0. NOTAZIONE

Indichiamo con $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali $\{1,2,\dots\}$, con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali, con $\bar{\mathbb{R}}$ l'insieme dei numeri reali ampliato, cioé $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, con Q l'insieme dei numeri razionali e, infine, con $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi.

Per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oppure $f : \bar{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, sarà $C(f)$ l'insieme dei punti di continuità di f. Se f è definita in $\bar{\mathbb{R}}$, $-\infty$ appartiene a $C(f)$ se $f(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, mentre $+\infty$ appartiene a $C(f)$ se $f(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Se f è monotona, essa ammette al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità, che sono salti, e quindi $C(f)$ è denso in $\mathbb{R}$ e in $\bar{\mathbb{R}}$ a seconda del caso. Si indicherà con $f(x+0)$ il limite a destra di f in x e con $f(x-0)$ il limite a sinistra: $f(x+0) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(x+t)$,

$$f(x-0) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(x-t).$$

Naturalmente dire che $x\in\mathbb{R}$ appartiene a $C(f)$ equivale a dire $f(x+0) = f(x-0)$. $C_B(A)$ è l'insieme delle funzioni continue e limitate definite in $A(= \bar{\mathbb{R}}$ oppure $= \mathbb{R})$.

Infine data una variabile aleatoria (v.a.)X sullo spazio di probabilità (Ω,F,P) si chiama funzione caratteristica (f.c.) di X la funzione $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita da

$$\phi(t) := E[\exp(itX)] = \int_\Omega \exp(itX)d = = \int_{\mathbb{R}} \cos t\, X\, dF(x) + i \int_{\mathbb{R}} \sin t\, x\, dF(x)$$

essendo F la funzione di ripartizione (f.r.) di X. Poiché esiste una corrispondenza biunivoca tra f.c. e f.r., si parlerà indifferentemente di f.c. di X o di F.

1. LA DEFINIZIONE CLASSICA E LA SUA ESTENSIONE

Nella quasi totalità dei libri di Probabilità una funzione di ripartizione (f.r.) è definita come una funzione $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ che gode delle seguenti proprietà:

(i) F è crescente $(x_1 \leq x_2 \Longrightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

(ii) F è continua a destra $(F(x) = F(x+0) := \lim_{y\to x, y>x} F(y)$;

(iii) $\ell'(F) := \lim_{x\to\infty} F(x) = 0$;

(iv) $\ell''(F) := \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Il legame tra una variabile aleatoria X e la sua f.r. F_X è dato da $F_X(x) = P[X \leq x]$. Se invece, come fanno taluni autori, si pone $F_X(x) := P[X < x]$, allora la proprietà (ii) viene sostituita dalla continuità a sinistra. E' noto che per ogni f.r. F esistono una v.a. X e una probabilità P su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tali che $F(x) = P[X \leq x]$.

Si indichi con Δ° lo spazio delle f.r. definite come sopra (si osservi che Δ° non è uno spazio lineare) e con Δ quello delle funzioni $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ che soddisfano a (i) e (ii). Una delle proprietà più importanti delle f.r. è la convergenza completa.

<u>DEFINIZIONE 1.1</u>. Si dice che una successione $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Delta^\circ$ completamente a $F \in \Delta^\circ$ (e si scriverà $F_n \xrightarrow{c} F$) se

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \qquad \forall x \in C(F).$$

<u>TEOREMA 1.1</u>. Se $F \in \Delta^\circ$ e $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Delta^\circ$ sono equivalenti le seguenti proprietà:

(i) $F_n \to F$ completamente;

(ii) esiste un sottoinsieme denso D di $\mathbb{R}$ tale che $F_n(x) \to F(x)$ $\forall x \in D$;

(iii) $\int_{\mathbb{R}} f \, dF_n \to \int_{\mathbb{R}} f dF \qquad \forall f \in C_B(\mathbb{R})$ (convergenza stretta);

(iv) se ϕ_n è la f.c. di F_n, è $\phi_n(t) \to \phi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ ove $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è continua in $t = 0$; in questo caso ϕ è una f.c.

Per la dimostrazione di quanto procede si può consultare [2]. Vale inoltre il seguente teorema, noto come primo teorema di Helly, che useremo nel seguito

TEOREMA 1.2. Da ogni successione $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Delta^\circ$ si può estrarre una successione $\{F_{n(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ tale che $\lim_{k\to\infty} F_{n(k)}(x) = G(x)$ $\forall x \in C(G)$ ove $G : \mathbb{R} \to [0,1]$ è crescente e continua a destra, cioé $G \in \Delta$.

DEFINIZIONE 1.2. Si dice che una successione $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ di funzioni monotone converge debolmente a una funzione g se $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ $\forall x \in C(g)$.

Il teorema di Helly asserisce che da ogni successione di Δ° si può estrarre una successione che converge debolmente a una funzione crescente e continua a destra (che però non appartiene necessariamente a Δ°).

La dimostrazione si può trovare, per esempio, in [8].

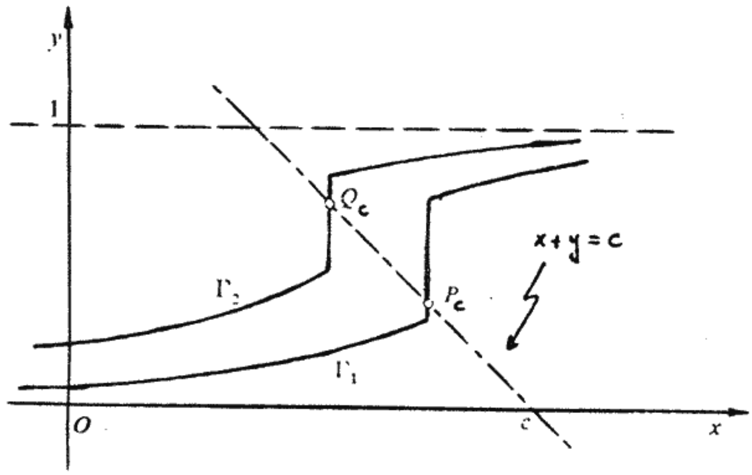
E' possibile introdurre in Δ° una metrica tale che la convergenza nella topologia della metrica sia proprio la convergenza completa. A tal fine si introduca l'applicazione $d_L : \Delta^\circ \times \Delta^\circ \to [0,1]$ definita da

$$d_L(F,G) := \inf\{h > 0 : F(x-h)-h \leq G(x) \leq F(x+h)+h \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$$

TEOREMA 1.3. (Δ°, d_L) è uno spazio metrico.

La distanza d_L è detta di Lévy ([11]). Essa può essere interpretata come segue. Si completino i grafici delle curve $y = F(x)$ e $y=G(x)$ in modo da ottenere due curve continue Γ_1 e Γ_2. Si considerino le intersezioni P_c e Q_c di tali curve con la retta $x+y = c$. Se $d(P_c,Q_c)$ indica la distanza euclidea di P_c e Q_c, risulta

$$d_L(F,G) = \sup \{d(P_c,Q_c)/\sqrt{2} : c \in \mathbb{R}\}$$



TEOREMA 1.4. La convergenza nella metrica d_L equivale alla convergenza completa di f.r., cioè per una successione $\{F_n\} \subset \Delta°$ si ha $F_n \xrightarrow{c} F$ se, e solo se, $d_L(F_n,F) \to 0$.

TEOREMA 1.5. Lo spazio metrico $(\Delta°,d_L)$ è completo.

Le dimostrazioni dei teoremi 4 e 5 si possono trovare in [9] pp. 71-73.

I due classici esempî che seguono, e che verranno ripresi nel seguito, mostrano come $(\Delta°,d_L)$ non sia compatto.

ESEMPIO 1.1. Sia $F_n \in \Delta°$ $(n \in \mathbb{N})$ definita da

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 , & x \leq -n \\ (x+n)/2n . & x \in]-n,n[\\ 1 , & x \geq n \end{cases}$$

Se $F(x) = 1/2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, F_n converge debolmente a F, ma F non è una f.r. poiché non soddisfa né alla (iii) né alla (iv), sicché F_n non converge completamente a F.

ESEMPIO 1.2. Se $a \in \mathbb{R}$, sia $\varepsilon_a : \mathbb{R} \to [0,1]$ definita da

$$\varepsilon_a(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x \geq a. \end{cases}$$

La successione $\{\varepsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge alla funzione N identicamente nulla per ogni $x \in \mathbb{R}$. N non è, però, una f.r.

La definizione usuale di f.r. - quella data sopra - è eccessivamente restrittiva perché si limita a considerare v.a. quasi ovunque finite, cioé v.a.X per le quali sia $P[|X| = +\infty] = 0$. Si esclude così la possibilità di considerare v.a. che assumano i valori $+\infty$ e/o $-\infty$ con probabilità non nulla. V.a. di questo tipo si presentano invece abbastanza spesso; per fare solo un esempio, si pensi ai tempi d'arresto. E' quindi opportuno consentire che sia $P[|X| = +\infty] \geq 0$. Ciò porta necessariamente a modificare la definizione di f.r. come segue

DEFINIZIONE 1.2. Si dirà f.r. una funzione $F : \bar{\mathbb{R}} \to [0,1]$ che goda delle proprietà (i) e (ii) date sopra, e inoltre delle

(iii)' $\quad F(-\infty) = 0 \geq \ell'(F)$;

(iv)' $\quad F(+\infty) = 1 \leq \ell''(F)$.

Risulta allora per la f.r. F della v.a.X: $F(x) = P[X \leq x]$ se $x \in \mathbb{R}$, $P[X = -\infty] = \ell'(F)$, $P[X = +\infty] = 1 - \ell''(F)$.

Sia Δ lo spazio delle f.r. così definite. Evidentemente risulta $\Delta_o \subset \Delta$. Si vedrà, nelle prossime due sezioni, che in Δ possono essere definite due diversemetriche delle quali si studieranno le proprietà.

Si può provare che in Δ° si può introdurre una seconda metrica, detta di Kolmogorov ([9]), definita da

$$d'(F,G) := \sup\{|F(x) - G(x)| : x \in \mathbb{R}\}.$$

Tuttavia la topologia indotta da d' non è quella della convergenza completa. E' infatti immediato che se $d'(F_n,F) \to 0$ con $F_n, F \in \Delta^\circ$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) allora $F_n \xrightarrow{c} F$, ma una successione di f.r. di Δ° può convergere completamente senza che accada $d'(F_n,F) \to 0$. Basta considerare $F = \varepsilon_o$, e

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ nx & , \quad x \in [0,1/n[, \\ 1 & , \quad x \geq 1/n. \end{cases}$$

Si vede subito che $F_n \xrightarrow{c} \varepsilon_o$, ma $d'(F_n,\varepsilon_o) = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

2. LA METRICA DI SIBLEY-SCHWEIZER

DEFINIZIONE 2.1. Se $h \in [0,1]$, si ponga $I(h) :=]-1/h, 1/h[$. Se $F,G \in \Delta$ si indichi con $(F,G;h)$ la condizione

$$F(x-h)-h \leq G(x) \leq F(x+h) + h \qquad \forall x \in I(h).$$

La metrica d_S su Δ introdotta da Sibley [15] é modificata da Schweizer [10] è la funzione $d_S : \Delta \times \Delta \to \mathbb{R}_+$ definita da

$$d_S(F,G) := \inf\{h > 0 : \text{valgono sia } (F,G;h) \text{ sia } (G,F;h)\}.$$

Si osservi che valgono sempre $(F,G;1)$ e $(G,F;1)$; perciò $d_S(F,G) \leq 1$.

Si osservi, inoltre, che nella definizione di d_L, la diseguaglianza $F(x-h)-h \leq G(x) \leq F(x+h)+h$ implica, come subito si controlla, mediante cambi di variabili, anche l'altra $G(x-h)-h \leq F(x) \leq G(x+h)+h$.

Ciò accade perché ad entrambe si richiede di essere valide per ogni x di $\mathbb{R}$. Nella definizione di d_S la condizione $(F,G;h)$ non implica invece l'altra $(G,F;h)$. Perciò occorre richiedere esplicitamente che siano valide entrambe le condizioni $(F,G;h)$ e $(G,F;h)$ affinché d_S goda della proprietà di simmetria. La differenza fondamentale tra le metriche d_L e d_S è che le diseguaglianze in questione debbono valere in $\mathbb{R}$ per d_L e in $I(h)$ per d_S.

In conseguenza dell'ultima osservazione si vede che

$$d_S(F,G) \leq d_L(F,G) \qquad \forall\ F,G \in \Delta°$$

Si dimostrerà sotto che d_S è effettivamente una metrica. A tal fine occorre premettere il seguente

<u>LEMMA 2.1.</u> Se $d_S(F,G) = h > 0$ valgono entrambe le condizioni $(F,G;h)$ e $(G,F;h)$.

<u>DIM</u>. Se $0 < s < t \leq 1$, allora è $I(t) \subset I(s)$. Poiché $I(h)$ è aperto, se $x \in I(h)$ esistono $y \in I(h)$ e $t > 0$ tali che $y > x$ e $y \in I(h+t)$. Poiché $d_S(F,G) = h$ vale la condizione $(F,G;h+t)$ cioè $F(y-h-t) - (h+t) \leq G(y) \leq F(y+h+t)+h+t$ onde, per $t \downarrow 0$, $F(y-h-0)-h \leq G(y) \leq F(y+h)+h$, ove si è usata la continuità a destra di F. Si faccia ora tendere y a x decrescendo; la continuità a destra di F e G dà

$$F(x-h)-h \leq G(x) \leq F(x+h) + h \qquad \forall x \in I(h).$$

Vale cioé la $(F,G;h)$. Scambiando i ruoli di F e G si ottiene la $(G,F;h)$.

Q.E.D.

<u>TEOREMA 2.1.</u> (Δ,d_S) è uno spazio metrico.

<u>DIM.</u> SI stabiliscono facilmente le proprietà $d_S(F,G) \geq 0$ e $d_S(F,G) = d_S(G,F)$ $(F,G \in \Delta)$. Se $d_S(F,G) = 0$ segue dalla definizione di d_S e dalle proprietà delle f.r. che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, è $G(x) \leq$

$\leq F(x+0)$ e $F(x) \leq G(x+0)$, onde, per la continuità a destra di F e di G, l'eguaglianza $F(x) = G(x)$.

Per dimostrare la disuguaglianza triangolare

$$(1) \qquad d_S(F,H) \leq d_S(F,G) + d_S(G,H)$$

quali che siano F,G e H in Δ (purché distinte, altrimenti la (1) è banale), sia $\alpha = d_S(F,G) > 0$ e $\beta = d_S(G,H) > 0$. Se fosse $\alpha+\beta \geq 1$ non si avrebbe alcunché da dimostrare, sicché si può supporre $\alpha+\beta<1$. Si consideri, in questo caso, $x \in I(\alpha+\beta)$. Ma allora $x-\beta$ e $x+\beta$ appartengono entrambi a $I(\alpha)$. Infatti da $-1/(\alpha+\beta) < x < 1/(\alpha+\beta)$ scende $-\frac{1}{\alpha+\beta} - \beta < x-\beta < \frac{1}{\alpha+\beta} - \beta$ cioè $-\frac{1+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha+\beta} < x-\beta < \frac{1-\alpha\beta-\beta^2}{\alpha+\beta}$. L'ovvia diseguaglianza $\alpha\beta(\alpha+\beta) < \beta$ implica ora che $\frac{1-\alpha\beta-\beta^2}{\alpha+\beta} < \frac{1}{\alpha}$ e $-\frac{1+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha+\beta} > \frac{1}{\alpha}$. Analogamente si mostra che $x+\beta \in I(\alpha)$. Pertanto, in virtù del lemma 1, si ha che per $x \in I(\alpha+\beta)$

$$F(x-\alpha-\beta)-\alpha-\beta \leq G(x-\beta)-\beta \leq H(x) \leq G(x+\beta)+\beta \leq F(x+\alpha+\beta)+\alpha .$$

Vale così la proprietà $(F,H;\ \alpha+\beta)$. Similmente, $x-\alpha$ e $x+\alpha$ appartengono entrambi a $I(\beta)$ e di qui, come sopra, scende la condizione $(H,F;\ \alpha+\beta)$. Perciò $d_S(F,H) \leq \alpha+\beta = d_S(F,G) + d_S(G,H)$.

Q.E.D.

<u>TEOREMA 2.2.</u> La convergenza nella metrica d_S equivale alla convergenza debole di f.r. cioè $F_n \xrightarrow{w} F$ se, e solo se, $d_S(F_n,F) \to 0$.

<u>DIM.</u> Si supponga che $d_S(F_n,F) \to 0$ e sia $x \in G(F)$. Si può pure supporre che $x \in \mathbb{R} \cap C(F)$ poiché la convergenza di F_n a F è automatica in $-\infty$ e in $+\infty$. Se $\varepsilon > 0$ è sufficientemente piccolo è $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset I(\varepsilon)$. Per ogni ε con tale proprietà vale definitivamente la proprietà $(F,F_n;\varepsilon)$ onde

$$F(x-2\varepsilon)-\varepsilon \leq F_n(x-\varepsilon) \leq F_n(x) \leq F_n(x+\varepsilon) \leq F(x+2\varepsilon)+\varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε e poiché F è continua in x, si può concludere che $F_n(x) \to F(x)$.

Viceversa, si supponga $F_n \xrightarrow{w} F$ e si prenda $\varepsilon \in]0,1]$. Poiché $\overline{C(F)} = \mathbb{R}$ esistono $r+1$ numeri reali $a_0, a_1, \ldots, a_r$ con $a_i \in C(F)$, $a_i < a_{i+1}, a_{i+1}-a_i < \varepsilon$; $a_0 < \varepsilon - 1/\varepsilon$, $a_r > 1/\varepsilon$. Esiste allora $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq n_0$ riesca

$$|F_n(a_i) - F(a_i)| < \varepsilon \qquad (i=0,1,\ldots,r).$$

Sia $x \in I(\varepsilon)$; vi è , allora, un indice i che $x \in [a_{i-1}, a_i]$ sicché

$$F(x-\varepsilon)-\varepsilon \leq F(a_{i-1})-\varepsilon \leq F_n(a_{i-1}) \leq F_n(x) \leq F_n(a_i) \leq F(a_i)+\varepsilon \leq F(x+\varepsilon)+\varepsilon;$$

vale cioè la $(F,F_n;\varepsilon)$. Scambiando F e F_n si ottiene l'altra condizione $(F_n,F;\varepsilon)$. Segue che $d_S(F_n,F) \to 0$.

Q.E.D.

I teoremi che seguono mostrano come (Δ, d_S) sia compatto, a differenza di $(\Delta°, d_L)$.

<u>TEOREMA 2.3.</u> (Δ, d_S) è completo.

<u>DIM.</u> Sia $\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Delta$ una successione di Cauchy; per ogni $\varepsilon > 0$ esiste, cioè, $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che $d_S(F_n,F_m) < \varepsilon$ ogni qual volta $m,n \geq n_0$. Per il teorema di Helly, si può estrarre da $\{F_n\}$ una successione $\{F_{n(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ che converge debolmente a $F \in \Delta$. (Si osservi che, stante la definizione 1.2 di f.r., il limite la cui esistenza è asserita dal teorema 1.2 è una f.r. di Δ, ma, in generale, non di $\Delta°$). Il teorema 2 dà allora $\lim\limits_{k\to\infty} d_S(F_{n(k)},F) = 0$.

Ma allora la diseguaglianza triangolare

$$d_S(F_n,F) \leq d_S(F_n,F_{n(k)}) + d_S(F_{n(k)},F)$$

implica l'asserto $\lim_{n\to\infty} d_S(F_n,F) = 0$.

Q.E.D.

Il risultato, appena dimostrato per via diretta, è, naturalmente, un corollario del seguente

TEOREMA 2.4. (Δ,d_S) è compatto.

DIM. Per il teorema di Helly, (Δ,d_S) è sequenzialmente compatto; ma questa proprietà è, in uno spazio metrico, equivalente alla compattezza (si veda, per esempio, [4] (3.16.1)).

Q.E.D.

E' istruttivo riprendere gli esempî 1.1 e 1.3 e mostrare che le successioni lì date convergono debolmente.

ESEMPIO 2.1. Siano F_n e F definite come nell'esempio 1.1. Vogliamo mostrare che $d_S(F_n,F) \to 0$. Presi $\varepsilon \in]0,1]$, $n > 1/\varepsilon$ e $x \in I(\varepsilon)$, delle diseguaglianze

$$F_n(x-\varepsilon) -\varepsilon= \frac{x-\varepsilon+n}{2n} - \varepsilon \leq \frac{1}{2} = F(x) \leq F_n(x+\varepsilon)+\varepsilon = \frac{x+\varepsilon+n}{2n}+\varepsilon= \frac{1}{2} +\varepsilon\frac{x-\varepsilon}{2n}$$

l'ultima è ovvia. Quanto alla prima, essa equivale a $\frac{x-\varepsilon}{2n} \leq \varepsilon$ cioé a $\frac{x}{\varepsilon} \leq 2n+1$; ma $\frac{x}{\varepsilon} < \frac{1}{\varepsilon^2} < n < 2n+1$, sicché vale la $(F_n,F;\varepsilon)$.

Inoltre entrambe le diseguaglianze in

$$F(x-\varepsilon)-\varepsilon= \frac{1}{2}-\varepsilon\leq \frac{1}{2} + \frac{x}{2n} = F_n(x) \leq \frac{1}{2} +\varepsilon = F(x+\varepsilon) + \varepsilon$$

valgono se, e solo se, $2n > 1/\varepsilon^2$, che è ovvia. Vale quindi anche la $(F,F_n;\varepsilon)$. Perciò $\lim_{n\to\infty} d_S(F_n,F) = 0$. Si osservi che è possibile estendere la definizione di d_L da Δ_o a Δ poiché essa dipende solo dai valori che le f.r. assumono in $\mathbb{R}$. In questo caso risulta $d_L(F_n,F) = 1/2$.

<u>ESEMPIO 2.2.</u> Sia ε_n come nell'esempio 2.1 e ε_∞ definita come segue:

$\varepsilon_\infty(x) = 0$ se $x < +\infty$, $\varepsilon_\infty(+\infty) = 1$. Allora $\varepsilon_\infty(x) = N(x)$ per $x \in \mathbb{R}$.

Vogliamo mostrare che $d_S(\varepsilon_n,\varepsilon_\infty) \to 0$. Preso $h > 0$, sia $x \in I(h)$ e $n > 1/h$; allora riesce

$$\varepsilon_\infty(x-h) - h = -h \leq \varepsilon_n(x) \leq h = \varepsilon_\infty(x+h)+h,$$

che è la condizione $(\varepsilon_\infty,\varepsilon_n;h)$, e, analogamente,

$$\varepsilon_n(x-h)-h \leq 0 = \varepsilon_\infty(x) \leq \varepsilon_n(x+h) + h$$

cioè la $(\varepsilon_n,\varepsilon_\infty;h)$, onde l'asserto in virtù dell'arbitrarietà di h.

3. <u>UNA SECONDA METRICA SU Δ .</u>

Siano a e b numeri razionali ($a,b \in Q$) con $a < b$. Per ogni tale coppia si definisce una funzione $\phi_{ab} : \bar{\mathbb{R}} \to [0,1]$ mediante $\phi_{ab}(-\infty)=1$, $\phi_{ab}(+\infty) = 0$ e per $x \in \mathbb{R}$

$$\phi_{ab}(x) := \begin{cases} 1, & x \leq a, \\ (b-a)^{-1}(b-x), & x \in [a,b], \\ 0, & x \geq b \end{cases} .$$

Sia ora $\{\theta_n : n \in \mathbb{N}\}$ un'enumerazione delle funzioni ϕ_{ab} ora introdotte e si definisca $d_k : \Delta \times \Delta \to \mathbb{R}_+$ mediante

$$d_k(F,G) := \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-r} \left| \int_{\mathbb{R}} \theta_r \, dF - \int_{\mathbb{R}} \theta_r \, dG \right| \qquad (F,G \in \Delta).$$

Anche d_k è una metrica su Δ. Alla dimostrazione conviene premettere il seguente lemma che verrà richiamato più volte.

<u>LEMMA 3.1.</u> Se $F \in \Delta$ e ϕ_{ab} è definita come sopra ($a,b \in Q$, $a < b$) vale

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_{ab}(t)dF(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b F(t)\, dt. \tag{1}$$

<u>DIM.</u> $$\int_{\mathbb{R}} \phi_{ab}(t)dF(t) = \ell'(F) + \int_{\mathbb{R}} \phi_{ab}(t)dF(t) =$$

$$= \ell'(F) + \{- \int_{\mathbb{R}} F(t)d\phi_{ab}(t) + \ell''(F\phi_{ab}) - \ell'(F\phi_{ab})\} =$$

$$= \ell'(F) + \frac{1}{b-a} \int_{\mathbb{R}} F(t)dt - \ell'(F) = \frac{1}{b-a} \int_{\mathbb{R}} F(t)dt$$

ove si è fatto uso delle formule di integrazione per parti per gli integrali di Stieltjes ([5] teorema III.6.22).

Q.E.D.

TEOREMA (Δ, d_k) è uno spazio metrico.

<u>DIM.</u> L'unica proprietà non immediatamente ovvia è che $d_k(F,G) = 0$ implichi $F = G$. Ora $d_k(F,G) = 0$ implica $\int_{\bar{\mathbb{R}}} \theta_r \, dF = \int_{\bar{\mathbb{R}}} \theta_r dG$ $(\forall r \in \mathbb{N})$, che per la (1) dà per ogni coppia $a,b \in Q$ con $a < b$

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^b G(t)dt. \tag{2}$$

La (2) assicura che $F = G$. Si supponga infatti, per assurdo, che esista $x_o \in \mathbb{R}$ tale che $F(x_o) \neq G(x_o)$, per esempio $F(x_o) < G(x_o)$; si prenda, allora, $\varepsilon = \{G(x_o) - F(x_o)\}/2 > 0$. Per la continuità a destra di F esiste $x' > x_o$ tale che $x \in [x_o, x']$ implichi $F(x_o) \leq F(x) \leq F(x_o) + \varepsilon$. Se ora $a,b \in [x_o,x'] \cap Q$ con $a < b$ si ha

$$\int_a^b F(t)dt \leq (b-a)\{F(x_o)+\varepsilon\} = (b-a)\{F(x_o)+G(x_o)\}/2 < (b-a)G(x_o) \leq \int_a^b G(t)dt$$

che contraddice la (2).

Q.E.D.

La distanza d_k è stata introdotta in [12] adattando un'idea di Kingman ([7]).

<u>TEOREMA 3.2.</u> La convergenza nella metrica d_k equivale alla convergenza debole di f.r., cioè $F_n \xrightarrow{w} F$ se, e solo se, $d_k(F_n, F) \to 0$.

<u>DIM.</u> Si supponga che $d_k(F_n,F) \to 0$. Allora se

$$\delta(r,n) := \left| \int_{\bar{\mathbb{R}}} \theta_r \, dF_n - \int_{\bar{\mathbb{R}}} \theta_r \, dF \right| \qquad (r,n \in \mathbb{R})$$

risulta $0 \leq \delta(r,n) \leq 2^r \, d_k(F_n,F)$ $(r,n \in \mathbb{N})$ sicché $\lim_{n\to\infty} \delta(r,n) = 0$ per ogni $r \in \mathbb{N}$. In virtù della (1) ciò significa

$$\text{(3)} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b F_n(t)dt = \int_a^b F(t)dt \qquad \forall a,b \in Q.$$

Posto $\bar{F}(x) := \lim_{n\to\infty} \sup F_n(x)$ riesce, per $a < b$ e in virtù della (3)

$$(b-a)\bar{F}(a) = \limsup_{n\to\infty}(b-a)F_n(a) \leq \limsup_{n\to\infty} \int_a^b F_n(t)dt = \int_a^b F(t)dt \leq (a-b)F(b)$$

onde $\bar{F}(a) \leq F(b)$ sicché, se $b \downarrow a$, $\bar{F}(a) \leq F(a)$ per ogni $a \in Q$. Se $x \in \mathbb{R}$ e $a > x$ è razionale, risulta $\bar{F}(x) \leq \bar{F}(a) \leq F(a)$ onde, per $a \downarrow x$, $\bar{F}(x) \leq F(x)$. Similmente se $\underline{F}(x) := \liminf_{n \to \infty} F_n(x)$, si ha dalla (3)

$$(b-a)\,\underline{F}(b) = \liminf_{n \to \infty} (b-a)F_n(b) \geq \liminf_{n \to \infty} \int_a^b F_n(t)dt = \int_a^b F(t)dt \geq$$

$$\geq (b-a)F(x),$$

onde $\underline{F}(b) \geq F(a)$ e, imponendo $a \uparrow b$, $\underline{F}(b) \geq F(a-0)$. Come sopra si ottiene di qui se, $x \in \mathbb{R}$, $\underline{F}(x) \geq F(x-0)$. In definitiva, dunque, si ha

$$F(x-0) \leq \underline{F}(x) \leq \bar{F}(x) \leq F(x),$$

sicché, se $x \in C(F)$, $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ cioé $F_n \xrightarrow{w} F$.

Viceversa, si supponga che sia $F_n \xrightarrow{w} F$. Scende pertanto dal teorema di Helly che $\lim_{n\to\infty} \delta(r,n) = 0$ per ogni $r \in \mathbb{N}$. Poiché $\delta(r,n) \leq 1$ $\forall r,n \in \mathbb{N}$, il teorema di convergenza dominata, applicato alla misura μ su $\mathbb{N}$ tale che $\mu(\{k\}) = 1$ $(k \in \mathbb{N})$("counting measure"), dà

$$\lim_{n\to\infty} d_k(F_n,F) = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-r}\,\delta(r,n) = 0.$$

Q.E.D.

La dimostrazione del teorema che segue è identica a quella del teorema 2.4.

TEOREMA 3.3. (Δ, d_k) è compatto e quindi completo.

ESEMPIO 3.1. Riprendiamo l'esempio 1.1. Si ha $\int_{\mathbb{R}} \theta_r\, dF = \frac{1}{2}\,\theta_r(-\infty) = \frac{1}{2}$ mentre, se n è sufficientemente grande da avere $-n<a<b<n$ $(a,b \in Q)$,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_{ab}(t)dF_n(t) = \frac{1}{2n} \int_{-n}^{a} dt + \frac{1}{2n(b-a)} \int_a^b (b-t)dt = \frac{a+n}{2n} + \frac{b-a}{4n}\,.$$

Si ha perciò, ricorrendo alla notazione del teorema 2, $\lim_{n\to\infty} \delta(r,n)=0$

$\forall r \in \mathbb{N}$, da cui scende, come nel teorema appena citato $d_k(F_n,F) \to 0$.

ESEMPIO 3.2. Riprendiamo l'esempio 1.2. Risulta

$\int_{\mathbb{R}} \phi_{ab}\, d\varepsilon_n = \phi_{ab}(n)$ e quindi $d_k(\varepsilon_n,\varepsilon_\infty) = \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-n} \left| \int_{\mathbb{R}} \theta_r \, d\varepsilon_n \right| = \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-r} \theta_r(n)$.

Fissato $\varepsilon > 0$, sia $s = s(\varepsilon)$ il minimo numero naturale tale che $2^{-s} < \varepsilon$. Si può allora scegliere n sufficientemente grande, sia $n \geq \nu$, perché risulti $\theta_r(n) = 0$ per $r = 1,2,\ldots,s$. Di conseguenza, per $n \geq \nu$

$$d_k(\varepsilon_n,\varepsilon_\infty) = \sum_{r=s+1}^{\infty} 2^{-r}\theta_r(n) \leq \sum_{r=s+1}^{\infty} 2^{-r} = 2^{-s} < \varepsilon$$

sicché $d_k(\varepsilon_n,\varepsilon_\infty) \to 0$.

4. UN BREVE CONFRONTO DELLE METRICHE d_S E d_k.

Si è visto, nelle due sezioni precedenti, che sia d_S sia d_k rendono Δ uno spazio metrico, che la convergenza debole di f.r. è equivalente indifferentemente alla convergenza in d_S o in d_k e che (Δ,d_S) e (Δ,d_k) sono compatti. Vi è quindi un indubbio vantaggio ad operare in Δ munito di una delle due metriche d_S o d_k anziché in Δ_o munito della metrica di Lévy d_L.

Ora d_S e d_k sono topologicamente equivalenti; infatti, poiché uno spazio metrico soddisfa, in modo ovvio, al primo assioma di numerabilità (ogni punto ammette una base d'intorni numerabile), le due metriche d_S e d_k, che implicano la stessa convergenza sulle successioni, generano la medesima topologia su Δ (si veda [6], capitolo 2, teorema 8). Tuttavia, esse differiscono per un aspetto importante. Infatti riguardato Δ come un sottoinsieme di $BV(\bar{\mathbb{R}})$, lo spazio delle funzioni a variazione limitata definite in $\bar{\mathbb{R}}$, d_k deriva da una norma su $BV(\bar{\mathbb{R}})$ (si veda il teorema qui di seguito) mentre ciò non accade per d_S.

TEOREMA 4.1. L'applicazione $\| \ \|_k : BV(\bar{\mathbb{R}}) \to \mathbb{R}_+$ definita da

$$\| f \|_k = \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-r} \left| \int_{\mathbb{R}} \theta_r \, df \right| \qquad (f \in BV(\bar{\mathbb{R}})$$

è una norma tale che $d_k(F,G) = \| F-G \|_k$ se $F,G \in \Delta$.

DIM. L'unica proprietà che occorra dimostrare per concludere che $\| \ \|_k$ è effettivamente una norma su $BV(\bar{\mathbb{R}})$ è che $\| f \|_k = 0$ implichi $f = 0$. Ogni funzione $f \in BV(\bar{\mathbb{R}})$ può essere scritta nella forma $f = f_1 - f_2$ ove f_1 e f_2 sono due funzioni $f_i : \bar{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ $(i=1,2)$ crescenti e che si possono prendere continue a destra. Perciò $\| f \|_k = 0$ implica, per ogni $r \in \mathbb{N}$, $|\int_{\mathbb{R}} \theta_r \, df| = 0$ cioé $\int_{\mathbb{R}} \theta_r df_1 = \int_{\mathbb{R}} \theta_r df_2$, o ancora, $\int_a^b f_1(t)dt = \int_a^b f_2(t)dt$ per ogni coppia di numeri razionali a e b. L'ultima relazione dà, come nel teorema 3.1, $f_1 = f_2$ e, perciò, $f = 0$.

Q.E.D.

Non può, al contrario, esistere alcuna norma $\| \ \|_S$ su $BV(\bar{\mathbb{R}})$ tale che $d_S(F,G) = \| F-G \|_S$ se $F,G \in \Delta$. Si ragioni, per assurdo, come segue. Se esistesse una tale norma allora $d_S(f,g) = \| f-g \|_S$ $(f,g \in BV(\bar{\mathbb{R}}))$ definirebbe in $BV(\bar{\mathbb{R}})$ una metrica invariante, per la quale, cioè, $d_S(f,g) = d_S(f-g,0)$ $\forall f,g \in BV(\bar{\mathbb{R}})$. Tra breve daremo, però, l'esempio di due funzioni $F,G \in \Delta$ tali che $d_S(F,G) \neq d_S(F-G,0)$ e tali, inoltre, che $F-G$ soddisfi a tutti i requisiti di una f.r. tranne (iv)' poiché $(F-G)(+\infty) = 0$. Tuttavia $F-G$ può egualmente essere riguardata come una f.r. poiché la definizione di d_S su Δ dipende solo dai valori assunti dalle f.r. in $\mathbb{R}$ anziché in $\bar{\mathbb{R}}$.

ESEMPIO 4.1. Sia F e F f.r. definite in $\mathbb{R}$ da

$$F(x) := \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \ , \\ \frac{x}{8} + \frac{1}{2} \ , & x \in [0,4[\ , \\ 1 & , \quad x \geq 4; \end{cases} \quad \text{e} \quad F(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{8} \ , & x \in [0,4[\\ 1/2, & x \geq 4 \end{cases}$$

Allora $F(x)-G(x) = 0$ per $x > 0$, $= 1/2$ per $x \geq 0$. Poiché,

$$d_S(F-G,0) = \inf\{h>0 : F(x-h)-G(x-h) \leq 0 \leq F(x+h)-G(x+h)+h \quad \text{e}$$

$$|F(x) - G(x)| \leq h \qquad \forall x \in I(h)\}$$

si controlla facilmente che $d_S(F-G,0) = 1/2$.

D'altra parte, semplici calcoli mostrano che $d_S(F,G)=4/9$. Infatti poiché $F(x) \geq G(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, le diseguaglianze $G(x-4/9)-4/9 \leq F(x)$ e $G(x) \leq F(x+4/9)+4/9$ sono banalmente soddisfatte per ogni $x \in I(4/9) =]-9/4, 9/4[$ .Per quanto riguarda le diseguaglianze rimanenti, si noti che, se $x \in]-9/4, 4/9[$, si ha $F(x-4/9)-4/9 = - 4/9 < G(x)$ mentre, se $x \in [4/9 , 9/4[$, è $F(x-4/9)-4/9 = (x-4/9)/8 + 1/2 - 4/9 = x/8 = G(x)$ sicché $F(x-4/9)-4/9 \leq G(x)$ $\forall x \in I(4/9)$. Inoltre, se $x \in I(4/9)$, è

$$G(x+4/9) + 4/9 = (x+4/9)/8 + 4/9 = x/8 + 1/2 = F(x).$$

Perciò $d_S(F,G) = 4/9 < 1/2 = d_S(F-G,0)$.

Incidentamente, si può osservare che la norma usuale su $BV(\bar{\mathbb{R}})$ che, nella notazione del presente quaderno, si scrive $\| f \| = \ell'(f)+V_f(\bar{\mathbb{R}})$, essendo $V_f(\bar{\mathbb{R}})$ la variazione totale di $f \in BV(\bar{\mathbb{R}})$ (|5|), ha scarso significato probabilistico, giacché la sua restrizione $\| \ \|_\Delta$ a Δ dà $\|F\|_\Delta = 1+\ell'(F)$ di modo che $\|F_n - F\|_\Delta \to 0$ se, e solo se, $\ell'(F_n) \to \ell'(F)$, o, equivalentemente, se e solo se, $P[X_n=-\infty] \to P[X=-\infty]$.

E' ancora insoluto il problema di determinare se esistano due còstanti positive a,b tali che

$$a\, d_k \leq d_S \leq b\, d_k \qquad (a > 0,\ b > 0).$$

5. LA CONVERGENZA DEBOLE DI F.R. A r DIMENSIONI.

Se Δ_r è lo spazio delle f.r. a r dimensioni, è interessante studiare i rapporti che intercorrono tra la convergenza debole in Δ_r e la topologia prodotto su $\Delta \times \Delta \times \ldots \times \Delta$ indotta dalla topologia della metrica d_S o d_K su Δ. Basta svolgere tutte le considerazioni nel caso $r = 2$, il caso $r > 2$ ottenendosi da quello con semplici avvertenze.

DEFINIZIONE 5.1. Sia Δ_r l'insieme delle f.r. a r dimensioni (per brevità r-f.r.), cioè la famiglia delle funzioni $H : \bar{\mathbb{R}}^r \to [0,1]$ che godono delle seguenti proprietà:

(i) $H(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0$ se $x_i = -\infty$ per almeno un indice i,

(ii) $H(+\infty, +\infty, \ldots +\infty) = 1$;

(iii) H è continua a destra in ogni variabile: $H(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i+0, x_{i+1}, \ldots, x_r) = H_r(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_r)$ $(i=1,2,\ldots,r)$;

(iv) $V_H(R) \geq 0$ per ogni rettangolo $R = \prod_{i=1}^{r}]a_i, b_i[$ ove $a_i \leq b_i$ $(i=1,2,\ldots,r)$, ove $V_H(R) := \Sigma\, \mathrm{sign}(\underline{c})\, H(\underline{C})$, essendo la somma sopra tutti i vertici $\underline{c}$ di R, ed essendo $\mathrm{sign}(\underline{c}) = 1$ oppure -1 secondo che sia $c_i = a_i$ per un numero pari o dispari di indici.

Come è noto, ad ogni $H \in \Delta_r$ corrispondono un'unica misura di probabilità P su $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}^r)$ - la famiglia degli insiemi di Borel di $\bar{\mathbb{R}}^r$ - e su $(\bar{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ X_i $(i=1,2,\ldots,r)$ tali che $H(x_1,x_2,\ldots,x_r)=P\left|\bigcap_{i=1}^{r}\{X_i\le x_i\}\right|$.

(Si veda [1]). Indicheremo con Δ_r° il sottoinsieme di Δ_r composto dalle f.r. di quei vettori aleatori $(X_1,X_2,\ldots,X_r)$ le cui componenti sono v.a. quasi certamente finite, cioè $P[|X_i| = +\infty]= 0$ $(i=1,2,..,r)$. Se $H \in \Delta_r^\circ$ le proprietà (i) e (ii) della definizione 1 sono sostituite rispettivamente da

(i) $$\lim_{x_i\to-\infty} H(x_1,x_2,\ldots,x_r) = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,r)$$

e

(ii)' $$\lim_{\min\{x_1,x_2,\ldots,x_r\}\to+\infty} H(x_1,x_2,\ldots,x_r) = 1.$$

Si dicono (*distribuzioni*) *marginali* (unidimensionali) di $H \in \Delta_r$ le funzioni $F_i \in \Delta$ $(i=1,2,\ldots,r)$ definite da $F_i(x_i)=H(+\infty,\ldots,+\infty,x_i,+\infty,\ldots,+\infty)$ $(i=1,2,\ldots,r)$.

Segue dalla definizione 1 che risulta un'applicazione $M_r:\Delta_r\to\Delta\times\Delta\ldots\times\Delta$ mediante $M_r(H) = (F_1,F_2,\ldots,F_r)$; M_r associa quindi a ogni f.r. di Δ_r le sue distribuzioni marginali.

Viceversa, è ben noto che ogni r-pla $(F_1,F_2,\ldots,F_r) \in \Delta_r \times \Delta_r \times\ldots\Delta_r$ determina una classe $\Gamma(F_1,F_2,\ldots,F\ ):= M_r^{-1}\ (F_1,F_2,\ldots F_r)$, non vuota, di f.r. di Δ_r che ammettono $F_1,F_2,\ldots,F_r$ come marginali; la famiglia $\Gamma(F_1,F_2,\ldots,F_r)$ è chiamata *classe di* Fréchet *di* $F_1,F_2,\ldots,F_n$ (si veda per esempio, [3]).

I tratti salienti della convergenza debole di f.r. a r dimensioni sono contenuti nella definizione e nei due teoremi che la seguono; essi sono annunciati nel caso $r=2$ perché la notazione ne risulta alleggerita e perché, d'altro canto, l'estensione a $r>2$ non presenta alcuna difficoltà.

DEFINIZIONE 5.2. Sia $H \in \Delta_2$ e sia $C^2(H) \subset \bar{\mathbb{R}}^2$ l'insieme dei punti di continuità di H. Si dice che una successione $\{H_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Delta_2$ converge debolmente a H se $\lim_{n\to\infty} H_n(x,y) = H(x,y) \quad \forall (x,y) \in C^2(H)$. Si scriverà $H_n \xrightarrow{w} H$.

TEOREMA 5.1. Se $H \in \Delta_2$ e $M_2(H) = (F,G)$ risulta $C(F)xC(G) \supset C^2(H)$.

TEOREMA 5.2. Una successione $\{H_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Delta_2$ converge debolmente a $H \in \Delta_2$ se, e solo se, esiste un sottoinsieme denso D di $\bar{\mathbb{R}}^2$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} H_n(x,y) = H(x,y) \qquad \forall (x,y) \in D.$$

La dimostrazione di questi due teoremi può essere trovata in [18] ove essi sono formulati in linguaggio differente, ma facilmente riconducibile a quello di questo quaderno e per la f.r. di Δ_2°; le dimostrazioni sono, però, facilmente adattabili a Δ_2.

Vale, inoltre, il teorema di Helly che non verrà, però, usato nel seguito.

TEOREMA 5.3. Per ogni n, con $n = 1,2,\dots,\infty$, sia $H_n \in \Delta_2$ continua in $\bar{\mathbb{R}}^2$ (quindi in particolare si ha $H_n \in \Delta_2^\circ$ per $n=1,2,\dots,$). Se $H_n \xrightarrow{w} H_\infty$ allora $M_2(H_n) \to M_2(H\ )$ nel senso della convergenza indotta dalla topologia prodotto in $\Delta x \Delta$, cioè, se $M_2(H_n)(F_1^{(n)}, F_2^{(n)})$ $(n=1,2,\dots,\ )$, allora $F_1^{(n)} \xrightarrow{w} F_1^{(\infty)}$ e $F_2^{(n)} \xrightarrow{w} F_2^{(\infty)}$.

DIM. Poiché tutte le f.r. dell'enunciato sono continue, in questo caso la convergenza debole (che è anzi convergenza completa) equivale alla convergenza puntuale in $\bar{\mathbb{R}}^2$. Perciò $F_1^{(n)}(x) = H_n(x,+\infty) \quad H\ (x,+\infty) = F_1^{(\infty)}(x)$ per ogni $x \in \bar{\mathbb{R}}$. In maniera analoga si procede per $F_2^{(n)}$.

Q.E.D.

L'esempio seguente mostra che non è possibile nel teorema eliminare la richiesta che H_n sia continua.

ESEMPIO 5.1. Siano ε_a $(a\in\bar{\mathbb{R}})$ definite come negli esempî 1.2 e 2.2 e si ponga $F^{(n)} = \varepsilon_n$ $(n=1,2,\ldots)$, $F^{(\infty)} = \varepsilon_o/2+\varepsilon_\infty/2$, $G^{(n)}=\varepsilon_n/2+\varepsilon_\infty/2$ $(n=1,2,\ldots)$, $G^{(\infty)} = \varepsilon_\infty$. Si ha, intanto, e in modo ovvio, $F^{(n)} \in \Delta$ e $G^{(n)} \in \Delta$ $(n=1,2,\ldots,\infty)$. Si definisca, infine, la successione $\{H_n : n= 1,2,\ldots\infty\}\subset\Delta_2$ mediante $H_n(x,y) = F^{(n)}(x)\, G^{(n)}(y)$ $(n=1,2,\ldots,\infty)$. Allora H_∞ è continua in $\mathbb{R}^2$, poiché $H_\infty(x,y) = 0$ $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ma non in $\bar{\mathbb{R}}^2$, giacché $F_1^{(\infty)}(x) = H_\infty(x,+\infty) = F^{(\infty)}(x)$ e $F_2^{(\infty)}(y)=H\ (+\infty,y)= = G^{(\infty)}(y)$. In ogni punto (x,y) di $\mathbb{R}^2$ risulta $H_n(x,y)=\varepsilon_n(x)\varepsilon_n(y)/2$ sicché $H_n \to 0$ in $\mathbb{R}^2$ al tendere di n a $+\infty$. Così $\{H_n\}$ converge debolmente a H_∞. Tuttavia $F^{(n)}$ non converge debolmente a $F^{(\infty)}$. Infatti $F^{(\infty)}$ è continua in ogni punto reale $x > 0$, ove $F^{(\infty)}(x) = 1/2$; ma $F^{(n)}(x) = \varepsilon_n(x)$ che tende a zero al tendere di n all'infinito. L'asserto del teorema non è allora valido, perché $M_2(H_2) = (F^{(n)},G^{(n)})$.

L'esempio appena dato mostra, incidentalmente, che se $H \in \Delta_2$ e $M_2(H) = (F,G)$, l'inclusione $C(F) \times C(G)\supset C^2(H)$ (si veda il teorema 1) può essere stretta. Per vederlo, basta prendere $H = H_\infty$, perché ogni punto $(0,y)$ con $y \in \mathbb{R}$ appartiene a $C^2(H_\infty)$ ma non a $C(F^{(\infty)})\times C(G^{(\infty)})$.

Per stabilire risultati nell'altro verso, vale a dire per dare condizioni sufficienti affinché la convergenza debole delle f.r. marginali implichi la convergenza debole nella classe di Fréchet individuata occorre premettere quanto segue

TEOREMA 5.4. (Sklar). Sia $H \in \Delta_2$ e siano F e G le sue f.r. margina li, $M_2(H) = (F,G)$. Esiste allora una funzione (in generale, non unica) $C : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ chiamata (2-)copula tale che $H(x,y) = C[F(x),F(y)]$ $(x,y \in \bar{\mathbb{R}}^2)$. La funzione C gode, tra le altre, delle seguenti proprietà

(1) $\quad C(s,1) = s \quad , C(1,t) = t \qquad (s,t \in [0,1])$;

(2) $\quad C(s,0) = C(0,t) \qquad (s,t \in [0,1])$;

(3) $\quad |C(s_1,t_1)-C(s_2,t_2)| \leq |s_1-s_2|+|t_1-t_2| \quad (s_1,s_2,t_1,t_2 \in [0,1])$;

e perciò C è uniformemente continua in $[0,1] \times [0,1]$;

(4) $\max\{s+t-1,0\} \leq C(s,t) \leq \min\{s,t\} \quad (s,t \in [0,1])$

e inoltre le funzioni C' e C" definite da $C'(s,t){:}\max\{s+t-1,0\}$ e da $C''(s,t) := \min\{s,t\}$ sono esse stesse copule.

Le copule furono introdotte da Sklar ([16]) nel 1959. Per un elenco completo delle loro proprietà si può consultare [17]. Il teorema dà solo quelle proprietà che sono necessarie per il seguito. L'uso delle copule consente di stabilire il

<u>TEOREMA 5.5.</u> Se $F_n \xrightarrow{w} F_\infty$ e $G_n \xrightarrow{w} G_\infty$ ove $F_n, G_n \in \Delta$ per $n=1,2,..,\infty$, cioè se $d(F_n,F_\infty) \to 0$ e $d(G_n,G_\infty) \to 0$, ove $d=d_S$ oppure $d=d_k$, allora risulta, per ogni copula C, $C(F_n,G_n) \to C(F_\infty,G_\infty)$ nel senso della convergenza debole in Δ_2.

<u>DIM.</u> $C(F_n,G_n)$ converge puntualmente a $C(F_\infty,G_\infty)$ in $C(F_\infty) \times C(G_\infty)$: infatti per la (3) si ha

$$|C[F_n(x),G_n(y)] - C[F_\infty(x),G_\infty(y)]| \leq |F_n(x)-F_\infty(x)| + |G_n(y)-G_\infty(y)|.$$

Ma $\bar{\mathbb{R}}^2 \supset \overline{C(F_\infty) \times C(G_\infty)} = \overline{C(F_\infty)} \times \overline{C(G_\infty)} = \bar{\mathbb{R}}^2$, sicché $C(F_\infty) \times C(G_\infty)$ è denso in $\bar{\mathbb{R}}^2$ onde, in virtù del teorema 2, scende l'asserto. Q.E.D.

A ogni successione $\{(F_n,G_n) : n \in \mathbb{N}\}$ in $\Delta \times \Delta$ e a ogni copula C corrisponde una successione $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$ di Δ_2 tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $H_n = C(F_n,G_n)$. Il teorema 5 asserisce che se F_n e G_n convergono debolmente alle f.r. F_∞ e G_∞, rispettivamente, allora $H_n \xrightarrow{w} C(F_\infty,G_\infty)$, quale che sia la copula C.

I teoremi 3 e 5 continuano a valere anche se si sostituiscono Δ_2° e Δ° a Δ_2 e Δ rispettivamente.

TEOREMA 5.6. (a) Siano $H_n \in \Delta_2^\circ$ $(n=1,2,\ldots,\infty)$ f.r. continue in $\mathbb{R}^2$. Se $H_n \xrightarrow{w} H_\infty$ allora $M_2(H_n) \to M_2(H_\infty)$ nel senso della topologia prodotto su $\Delta^\circ \times \Delta^\circ$, ove si è supposto Δ° dotato della metrica di Lévy d_L, cioè se $M_2(H_n) = (F_1^{(n)}, F_2^{(n)})$ allora $F_k^{(n)} \xrightarrow{w} F_k^{(\infty)}$ $(k=1,2)$.

(b) Se $F_n \xrightarrow{w} F_\infty$ e $G_n \xrightarrow{w} G_\infty$ con $F_n,G_n \in \Delta^\circ$ $(n=1,2,\ldots,\infty)$, allora per ogni copula C, risulta $C(F_n,G_n) \xrightarrow{w} C(F_\infty,G_\infty)$.

DIM. La dimostrazione di (a) è identica a quella del teorema 3, mentre quella di (b) è un'immediata conseguenza del seguente fatto: se $(F,G) \in \Delta^\circ \times \Delta^\circ$ allora $C(F,G) \in \Delta_2^\circ$ per ogni copula C. Ciò scende dalla continuità di C, dalla (1) e dalla (2). Poiché $C(F,G) \in \Delta_2$, si deve solo verificare che siano soddisfatte le condizioni (i') e (ii'); ora

$$\lim_{x\to-\infty} C[F(x),G(y)] = C[0,G(y)] = 0, \quad \lim_{y\to-\infty} C[F(x),G(y)] = C[F(x),0] = 0$$

$$\lim_{\min\{x,y\}\to+\infty} C[F(x),G(y)] = C(1,1) = 1$$

Q.E.D.

I teoremi 5 e 6(b) danno solo una risposta parziale al problema di sapere se, per una data successione $\{H_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \Delta_2$, la convergenza debole in Δ di entrambe le successioni di distribuzioni marginali implichi la convergenza debole in Δ_2 di $\{H_n\}$. Si è visto sopra che ciò accade quando $H_n = C(F_n, G_n)$ con la *medesima* copula $(n=1,2,..,\infty$. Più in basso l'esempio 2 mostrerà che la risposta è, in generale, negativa perché $\{F_1^{(n)}\}$ e $\{F_2^{(n)}\}$ possono convergere debolmente in Δ senza che $\{H_n = C_n(F_1^{(n)}, F_2^{(n)})\}$ converga necessariamente in Δ_2. Si ha tuttavia la convergenza di $\{H_n = C_n(F_1^{(n)}, F_2^{(n)})\}$ sotto ipotesi più forti sulle f.r. limite $F_1^{(\infty)}$ e $F_2^{(\infty)}$.

<u>TEOREMA 5.7.</u> Sia $\{H_n : n = 1,2,\ldots,\infty\} \subset \Delta_2$ e $M_2(H_n) = (F_1^{(n)}, F_2^{(n)})$ $(n = 1,2,\ldots,\infty)$. Allora $H_n \overset{w}{\to} H$ se $F_1^{(n)} \overset{w}{\to} F_1^{(\infty)} = \varepsilon_a$ e $F_2^{(n)} \overset{w}{\to} F_2^{(\infty)} = \varepsilon_b$ ove $a,b \in \mathbb{R}$.

<u>DIM.</u> In virtù del teorema 4, esistono copule C_n $(n=1,2,\ldots,)$ tali che $H_n = C_n(F_1^{(n)}, F_2^{(n)})$. Pertanto

$$|H_n(x,y) - H_\infty(x,y)| = |C_n[F_1^{(n)}(x), F_2^{(n)}(y)] - C_\infty[E_a(x), \varepsilon_b(y)]| \le$$

$$\le |C_n[F_1^{(n)}(x), F_2^{(n)}(y)] - C_\infty|F_1^{(n)}(x), F_2^{(n)}(y)]| + | C[(F_1^{(n)}(x), F_2^{(n)}(y)] -$$

$$- C_\infty[\varepsilon_a(x), \varepsilon_b(y)] |.$$

Per la (3) risulta

$$|C_\infty[F_1^{(n)}(x), F_2^{(n)}(y)] - C_\infty[\varepsilon_a(x), \varepsilon_b(x)]| \le |F_1^{(n)}(x) - \varepsilon_a(x)| + |F_2^{(n)}(y) -$$

$$- \varepsilon_b(y)|$$

e il secondo membro di quest'ultima diseguaglianza tende a zero al tendere di n a $+\infty$ se $x \neq a$ e $y \neq b$. Si ha anche, per la (4)

$$|C_n[F_1^{(n)}(x),F_2^{(n)}(y)] - C_\infty[F_1^{(n)}(x),F_2^{(n)}(y)]| \leq$$

$$\leq \min\{F_1^{(n)}(x),\ F_2^{(n)}(y)\} - \max\{F_1^{(n)}(x) + F_2^{(n)}(y) - 1,0\} .$$

D'altra parte

$$(5)\quad \lim_{n\to+\infty} \min\{F_1^{(n)}(x),\ F_2^{(n)}(y)\} = \min\{\varepsilon_a(x),\varepsilon_b(y)\} \quad (x\neq a, y\neq b),$$

$$(6)\quad \lim_{n\to+\infty} \max\{F_1^{(n)}(x) + F_2^{(n)}(y) -1,0\} = \max\{\varepsilon_a(x)+\varepsilon_b(y)-1,0\}$$

$(x\neq a, y \neq b)$.

I limiti (5) e (6) sono uguali, come è facile controllare direttamente, o ricorrendo al teorema 1 (iii) in [3]. Ciò prova l'asserto.

Q.E.D.

<u>ESEMPIO 5.2.</u> Sia $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ una successione reale convergente a $\lambda > 0$, per esempio $\lambda_n = \lambda - 1/n$. Sia $F_k^{(n)} \in \Delta$ $(k=1,2;\ n \in \mathbb{N})$ definita da

$$F_1^{(n)}(t) = F_2^{(n)}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1-\exp(-\lambda_n t), & t > 0. \end{cases}$$

Si consideri ora la f.r. a 2 dimensioni $H_n \in \Gamma(F_1^{(n)}, F_2^{(n)})$ definita da

$$H_{2k}(x,y) = \max\{F_1^{(2k)}(x) + F_2^{(2k)}(y) - 1, 0\} \qquad \text{se } n=2k$$

e da

$$H_{2k+1}(x,y) = \min\{F_1^{(2k+1)}(x), F_2^{(2k+1)}(y)\} \qquad \text{se } n = 2k+1.$$

La successione $\{H_n\}$ non converge debolmente. Infatti, per esempio,

$H_{2k}(x,y) = 0$ nel quadrato $[0,\ell n\ 2/\lambda]\times[0,\ell n 2/\lambda]$ nel quale invece $H_{2k+1}(x,y) \to 1-\exp\{-\lambda \min\{x,y\}\}$ al tendere di k a $+\infty$.

Con le ovvie modifiche a enunciati e dimostrazioni continuano a valere, per $r > 2$, i teoremi 3,5,6 e 7, oltreché l'esempio 1; non vale tuttavia l'esempio 2. Nel teorema 4, la (1) e la (2) divengono rispettivamente

$$C(1,1,\ldots,1,s,1,\ldots,1) = s$$

e $C(s_1,s_2,\ldots,s_r) = 0$ se $s_i = 0$ per almeno un indice i; la diseguaglianza (4) si scrive nella forma

$$\max\{s_1+s_2+\ldots+s_r-r+1,0\} \leq C(s_1,s_2,\ldots,s_r) \leq \min\{s_1,s_2,\ldots,s_r\}, \tag{7}$$

tuttavia la limitazione inferiore *non* è una r-copula se $r \geq 3$, sebbene la (7) fornisca la migliore limitazione inferiore. Per lo stesso motivo, occorre modificare la successione $\{H_{2k}\}$ nell'esempio 2; basta, però, prendere

$$H_{2k}(x_1,x_2,\ldots,x_r) = \prod_{i=1}^{r} F_i^{(2k)}(x_i)$$

E' facile ora desumere, dai teoremi 3,5,6,7, e dai loro analoghi per $r > 2$, che la convergenza debole in Δ_r differisce, per $r > 1$, dalla convergenza nella topologia prodotto in $\Delta\times\Delta\times\ldots\times\Delta$.

E', allora, naturale domandarsi se esista una metrica d_r su Δ_r $(r \geq 2)$ tale che la convergenza nella metrica d_r equivalga alla convergenza debole in Δ_r. La risposta, a tale domanda costituisce l'argomento della sezione successiva.

6. UNA METRICA PER LA CONVERGENZA DEBOLE IN Δ_r.

Ricordando le funzioni ϕ_{ab} della sezione 3 ove $a,b \in Q$ e $a<b$,

si può definire, mediante un'opportuna numerazione, una successione $\{\gamma_r : r \in \mathbb{N}\}$ di funzioni $\gamma_r : \bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}} \to [0,1]$ tali che $\gamma_r(x,y)=\phi_{ab}(x)\phi_{cd}(y)$ ($r \in \mathbb{N}$, $a,b,c,d \in Q$, $a < b$, $c < b$, $(x,y) \in \bar{\mathbb{R}}^2$). Mostreremo più in basso (teorema 1.2) che l'applicazione $d_2 : \Delta_2 x \Delta_2 \to \mathbb{R}^+$ definita da

$$(1) \quad d_2(F,G): = \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-r} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \gamma_r(x,y)dF(x,y) - \int_{\mathbb{R}^2} \gamma_r(x,y)dG(x,y) \right|$$

è la metrica con le proprietà richieste alla fine della sezione 2. La dimostrazione si basa sul seguente

<u>LEMMA 6.1.</u> Per $F \in \Delta_2$, $a,b,c,d \in Q$ con $a<b$ e $c<d$ risulta

$$(2) \quad \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{ab}(x)\phi_{cd}(y)d_{x,y}F(x,y)=(b-a)^{-1}(d-c)^{-1} \int_a^b dx \int_c^d F(x,y)dy \ .$$

<u>DIM.</u> L'uso ripetuto del teorema di Fubini e la formula d'integrazione per parti per l'integrale di Stizltjes ([5]) dà per l'integrale a primo membro della (2)

$$\int_{\mathbb{R}}\phi_{ab}(y) \int_{\mathbb{R}} \phi_{ab}(x)d_{x,y}F(x,y)= \int_{\mathbb{R}} \phi_{cd}(y)\{\ell'_x(d_yF)+(b-a)^{-1} \int_a^b d_yF(x,y)dx -$$

$$- \ell'_x(d_yF)\}=$$

$$= (b-a)^{-1} \int_{\mathbb{R}}\phi_{cd}(y) \quad \int_a^b d_yF(x,y)dx=(b-a)^{-1} \int_a^b dx \int_{\mathbb{R}}\phi_{cd}(y) \ d_y F(x,y) =$$

$$=(b-a)^{-1} \int_a^b \{\ell'_y(F)+(d-c)^{-1} \int_c^d F(x,y)dy-\ell'_y(F)\}dx=(b-a)^{-1}(d-c)^{-1} \int_a^b dx \int_c^d F(x,y)dy,$$

ove $\ell'_x(d_yF): = \lim_{x\to-\infty} d_y F(x,y)$, $\ell'_y (F) = \lim_{y\to-\infty} F(x,y)$. Q.E.D.

TEOREMA 6.2. La funzione $d_2 : \Delta_2 \times \Delta_2 \to \mathbb{R}^+$ definita dalla (1) è una metrica su Δ_2.

DIM. E' evidente che basta provare l'implicazione $d_2(F,G) \Longrightarrow F=G$, come si farà modificando la dimostrazione del teorema 3.1.

$$d_2(F,G) = 0 \Longrightarrow \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-1} \left|\int_{\mathbb{R}^2} \gamma_r(x,y)dF(x,y) - \int_{\mathbb{R}^2}\gamma_r(x,y)dG(x,y)\right| = 0 \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \int_{\bar{\mathbb{R}}^2} \gamma_r dF = \int_{\bar{\mathbb{R}}^2} \gamma_r \, dG \qquad (\forall r \in \mathbb{N}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int_{\bar{\mathbb{R}}^2} \phi_{ab}(x)\ \phi_{cd}(y)\ dF(x,y) = \int_{\bar{\mathbb{R}}^2}\phi_{ab}(x)\,\phi_{cd}(y)dG(x,y)$$

$$(\forall a,b,c,d \in Q,\ a<b,\ c<d).$$

In virtù della (2) quest'ultima diseguaglianza implica

$$(3) \qquad \int_a^b dx \int_c^d F(x,y)dy = \int_a^b dx \int_c^d G(x,y)dy \qquad (\forall a,b,c,d \in Q,\ a<b, c<d).$$

La (3) implica l'eguaglianza F=G. Infatti, si supponga, per assurdo, che esista un punto $(x_o,y_o) \in \mathbb{R}^2$ tale che $F(x_o,y_o) \neq G(x_o,y_o)$, per esempio $F(x_o,y_o) < G(x_o,y_o)$, e si ponga $\varepsilon = \{G(x_o,y_o)-F(x_o,y_o)\}/2$. Poiché F è continua a destra e crescente in ciascuna variabile, esistono due numeri reali x' e y', con $x' > x_o$ e $y' > y_o$, tali che $F(x_o,y_o) \leq F(x,y_o) \leq F(x_o,y_o) + \varepsilon$ per ogni $x \in [x_o,x']$ e $F(x_o,y_o) \leq$ $\leq F(x',y_o) \leq F(x',y') \leq F(x_o,y_o) + \varepsilon$. Perciò, se $a,b \in [x_o,x']$ e $c,d \in [y_o,y']$ risulta

$$\int_a^b dx \int_c^d F(x,y)dy \leq (b-a)(d-c)\{F(x_o,y_o)+\varepsilon\}=(b-a)(d-c)\{F(x_o,y_o)+G(x_o,y_o)\}/2 <$$

$$< (b-a)(d-c)\, G(x_o,y_o) \leq \int_a^b dx \int_c^d G(x,y)dy$$

che contraddice la (3). Q.E.D.

<u>TEOREMA 6.3.</u> Se F_n, $F \in \Delta_2$ $(n \in \mathbb{N})$, $d_2(F_n,F) \to 0$, se, e solo se

$F_n \xrightarrow{W} E$.

<u>DIM.</u> ($\Longrightarrow$) Si supponga $d_2(F_n,F) \to 0$. Posto

$$\delta_2(r,n) := \left| \int_{\mathbb{R}^2} \gamma_r(x,y)dF(x,y) - \int_{\mathbb{R}^2} \gamma_r(x,y)dG(x,y) \right| \quad (r,n\in\mathbb{N})$$

è

$$0 \leq \delta_2(r,n) \leq 2^r d_2(F_n,F), \text{ sicché } \lim_{n\to\infty} \delta_2(r,n) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{N}.$$ Per

la (2) ciò significa

$$(4) \lim_{n\to\infty} \int_a^b dx \int_c^d F_n(x,y)dy = \int_a^b dx \int_c^d F(x,y)dy \quad (\forall a,b,c,d\in Q,\ a<b, c<d).$$

La (4) implicherà che $F_n \xrightarrow{W} F$. Posto $\bar{F}(x,y) := \limsup\limits_{n \to \infty} F_n(x,y)$

scende della (4)

$$(b-a)(d-c)\, \bar{F}(a,c) = \limsup_{n \to \infty} (b-a)(d-c)\, F_n(a,c) \leq$$

$$\leq \limsup_{n \to \infty} \int_a^b dx \int_c^d F_n(x,y)dy = \int_a^b dx \int_c^d F(x,y)dy \leq (b-a)(d-c)\, F(b,d)$$

cioè $\bar{F}(a,c) \leq F(b,d)$. Facendo tendere $b\downarrow a$ e poi $d\downarrow c$ si ottiene $\bar{F}(a,c) \leq F(a,c)$. Ora se $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si prendano $a,c \in Q$ tali che $a>x$ e $c>y$ sicché $\bar{F}(x,y) \leq \bar{F}(a,c) \leq F(a,c)$. Allora, facendo $a\downarrow x$ e $c\downarrow y$, $\bar{F}(x,y) \leq F(x,y)$. Un ragionamento del tutto analogo dà $\underline{F}(x,y) := \liminf\limits_{n\to\infty} F_n(x,y) \geq F(b-0,d-0)$ ove $b,d \in Q$ con $b<x$ e $d<y$.

$$F(x-0,y-0) \leq \underline{F}(x,y) \leq \bar{F}(x,y) \leq F(x,y).$$

Se, dunque, (x,y) è un punto di continuità di F, si ha $F_n(x,y) \to F(x,y)$.

($\Longleftarrow$) La dimostrazione del viceversa è identica a qualla della parte corrispondente del teorema 3.2 con la sola sostituzione di $\delta_2(r,n)$ a $\delta(r,n)$.

Q.E.D.

L'estensione dei risultati di questa sezione al caso della convergenza debole in Δ_r con $r>2$ è ovvia.

BIBLIOGRAFIA

[1] R.B.ASH, "*Real Analysis and Probability*", Academic Press, New York - London, 1972.

[2] K.L.CHUNG, "*A Course in Probability Theory*", Academic Press,New York - London, 1974 (2nd.ed.)

[3] G.DALL'AGLIO, "*Fréchet Classes and Compatibility of Distribution Functions*" Symposia Mathematica 9, 131-150 (1972).

[4] J.DIEUDONNE', "*Foundations of Modern Analysis*", Academic Press, New York - London, 1969.

[5] N.DUNFORD and J.T.SCHWARZ, "*Linear Operators*. Part. I: General Theory", Interscience, New York, 1958.

[6] J.L.KELLEY, "*General Topology*", Van Nostrand, New York, 1955; ristampata da Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York,(GTM 27)

[7] J.F.C.KINGMAN and J.S.TAYLOR, "*Introduction to Measure and Probability*" Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

[8] M.LOEVE, "*Probability Theory*", 4 th ed. Springer-Verlag,New York-Heidelberg - Berlin, 1977.

[9] E. LUKACS, "*Stochastic Convergence*", Academic Press, New York-London, 1975.

[10] B. SCHWEIZER, "*Multiplication on the Space of Distribution Functions*" Aequationes Math. 12, 156-183 (1975).

[11] B.SCHWEIZER and A. SKLAR, "*Probabilistic Metric Spaces*", Elsevier-North-Holland, New York, 1983.

[12] C. SEMPI, " *On the Space of Distribution Functions*" Riv. Mat.Univ. Parma (4) 8, 243-250 (1982).

[13] C.SEMPI, " *Product Topologies on the Space of Distribution Functions*" apparirà in Riv. Mat. Univ. Parma (4) 10 (1984).

[14] C.SEMPI, "*A Metric for Weak Convergence of Multiple Distribution Functions*", manoscritto (1983).

[15] D.A.SIBLEY, "*A Metric for Weak Convergence of Distribution Functions*" Rocky. Mountai J.Math. 1, 427-430 (1971).

[16] A.SKLAR, "*Fonctions de Répartition à n Dimensions et Leurs Marges*" Publ. Inst. Statistique Univ. Paris 8, 229-231 (1959)

[17] A. SKLAR, "*Random Variables, Joint Distribution Functions and Copulas*", Kybernetika, 9, 449-460 (1973).

[18] H. TUCKER, "*A Graduate Course in Probability*", Academic Press, New York-London, 1967.

[19] E.F.WOLFF, "*Measures of Dependence Derived from Copulas*", Ph.D. Thesis, University of Massachusetts, 1977.