La convergenza nella metrica $d_L$ equivale alla convergenza completa di f.r., cioè per una successione $\{F_n\} \subset \Delta°$ si ha $F_n \xrightarrow{c} F$ se, e solo se, $d_L(F_n,F) \to 0$.

TEOREMA 1.5. Lo spazio metrico $(\Delta°,d_L)$ è completo.

Le dimostrazioni dei teoremi 4 e 5 si possono trovare in [9] pp. 71-73.

I due classici esempî che seguono, e che verranno ripresi nel seguito, mostrano come $(\Delta°,d_L)$ non sia compatto.

ESEMPIO 1.1. Sia $F_n \in \Delta°$ $(n \in \mathbb{N})$ definita da

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -n \\ (x+n)/2n & . \quad x \in ]-n,n[ \\ 1 & , \quad x \geq n \end{cases}$$

Se $F(x) = 1/2$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n$ converge debolmente a F, ma F non è una f.r. poiché non soddisfa né alla (iii) né alla (iv), sicché $F_n$ non converge completamente a F.

ESEMPIO 1.2. Se $a \in \mathbb{R}$, sia $\varepsilon_a : \mathbb{R} \to [0,1]$ definita da

$$\varepsilon_a(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x \geq a. \end{cases}$$

La successione $\{\varepsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge alla funzione N identicamente nulla per ogni $x \in \mathbb{R}$. N non è, però, una f.r.

La definizione usuale di f.r. - quella data sopra - è eccessivamente restrittiva perché si limita a considerare v.a. quasi ovunque finite, cioé v.a.X per le quali sia $P[|X| = +\infty] = 0$. Si esclude così la possibilità di considerare v.a. che assumano i valori $+\infty$ e/o $-\infty$ con probabilità non nulla. V.a. di questo tipo si presentano invece abbastanza spesso; per fare solo un esempio, si pensi ai tempi d'arresto. E' quindi opportuno consentire che sia $P[|X| = +\infty] \geq 0$. Ciò porta necessariamente a modificare la definizione di f.r. come segue

DEFINIZIONE 1.2. Si dirà f.r. una funzione $F : \bar{\mathbb{R}} \to [0,1]$ che goda delle proprietà (i) e (ii) date sopra, e inoltre delle

(iii)' $F(-\infty) = 0 \geq \ell'(F)$;

(iv)' $F(+\infty) = 1 \leq \ell''(F)$.

Risulta allora per la f.r. F della v.a.X: $F(x) = P[X \leq x]$ se $x \in \mathbb{R}$, $P[X = -\infty] = \ell'(F)$, $P[X = +\infty] = 1 - \ell''(F)$.

Sia $\Delta$ lo spazio delle f.r. così definite. Evidentemente risulta $\Delta_o \subset \Delta$. Si vedrà, nelle prossime due sezioni, che in $\Delta$ possono essere definite due diversemetriche delle quali si studieranno le proprietà.

Si può provare che in $\Delta^\circ$ si può introdurre una seconda metrica, detta di Kolmogorov ([9]), definita da

$$d'(F,G) := \sup\{|F(x) - G(x)| : x \in \mathbb{R}\}.$$

Tuttavia la topologia indotta da d' non è quella della convergenza completa. E' infatti immediato che se $d'(F_n,F) \to 0$ con $F_n, F \in \Delta^\circ$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ allora $F_n \xrightarrow{c} F$, ma una successione di f.r. di $\Delta^\circ$ può convergere completamente senza che accada $d'(F_n,F) \to 0$. Basta considerare $F = \varepsilon_o$, e

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ nx & , \quad x \in [0,1/n[, \\ 1 & . , \quad x \geq 1/n. \end{cases}$$

Si vede subito che $F_n \xrightarrow{c} \varepsilon_o$, ma $d'(F_n,\varepsilon_o) = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

## 2. LA METRICA DI SIBLEY-SCHWEIZER

DEFINIZIONE 2.1. Se $h \in [0,1]$, si ponga $I(h) := ]-1/h, 1/h[$. Se $F,G \in \Delta$ si indichi con (F,G;h) la condizione

$$F(x-h)-h \leq G(x) \leq F(x+h) + h \qquad \forall x \in I(h).$$

La metrica $d_S$ su $\Delta$ introdotta da Sibley [15] é modificata da Schweizer [10] è la funzione $d_S : \Delta \times \Delta \to \mathbb{R}_+$ definita da

$$d_S(F,G) := \inf\{h > 0 : \text{valgono sia } (F,G;h) \text{ sia } (G,F;h)\}.$$

Si osservi che valgono sempre (F,G;1) e (G,F;1); perciò $d_S(F,G) \leq 1$.

Si osservi, inoltre, che nella definizione di $d_L$, la diseguaglianza $F(x-h)-h \leq G(x) \leq F(x+h)+h$ implica, come subito si controlla, mediante cambi di variabili, anche l'altra $G(x-h)-h \leq F(x) \leq G(x+h)+h$.