

INTRODUZIONE.

I risultati presentati in questo quaderno sono stati esposti in una serie di seminari tenuti a Lecce nei mesi di aprile e maggio 1983 dal secondo autore. Lo scopo è quello di dare una esposizione unificata di recenti risultati ottenuti da più autori (vedi [1],[2],[8],[9]) riguardanti lo studio delle superficie di area minima che racchiudono un volume assegnato.

Si è cercato di sorvolare sulle questioni più tecniche, per le quali si rimanda agli articoli originali, allo scopo di mettere in evidenza nella maniera più semplice possibile le idee ed i risultati principali.

Consideriamo il seguente problema:

$$P_V \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizzare il funzionale} \\ E \longmapsto \text{area} (\Omega \cap \partial E) = F_0(E) \\ \text{fra tutti gli insiemi } E \subset \Omega \text{ } (\Omega \text{ aperto di } \mathbb{R}^n) \text{ soggetti alla} \\ \text{condizione} \\ |E| = \text{mis}E = V \quad (0 < V < |\Omega|) \\ \text{e "coincidenti" su } \partial\Omega \text{ con un insieme assegnato } \Gamma. \end{array} \right.$$

L'idea per affrontare questo problema è dotare la famiglia  $X$  di tutti gli insiemi ammissibili  $E$  di una topologia che renda simultaneamente  $X$  compatto e  $F_0$  continuo. Dal teorema di Weierstrass seguirà quindi l'esistenza di minimo per il problema  $P_V$ .

Il perimetro di un insieme.

Definiamo

$$(1) P_{\Omega}(E) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \Phi(x) dx, \Phi \in [C_0^1(\Omega)]^n, \|\Phi\|_{\infty} \leq 1 \right\}.$$

Si vede subito che, se  $\Omega \cap \partial E$  è una superficie  $n-1$  dimensionale sufficientemente regolare, allora  $P_{\Omega}(E) = H_{n-1}(\Omega \cap \partial E)$ .

D'altra parte, se  $P_{\Omega}(E) < +\infty$ , da un famoso teorema di Riesz segue l'esistenza di una (unica) misura vettoriale

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$$

tale che

$$(2) \quad \int_E \operatorname{div} \Phi(x) dx = \int_{\Omega} \Phi d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \Phi_i d\mu_i \quad \forall \Phi \in [C_0^1(\Omega)]^n.$$

La formula (per  $f$  regolare)

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \Phi(x) dx = - \int_{\Omega} Df \cdot \Phi dx$$

suggerisce porre

$$D\phi_E = - \mu$$

$$\frac{\partial \phi_E}{\partial x_i} = - \mu_i.$$

Si ha inoltre

$$(3) \quad P_{\Omega}(E) = \int_{\Omega} |D\phi_E|,$$

dove con  $|D\phi_E|$  abbiamo indicato la variazione totale della misura  $D\phi_E$ .

Indicheremo con  $\Pi(\Omega)$  lo spazio di tutti gli insiemi misurabili  $E$  con perimetro finito in  $\Omega$ , mentre con  $\Pi_{loc}(\Omega)$  indicheremo la famiglia di tutti gli insiemi che hanno perimetro finito sugli aperti limitati contenuti in  $\Omega$ .

Il funzionale

$$E \mapsto \int_{\Omega} |D\phi_E|$$

è semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia  $L^1_{loc}(\Omega)$ . Questo risultato segue immediatamente dalla definizione di perimetro.

Dal teorema di Ascoli-Arzelà è possibile ottenere il seguente

*Teorema di compattezza.*

Le sottofamiglie di insiemi di  $\Pi_{loc}(\Omega)$  con perimetro equilimitato sono relativamente compatte nelle topologia  $L^1_{loc}(\Omega)$ .

*Tracce.*

Sia  $A \subset \Omega$  aperto con  $\Omega \cap \partial A$  lipschitziana e sia  $E \in \Pi(\Omega)$ .

$$\phi_E^+(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{|E \cap A \cap B_{\delta}(x)|}{|A \cap B_{\delta}(x)|}$$

$$\phi_E^-(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{|(E-A) \cap B_{\delta}(x)|}{|B_{\delta}(x) - A|}$$

Dai teoremi di derivazione di misure si può vedere facilmente che i precedenti limiti esistono e prendono valori in  $\{0,1\}$   $\mathcal{H}_{n-1}$ -q.o.

$x \in \Omega \cap \partial A$ . Inoltre si ha la seguente formula, molto utile:

$$(4) \quad \int_{\Omega} |D\phi_E| = \int_A |D\phi_E| + \int_{\Omega - \bar{A}} |D\phi_E| + \int_{\Omega \cap \partial A} |\phi_E^+ - \phi_E^-| d\mathcal{H}_{n-1};$$

$\phi_E^+$  e  $\phi_E^-$  si chiamano rispettivamente la traccia interna e la traccia esterna di  $E$  su  $\partial A$ . Quando  $\phi_E^+ = \phi_E^-$  scriveremo semplicemente  $\phi_E$ .

Possiamo ora rinunciare al problema  $P_V$  nel seguente modo:

$$P_V \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizzare il funzionale} \\ E \mapsto \int_{\Omega} |D\phi_E| + \int_{\partial\Omega} |\phi_E - \phi_{\Gamma}| dH_{n-1} = F(E) \\ \text{nella classe} \\ \varepsilon_V = \{E \in \Pi(\Omega) : |E| = V\} \end{array} \right.$$

Qui  $\Omega$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$  con  $\partial\Omega$  lipschitziana,  $\Gamma \subset \partial\Omega$  è tale che  $H_{n-1}(\Gamma) < +\infty$ .

Dai precedenti risultati di semicontinuità e compattezza segue facilmente il seguente

*Teorema di esistenza*

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aperto limitato con  $\partial\Omega$  lipschitziana,  $\Gamma \subset \partial\Omega$ ,  $V \in (0, |\Omega|)$ . Allora il problema  $P_V$  ammette soluzione (non unica in generale, come vedremo più avanti con qualche esempio).

La questione dell'esistenza di soluzione per il pbm  $P_V$  si complica nel caso  $\Omega$  illimitato. Questo dipende essenzialmente dal fatto che la convergenza  $L^1_{loc}(\Omega)$  (che è quella assicurata nel teor. di compattezza) non è sufficiente a garantire la preservazione del vincolo di volume.

*Un primo caso particolarmente importante e famoso è il seguente:*

*Proprietà isoperimetrica della sfera.*

Consideriamo il pbm  $P_V$  con  $\Omega = \mathbb{R}^n$  (e quindi  $\Gamma = \emptyset$ ). Tale pbm ha soluzione ed ogni soluzione è una sfera.

La dimostrazione di questo risultato si basa in un procedimento di simmetrizzazione. Sia  $(y, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $x_n \in \mathbb{R}$ . Per ogni insie

me  $E \in \epsilon_V$  poniamo

$$\rho(x_n) = \left( \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \phi_E(y, x_n)^{\frac{1}{n-1}} \right) \quad (x_n \in \mathbb{R})$$

$$E^S = \{(y, x_n) : x_n \in \mathbb{R}, |y| \leq \rho(x_n)\}$$

Allora anche  $E^S \in \epsilon_V$  ed inoltre si può dimostrare che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D\phi_{E^S}| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |D\phi_E| .$$

Quindi possiamo cercare il minimo nella classe

$$\epsilon_V^S = \{E^S : E \in \epsilon_V\}$$

e poiché

$$F \in \epsilon_V^S \quad \int_{\mathbb{R}^n} |D\phi_F| \leq \text{cost} \quad \Longrightarrow \quad F \text{ è contenuto in un cilindro "verticale",}$$

possiamo limitarci a cercare il minimo fra quegli insiemi di  $\epsilon_V^S$  contenuti in un opportuno cilindro "verticale". Questo ragionamento fatto per più direzioni conduce alla ricerca del minimo in una zona limitata, quindi al risultato di esistenza del minimo.

Che ogni minimo sia poi necessariamente una sfera richiede qualche ulteriore conto che non faremo qui.

Il risultato appena dimostrato può essere enunciato nel seguente modo:

*Teorema*

Per ogni insieme  $E \subset \mathbb{R}^n$  misurabile si ha



$$(5) |E| \wedge |\mathbb{R}^n - E| \leq C(n) \left( \int_{\mathbb{R}^n} |D\phi_E| \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

dove  $C(n)$  è la costante che rende la precedente disuguaglianza un'uguaglianza nel caso in cui  $E$  è una sfera.

I risultati fin qui esposti sono noti da diversi anni: citiamo fra altri E. De Giorgi [3], [4]; E. Gonzalez - G. Greco [7]; M. Miranda [10], [11].

Passiamo ora ad esporre alcuni risultati più recenti sul pbm  $P_V$  ottenuti dai seguenti autori: E. Barozzi, G. Congedo, E.H.A. Gonzalez, U. Massari, I. Tamanini.

Consideriamo innanzitutto il pbm  $P_V$  nel caso  $\Omega$  illimitato.

I risultati che esporremo sono stati dimostrati da E. Barozzi [1].

Facciamo le seguenti ipotesi:

(6)  $\Gamma$  è un insieme limitato

(7) Esiste una sfera  $B \subset \Omega$  con  $|B| = V$ .

Mentre l'ipotesi (6) non sembra essenziale e dovrebbe essere una questione puramente tecnica sostituirla con l'ipotesi  $H_{n-1}(\Gamma) < +\infty$ , l'ipotesi (7) è essenziale, come mostra il seguente

*Esempio*

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \subset \mathbb{R}^n, \text{ dove } \{B_j\}_j \text{ è una famiglia disgiunta di sfere con } |B_j| = V - \frac{V}{2^j}.$$

Sia  $\Gamma = \emptyset$ . Consideriamo la successione  $\{E_j\}_j \subset \varepsilon_V$  definita da  $E_j = B_j \cup F_j$  ( $j \geq 2$ ), dove  $F_j$  è una sfera di misura  $\frac{V}{2^j}$  contenuta in  $B_1$ . È chiaro che

$$F(E_j) + n\omega_n^n V^{\frac{n-1}{n}}$$

(è immediato verificare che  $n\omega_n^n V^{\frac{n-1}{n}}$  è il perimetro di una sfera di misura  $V$ ). D'altra parte, dalla proprietà isoperimetrica della sfera, è chiaro che

$$F(E) > n\omega_n^n V^{\frac{n-1}{n}} \quad \forall E \in \varepsilon_V$$

Quindi in questo caso non esiste minimo per il pbm  $P_V$ . (Si noti che in questo caso  $E_j \xrightarrow{j} \emptyset$  in  $L^1_{loc}(\Omega)$ ).

Notiamo che le condizioni (6) - (7) assicurano l'esistenza di insiemi  $E \in \varepsilon_V$  con  $F(E) < +\infty$ ; basta infatti prendere  $E = B$ . Si ha

$$F(B) \leq n\omega_n^n V^{\frac{n-1}{n}} + H_{n-1}(\Gamma) < +\infty.$$

La dimostrazione dell'esistenza di minimo per il problema  $P_V$  con le ipotesi (6) - (7) si farà seguendo il seguente schema:

a)  $\forall j \in \mathbb{N}$  sia  $\Omega_j = \{x \in \Omega : |x| < j\}$ ;

ovviamente esiste  $j_0$  tale che

$$\Omega_j \supset B, \quad \Gamma \subset \partial\Omega_j \quad \forall j \geq j_0$$

b) Per  $j \geq j_0$  sia  $E_j$  minimo (non unico in generale) del problema

$$(8) \quad \text{minimizzare} \quad \int_{\Omega_j} |D\phi_E| + \int_{\partial\Omega_j} |\phi_E - \phi_\Gamma| dH_{n-1}$$

nella classe

$$(9) \quad \varepsilon_j = \{E \subset \Omega_j : |E| = V\};$$

come già osservato, poiché  $|\Omega_j| < +\infty$ , non ci sono pbmi riguardo

l'esistenza di  $E_j$ .

c) Esiste  $j_1 > j_0$  tale che, per ogni  $j \geq j_1$  esiste  $r_j$ :

$j_0 \leq r_j \leq j_1$  tale che

$$\int_{|x|=r_j} \phi_{E_j} dH_{n-1} = 0$$

d) Da c) segue che,  $\forall j \geq j_1$ , esiste  $\tilde{E}_j \subset \Omega_{r_j}$ ,  $\tilde{E}_j \in \epsilon_V$ , con

$$F(\tilde{E}_j) \leq F(E_j)$$

Questo ci permette di sostituire la successione  $\{E_j\}_j$  di minimi per i pbmi (8) - (9) con la successione di minimi  $\{\tilde{E}_j\}_j$  tutti contenuti nello stesso insieme limitato  $\Omega_{j_1}$ .

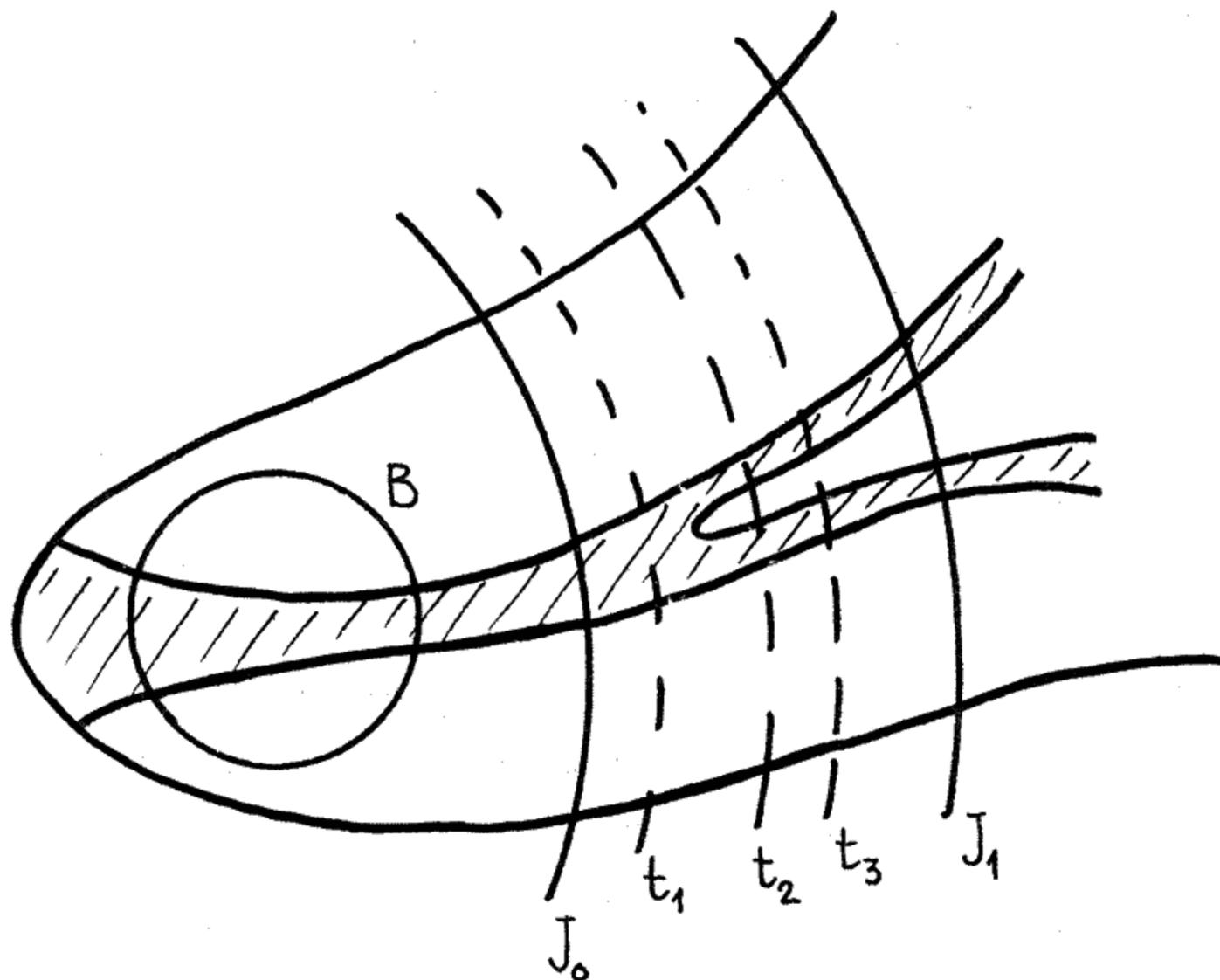
e) Dalla proprietà di minimo degli  $\tilde{E}_j$  si ha che essi hanno perimetro equilimitato in  $\Omega$ . Tenendo allora conto di d), possiamo supporre, a meno di passare ad una sottosuccessione, che esiste  $E_0 \in \epsilon_V$  tale che

$$\tilde{E}_j \xrightarrow{j} E_0 \quad \text{in } L^1(\Omega)$$

f) Dalla semicontinuità inferiore di  $F$  e dalla proprietà di minimo degli insiemi approssimanti  $\tilde{E}_j$ , si vede facilmente che  $E_0$  minimizza  $F$  fra tutti gli insiemi limitati di  $\epsilon_V$ . Ne segue che  $E_0$  minimizza allora  $F$  su tutto  $\epsilon_V$ .

Le difficoltà per svolgere questo programma risiedono nei punti c) e d).

Per dimostrare c) abbiamo bisogno di un lemma di tipo isoperimetrico, la cui formulazione richiede l'introduzione di un po' di notazione:



per  $j_0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq j_1$ , poniamo

$$\begin{aligned} (t_1, t_2) &= \Omega_{t_2} - \bar{\Omega}_{t_1} \\ (t_2, t_3) &= \Omega_{t_3} - \bar{\Omega}_{t_2} \end{aligned}$$

Sia  $E = E_j$  ,  $j \geq j_1$  .

Poniamo

$$E_1 = E \cap (t_1, t_2) \quad , \quad E_2 = E \cap (t_2, t_3)$$

$$v_1 = |E_1| \quad , \quad v_2 = |E_2| \quad , \quad v = v_1 + v_2$$

$$m = \max_{i=1,2,3} \int_{|x|=t_i} \phi_E \, dH_{n-1}$$

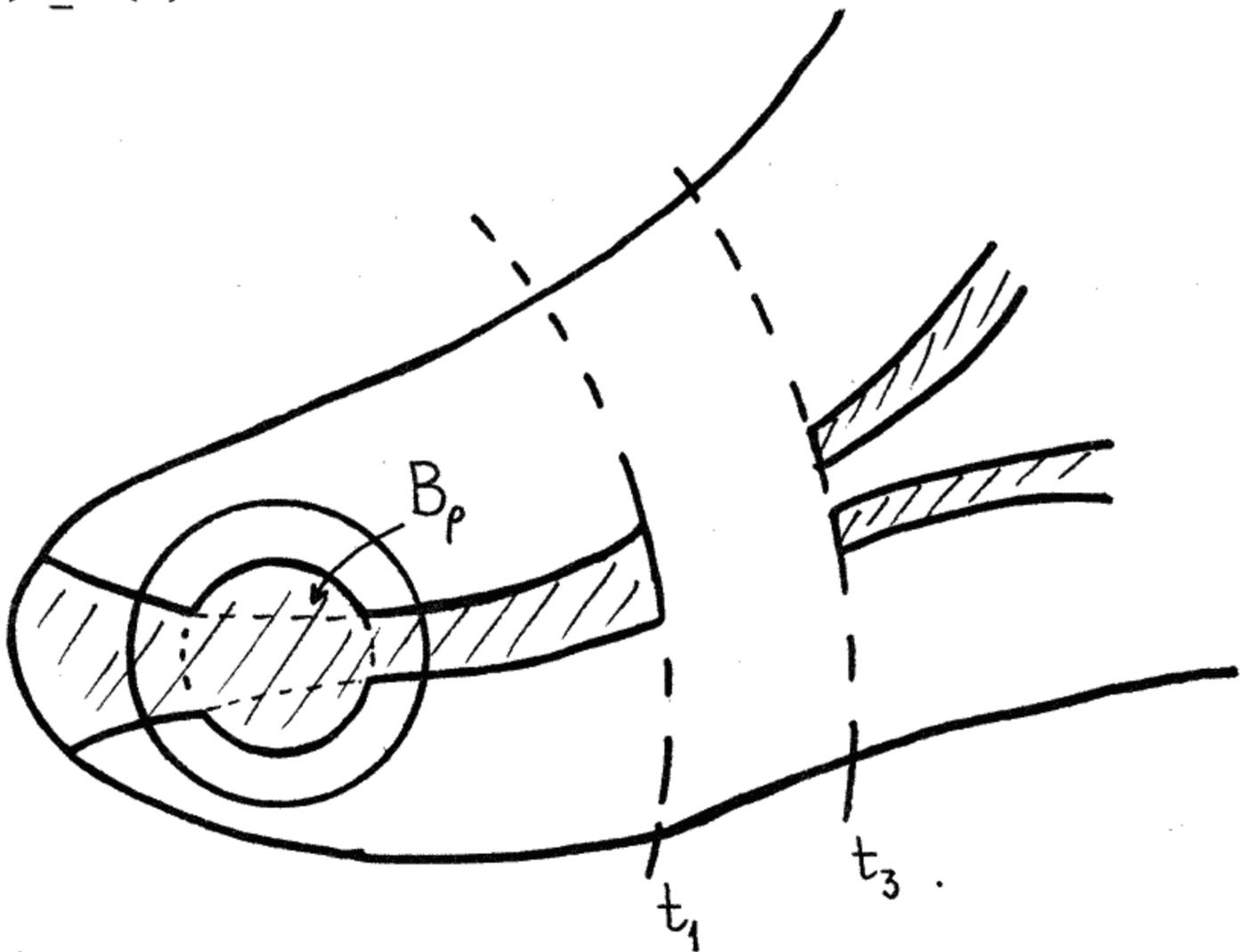
(qui per semplicità supponiamo che le tracce  $\phi_E^+$  ,  $\phi_E^-$  su  $|x| = t_i$

coincidono; questo non toglie alcuna generalità al nostro discorso).

Sostituiamo l'insieme E con un nuovo insieme F nel seguente modo:

$$F = \begin{cases} E & \text{in } \Omega_j - (t_1, t_3) - B \\ \emptyset & \text{in } (t_1, t_3) \\ E \cup B_\rho & \text{in } B \end{cases}$$

dove  $B_\rho$  è una sfera contenuta in B e concentrica con B, scelta in modo che  $|F| = V$ , cioè  $F \in \varepsilon_V$ . Dalla proprietà di minimo di E si ha quindi  $F(E) \leq F(F)$ .



Usiamo ora la seguente disuguaglianza (Vedi I. Tamanini [13]).

Se  $L \subset B_\rho$ , allora

$$(10) \quad \int_{\partial B_\rho} \phi_E dH_{n-1} \leq \int_{B_\rho} |D\phi_L| + \frac{n}{\rho} |L|$$

Si ottiene:

$$\int_{(t_1, t_3)} |D\phi_E| + \int_{\partial\Omega \cap (t_1, t_3)} \phi_E dH_{n-1} + \int_{B_\rho} |D\phi_E| \leq$$

$$\leq \int_{|x|=t_1} \phi_E dH_{n-1} + \int_{|x|=t_3} \phi_E dH_{n-1} + \int_{B_\rho} |D\phi_E| + n\omega_n^{\frac{1}{n}} v^{\frac{n-1}{n}}$$

cioé

$$(11) \int_{(t_1, t_3)} |D\phi_E| + \int_{\partial\Omega \cap (t_1, t_3)} \phi_E dH_{n-1} \leq \int_{|x|=t_1} \phi_E dH_{n-1} +$$

$$+ \int_{|x|=t_3} \phi_E dH_{n-1} + n\omega_n^{\frac{1}{n}} v^{\frac{n-1}{n}}$$

Dalla proprietà isoperimetrica della sfera si ha:

$$(12) n\omega_n^{\frac{1}{n}} v_i^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_{(t_i, t_{i+1})} |D\phi_E| + \int_{\partial\Omega \cap (t_i, t_{i+1})} \phi_E dH_{n-1} + \int_{|x|=t_i} \phi_E dH_{n-1} +$$

$$+ \int_{|x|=t_{i+1}} \phi_E dH_{n-1} \quad (i = 1, 2)$$

Dalle (11) e (12) si ottiene

$$(13) n\omega_n^{\frac{1}{n}} (v_1^{\frac{n-1}{n}} + v_2^{\frac{n-1}{n}} - v^{\frac{n-1}{n}}) \leq$$

$$\leq 2 \sum_{i=1}^3 \int_{|x|=t_i} \phi_E dH_{n-1} \leq 6m .$$

Supponiamo  $v_1 \leq v_2$ , cioè  $v_2 = sv_1$  con  $s \geq 1$ ; allora  $v = (1+s)v_1$  e la (13) si scrive

$$(14) \quad n \omega_n^{\frac{1}{n}} v_1^{\frac{n-1}{n}} \left[ 1 + s^{\frac{n-1}{n}} - (1+s)^{\frac{n-1}{n}} \right] \leq 6m$$

e quindi, poiché

$$\min_{s \geq 1} \left[ 1 + s^{\frac{n-1}{n}} - (1+s)^{\frac{n-1}{n}} \right] = 2 - 2^{\frac{n-1}{n}} > 0,$$

risulta

$$v_1 \wedge v_2 \leq \left[ \omega_n^{\frac{1}{n}} \frac{1}{n} (2 - 2^{\frac{n-1}{n}}) 6m \right]^{\frac{n}{n-1}}$$

Abbiamo così dimostrato il seguente

*Lemma.*

Con le notazioni precedenti, si ha

$$(15) \quad v_1 \wedge v_2 \leq C_1 \cdot m^N$$

dove  $C_1 = C_1(n)$  dipende soltanto dalla dimensione ed  $N = \frac{n}{n-1}$

*Vogliamo ora dimostrare c).*

$j_1$  sarà scelto in modo che la quantità

$$(16) \quad \frac{|E_j \cap (\Omega_{j_1} - \Omega_{j_0})|}{j_1 - j_0} \leq \frac{V}{j_1 - j_0} \quad \forall j$$

sia sufficientemente piccola, in un senso che preciseremo dopo.

Sia  $j \geq j_1$  fissato; costruiamo  $r_j$  come il limite di due successioni  $\{a_k\}$ ,  $\{b_k\}$ , con  $a_k \uparrow r_j$ ,  $b_k \uparrow r_j$  e tali che

$$(17) \quad \lim_k \int_{|x|=a_k} \phi_{E_j} dH_{n-1} = \lim_k \int_{|x|=b_k} dH_{n-1} = 0.$$

Da (17) segue subito la tesi, cioè che  $\int_{|x|=r_j} \phi_{E_j} dH_{n-1} = 0$ .

Le successioni  $\{a_k\}, \{b_k\}$  saranno costruite mediante un processo iterativo, cominciando con

$$(18) \quad a_0 = j_0, \quad b_0 = j_1.$$

Supposti dati  $a_k$  e  $b_k$  ( $k \geq 0$ ), con  $j_0 \leq a_k < b_k \leq j_1$ , definiamo:

$$(19) \quad \begin{cases} l_k = b_k - a_k \\ v_k = |E \cap (a_k, b_k)| \end{cases}$$

Ora, per ogni  $h_k \in (0, \frac{l_k}{3})$  è possibile trovare tre punti  $t_i^k$

( $i=1,2,3$ ), tali che la traccia di  $E$  su  $|x| = t_i^k$  sia continua per  $i = 1,2,3$  ed inoltre

$$(20) \quad \begin{cases} t_1^k \in (a_k, a_k + h_k) \\ t_2^k \in (a_k + \frac{l_k}{2} - \frac{h_k}{2}, a_k + \frac{l_k}{2} + \frac{h_k}{2}) \\ t_3^k \in (b_k - h_k, b_k) \end{cases}$$

e

$$(21) \quad \int_{|x|=t_i^k} \phi_{E_j} dH_{n-1} \leq \frac{v_k}{h_k} \quad (i=1,2,3).$$

Poniamo ora

$$(22) \quad \begin{cases} v_i^k = |E \cap (t_i^k, t_{i+1}^k)| \\ v_{k+1}^k = v_1^k \wedge v_2^k \end{cases}$$

e poniamo

$$(23) \quad (a_{k+1}, b_{k+1}) = \begin{cases} (t_1^k, t_2^k) & \text{se } v_1^k \leq v_2^k \\ (t_2^k, t_3^k) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Queste sono le successioni richieste.

Poniamo

$$(24) \quad m_k = \max_{i=1,2,3} \int_{|x|=t_i^k} \phi_E dH_{n-1}$$

Da (21) si ha che

$$(25) \quad m_k \leq \frac{v_k}{h_k} \quad \forall k$$

Il pbm è quindi quello di trovare un'opportuna successione  $h_k \in (0, \frac{\ell_k}{3})$  tale che

$$(26) \quad \lim_k m_k = 0;$$

scegliamo

$$(27) \quad h_k = \frac{\ell_0}{9 \cdot 4^k}$$

Si verifica immediatamente che  $\ell_k \rightarrow 0$  e quindi  $\exists r_j \in (j_0, j_1)$  tale che

$$a_k \uparrow r_j, \quad b_k \downarrow r_j$$

Allo scopo di ottenere una buona stima per  $v_k$  (e quindi per  $m_k$ ) usiamo il lemma a p.15 . Si ottiene

$$m_0 \leq \frac{v_0}{h_0}$$

$$v_1 \leq c_1 m_0^N \leq c_1 \left(\frac{v_0}{h_0}\right)^N$$

$$m_1 \leq \frac{v_1}{h_1} \leq c_1 \frac{v_0^N}{h_0^N h_1}$$

$$v_2 \leq c_1 m_1^N \leq c_1^{N+1} \frac{v_0^{N^2}}{h_0^{N^2} h_1^N}$$

$$m_2 \leq \frac{v_2}{h_2} \leq c_1^{1+N} \frac{v_0^{N^2}}{h_0^{N^2} h_1^N h_2}$$

$$v_3 \leq c_1 m_2^N \leq c_1^{1+N+N^2} \frac{v_0^{N^3}}{h_0^{N^3} h_1^{N^2} h_2^N}$$

$$m_3 \leq \frac{v_3}{h_3} \leq c_1^{1+N+N^2} \frac{v_0^{N^3}}{h_0^{N^3} h_1^{N^2} h_2^N h_3}, \text{ e, in generale:}$$

$$(28) \quad m_k \leq c_1^{1+N+\dots+N^{k-1}} \frac{v_0^{N^k}}{h_0^{N^k} h_1^{N^{k-1}} \dots h_{k-1}^N h_k} =$$

$$= \left[ c_1^{\sum_{i=1}^{k-1} N^{-i}} \frac{v_0}{\prod_{i=0}^k h_i^{N^{-i}}} \right]^{N^k} \leq \left( \text{cost.} \frac{v_0}{\ell_0} \right)^{N^k}$$

cioé

$$m_k \leq \left( \text{cost.} \frac{v_0}{\ell_0} \right) N^k$$

Scegliendo in (16)  $j_1$  abbastanza grande in modo che sia  $\text{cost} \frac{v_0}{\ell_0} < 1$  si ottiene il risultato desiderato.

*Dimostriamo ora d).*

Sia  $E_j$  minimo del pbm (8)-(9), sia  $r_j$  come in c), sia

$$\tilde{E}_j = \begin{cases} E_j & \text{in } \Omega_{r_j} - B \\ \emptyset & \text{in } \Omega - \Omega_{r_j} \\ E_j \cup B_{\rho_j} & \text{in } B \end{cases}$$

dove  $B_{\rho_j}$  è una palla concentrica con  $B$  scelta in modo da preservare

il vincolo di volume, cioè

$$|B_{\rho_j} - E_j| = |E_j \cap (\Omega - \Omega_{r_j})| = v_j$$

Allora:

$$F(\tilde{E}_j) = \int_{\Omega_j} |D\phi_{\tilde{E}_j}| + \int_{\partial\Omega_j} |\phi_{\tilde{E}_j} - \phi_\Gamma| dH_{n-1} =$$

$$= \int_{\Omega_{r_j} - \bar{B}_{\rho_j}} |D\phi_{E_j}| + \int_{B_{\rho_j}} |D\phi_{\tilde{E}_j}| + \int_{\partial\Omega_j} |\phi_{\tilde{E}_j} - \phi_\Gamma| dH_{n-1} \leq$$

$$\leq \int_{\Omega_{r_j} - \bar{B}_{\rho_j}} |D\phi_{E_j}| + \int_{B_{\rho_j}} |D\phi_{E_j}| + \frac{n}{\rho_j} v_j + \int_{\partial\Omega_j} |\phi_{\tilde{E}_j} - \phi_\Gamma| dH_{n-1} \leq$$

$$\leq \int_{\Omega_{r_j}} |D\phi_{E_j}| + \frac{n}{\rho_j} v_j + \int_{\partial\Omega_j} |\phi_{\tilde{E}_j} - \phi_\Gamma| dH_{n-1} \leq$$

$$\leq \int_{\Omega_{r_j}} |D\phi_{E_j}| + n\omega_n \frac{1}{n} v_j \frac{n-1}{n} + \int_{\partial\Omega_j} |\phi_{E_j}^{\sim} - \phi_{\Gamma}| dH_{n-1} \leq$$

$$\leq \int_{\Omega_{r_j}} |D\phi_{E_j}| + \int_{\Omega_j - \Omega_{r_j}} |D\phi_{E_j}| + \int_{\partial\Omega_j} |\phi_{E_j} - \phi_{\Gamma}| dH_{n-1} \leq F(E_j)$$

e quindi

$$F(E_j^{\sim}) = F(E_j)$$

Per concludere, supponiamo (a meno di passare ad una sottosuccessione) che  $E_j^{\sim} \xrightarrow{j} E_0$  in  $L^1(\Omega)$ . Vediamo che  $E_0$  è minimo del pbm  $P_V$ .

Cominciamo confrontando  $E_0$  con insiemi limitati. Sia quindi  $F \in \varepsilon_V$ ,  $F$  limitato. Allora  $F \in \varepsilon_j$  per  $j$  grande, e quindi dalla s.c.i. di  $F$  si ha

$$F(E_0) \leq \min_j F(E_j^{\sim}) \leq F(F)$$

Sia ora  $F \in \varepsilon_V$  arbitrario. Sostituiamo  $F$  con l'insieme

$$F_k = \begin{cases} F & \text{in } \Omega_{r(k)} - B \\ \emptyset & \text{in } \Omega - \Omega_{r(k)} \\ F \cup B_{\rho_k} & \text{in } B \end{cases}$$

dove al solito  $B_{\rho_k}$  è scelta in modo da preservare il vincolo di volume e dove  $r(k)$  è un'opportuna successione divergente a  $+\infty$ . Poiché  $F_k \in \varepsilon_V$  ed è limitato, si ha

$$F(E_0) \leq F(F_k)$$

Il risultato segue notando che, per una opportuna scelta di  $r(k)$ ,

risulta

$$\lim_k F(F_k) = F(F)$$

*Il problema della regolarità per minimi con vincolo di volume.*

Naturalmente, sebbene la nostra definizione di area sia così generale da includere frontiere molto strane, ci aspettiamo che un insieme minimizzante l'area (con o senza vincolo di volume) abbia frontiera regolare.

Nel 1960 E. De Giorgi [3] dimostrò l'analiticità ridotta  $\partial^*E$  di ogni insieme minimizzante l'area in un aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ), inoltre, M. Miranda [12] ed H. Federer [5] ottennero delle stime molto precise dell'insieme singolare; si ha che

$$H_s(\partial E - \partial^*E) = 0 \quad \forall s > n-8 .$$

Nel problema considerato da De Giorgi c'era soltanto un vincolo, i.e., "un dato al bordo"  $\Gamma$  su  $\partial\Omega$ , che la soluzione doveva prendere in un senso opportuno. Vogliamo qui considerare il problema nuovo che appare quando viene imposta una condizione di volume sulla soluzione.

*Definiamo*

$$(29) \quad \psi(E, x, \rho) = \int_{\bar{B}_\rho(x)} |D\phi_E| - \inf \left\{ \int_{\bar{B}_\rho(x)} |D\phi_F|, F - \bar{B}_\rho(x) = E - \bar{B}_\rho(x) \right\}$$

$$x \in \Omega, \quad 0 < \rho < d(x, \partial\Omega).$$

Il risultato classico di regolarità per frontiere minime risiede principalmente in due fatti:

1°) Una stima del tipo

$$\psi(E, x, \rho) \leq \text{cost.} \cdot \rho^n$$

2°) Un procedimento che conduce ad ottenere coni minimi a partire da insiemi minimi facendo un "blow up" su punti frontiera.

Per gli insiemi di perimetro minimo si ha ovviamente

$$\psi(E, x, \rho) = 0$$

I seguenti risultati sono stati dimostrati da E.º Gonzalez - U. Masari - I. Tamànini in [8].

Per il pbm con volume fissato, la stima di  $\psi$  si basa nel seguente

*Teorema*

Se  $E$  minimizza il perimetro con un vincolo di volume in  $\Omega$ , e se  $|E \cap \Omega| > 0$ ,  $|\Omega - E| > 0$ , allora esistono due sfere  $B_1, B_2 \subset \subset \Omega$  con

$$(30) \quad \begin{aligned} d(B_1, \Omega - E) &\geq \delta \\ d(B_2, E) &\geq \delta \end{aligned}, \quad \delta > 0.$$

Supposto vero il precedente teorema (alla cui dimostrazione accenneremo in seguito), vediamo come da esso segue la

*Proposizione*

Sia  $E$  minimizzante il perimetro con vincolo di volume in una sfera  $B_R$  con  $0 < |E \cap B_R| < |B_R|$  e siano  $B_1, B_2$  due sfere di raggio  $r$  contenute in  $B_R$  verificanti (30) con  $\Omega = B_R$ . Se inoltre  $x \in B_R \cap \partial E$  e  $0 < \rho < \bar{\rho} < \min\{d(x, \partial B_R), \delta, r\}$ , allora

$$(31) \quad \psi(E, x, \rho) \leq \frac{n\omega_n}{r} \rho^n$$

*Dimostrazione.*

Sia  $F$  un insieme misurabile t.c.

$$F - B_\rho(x) = E - B_\rho(x)$$

e supponiamo che

$$|E \cap B_\rho(x)| \geq |F \cap B_\rho(x)| .$$

Possiamo allora muovere la sferetta piena  $B_1$ , senza uscire da  $B_R - \bar{B}_\rho(x)$ , fino a che essa occupa una posizione  $B_3$  tale che

$$|B_3 - E| = |E \cap B_\rho(x)| - |F \cap B_\rho(x)| .$$

Sia  $F_\rho = (F \cap B_\rho(x)) \cup (E - B_\rho(x)) \cup B_3$  .

Poiché  $|F_\rho| = |E|$  , si ha

$$(32) \quad \int_{\bar{B}_\rho(x)} |D\phi_E| + \int_{\bar{B}_3} |D\phi_E| \leq \int_{\bar{B}_\rho(x)} |D\phi_{F_\rho}| + \int_{\bar{B}_3} |D\phi_{F_\rho}|$$

Dalla (10) a p. ne segue

$$\begin{aligned} \int_{\bar{B}_\rho(x)} |D\phi_{F_\rho}| + \int_{\bar{B}_3} |D\phi_{F_\rho}| &= \int_{\bar{B}_\rho(x)} |D\phi_F| + \int_{\partial B_3} \phi_{B_3 - E} dH_{n-1} + \int_{\partial B_3} (\phi_E^+ - \phi_E^-) dH_{n-1} \leq \\ &\leq \int_{\bar{B}_\rho(x)} |D\phi_F| + \int_{\bar{B}_3} |D\phi_E| + \frac{n}{r} |B_3 - E| + \int_{\partial B_3} (\phi_E^+ - \phi_E^-) dH_{n-1} = \\ &= \int_{\bar{B}_\rho(x)} |D\phi_F| + \int_{\bar{B}_3} |D\phi_E| + \frac{n}{r} |B_3 - E| \end{aligned}$$

Da questa e dalla (32) si ottiene

$$\int_{\bar{B}_\rho(x)} |D\phi_E| \leq \int_{\bar{B}_\rho(x)} |D\phi_F| + \frac{n}{r} |B_3 - E| \leq \int_{\bar{B}_\rho(x)} |D\phi_F| + \frac{n\omega_n}{r} \rho^n ,$$

cioé

$$\int_{\bar{B}_\rho(x)} |D\phi_E| - \int_{\bar{B}_\rho(x)} |D\phi_F| \leq \frac{n\omega_n}{r} \rho^n$$

ed il risultato segue dall'arbitrarietà di F.

La dimostrazione del teorema a pagina 22 si basa nel seguente "lemma di densità":

*Lemma*

Sia  $Q$  un ipercubo in  $\mathbb{R}^n$  di lato  $\ell > 0$ , sia  $E$  un insieme di perimetro finito in  $Q$  tale che

$$0 < |E \cap Q| < |Q|.$$

Allora,  $\forall p \in (0, \frac{n^2}{n-1})$  e  $\forall A > 0$  esistono due sfere  $B_{\rho_1}, B_{\rho_2}$  contenute in  $Q$ , di raggi arbitrariamente piccoli, t.c.

$$(33), \quad \begin{cases} |E \cap B_{\rho_1}| < A \cdot \rho_1^p \\ |B_{\rho_2} - E| < A \cdot \rho_2^p \end{cases}$$

*Dimostrazione*

Se  $x$  è un punto di densità zero per  $E$  (e quasi ogni punto in  $Q-E$  ha densità zero per  $E$ ), abbiamo:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|E \cap B_\rho(x)|}{\omega_n \rho^n} = 0$$

cioè,  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \rho_\varepsilon$  tale che

$$|E \cap B_\rho(x)| < \varepsilon \omega_n \rho^n \quad \forall \rho \leq \rho_\varepsilon$$

Questo prova la prima disug. in (33) per  $p \leq n$ . Prendendo punti dove  $E$  ha densità 1, si dimostra in maniera analoga la seconda delle (33).

Supponiamo quindi  $p > n$ . Per ogni  $k \in \mathbb{N}$  indichiamo

$$\{ Q_i^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, 2^{kn} \}$$

la famiglia degli ipercubi aperti disgiunti uguali in cui possiamo di vedere  $Q$ .

Classifichiamo questi ipercubi  $Q_i^{(k)}$  nel seguente modo:

$$A_k = \{ Q_i^{(k)} : \epsilon_k \leq |E \cap Q_i^{(k)}| \leq \frac{\ell^n}{2^{kn}} - \epsilon_k \}$$

$$B_k = \{ Q_i^{(k)} : |E \cap Q_i^{(k)}| < \epsilon_k \}$$

$$C_k = \{ Q_i^{(k)} : |E \cap Q_i^{(k)}| > \frac{\ell^n}{2^{kn}} - \epsilon_k \},$$

cioé, classifichiamo i cubi in tre categorie:

$A_k$  : quelli né troppo vuoti né troppo pieni

$B_k$  : quelli quasi vuoti

$C_k$  : quelli quasi pieni.

L'idea è che non ci possono essere troppi cubi di tipo  $A_k$  per ché essi danno molto contributo di perimetro. Quindi, asintoticamente, facendo  $\epsilon_k \rightarrow 0$  in modo opportuno, i cubi dovranno essere quasi tutti di tipo  $B_k$  oppure  $C_k$  (il rapporto fra le quantità card  $B_k$  e card  $C_k$  sarà asintoticamente  $\frac{|Q-E|}{|Q \cap E|}$  )

Il fatto che gli ipercubi in  $A_k$  diano un cospicuo contributo di perimetro è conseguenza di una disug. di Sobolev-Poincaré. (vedi E. Giusti [6]) da cui, per  $Q_i^{(k)} \in A_k$

$$\epsilon_k^{\frac{n-1}{n}} \leq c \int_{Q_i^{(k)}} |D\phi_E| \quad (c: \text{costante})$$

e quindi il contributo di perimetro dovuto ai quadratini in  $A_k$  è perlomeno di

$$\frac{\text{card } A_k \epsilon_k^{\frac{n-1}{n}}}{c}$$

Quindi

$$\frac{\text{card } A_k \epsilon_k^{\frac{n-1}{n}}}{c} \leq \int_Q |D\phi_E|$$

e allora si ha una stima della cardinalità di  $A_k$ .

Il risultato segue scegliendo opportunamente  $\epsilon_k$ . La scelta

$$\epsilon_k = \frac{A \cdot \rho_1^p}{2^{p(k+1)}}$$

usata in [8] (dove si possono vedere i conti dettagliati) funziona.

*Diamo ora un'idea della dimostrazione del teorema a pagina 22.*

Dimostriamo l'esistenza della "pallina vuota"  $B_2$  (per  $B_1$  si procede ragionando allo stesso modo sul complementare).

Partiamo dalla pallina  $B_{\rho_1}$  nel lemma a pagina 24. Abbiamo

$$|E \cap B_{\rho_1}| < A \cdot \rho_1^p$$

dove  $A$  e  $p$  vengono scelti opportunamente in seguito.

Siano  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \rho_1$ , supponiamo (il che non toglie generalità) le tracce di  $E$  su  $\partial B_{t_i}$  ( $i=1,2,3$ ) continue e definiamo

$$m = \max_{i=1,2,3} \int_{\partial B_{t_i}} \phi_E dH_{n-1}$$

$$(t_1, t_2) = B_{t_2} - \bar{B}_{t_1}$$

$$, \quad (t_2, t_3) = B_{t_3} - \bar{B}_{t_2}$$

$$(t_1, t_3) = B_{t_3} - \bar{B}_{t_1}$$

$$, \quad v_i = |E \cap (t_i, t_{i+1})|, \quad i=1,2$$

$$v = v_1 + v_2$$

Ragionando in modo analogo a quanto fatto nella dimostrazione del lemma a pagina 15, si dimostra che esiste una costante  $c_2 = c_2(n)$  tale che, se

$$(34) \quad v \leq \omega_n \left( \frac{t_3 - t_1}{2} \right)^n$$

allora

$$(35) \quad v_1 \wedge v_2 \leq c_2^N, \quad \text{dove} \quad N = \frac{n}{n-1}$$

La richiesta (34) è qui necessaria perché per dimostrare (35) si sostituisce  $E$  con l'insieme  $F$  definito da

$$F = \begin{cases} E \text{ in } \Omega - (t_1, t_3) \\ \text{una sfera di misura } v \text{ in } (t_1, t_3) \end{cases}$$

e si sfrutta la minimalità di  $E$ .

Con un procedimento di tipo iterativo vogliamo ora dimostrare l'esistenza di  $t$  e  $(0, \rho_1)$  tale che

$$(36) \quad \int_{\partial B_t} \phi_E dH_{n-1} = 0$$

Il procedimento consiste nell'ottenere  $t$  come limite di due successioni  $a_j \uparrow t$ ,  $b_j \downarrow t$ , con  $a_0 = 0$ ,  $b_0 = \rho_1$  dove

$$(37) \quad \lim_j \int_{\partial B_{a_j}} \phi_E dH_{n-1} = \lim_j \int_{\partial B_{b_j}} \phi_E dH_{n-1} = 0 .$$

Supposto costruiti  $a_j, b_j$  ( $j \geq 0$ ) definiamo

$$l_j = b_j - a_j$$

$$v_j = |E \cap (a_j, b_j)| .$$

Se  $h_j \in (0, l_j/3)$ , allora possiamo scegliere tre punti  $t_i^j$  ( $i=1,2,3$ ) tali che la traccia di  $E$  su  $\partial B_{t_i^j}$  sia continua,

$$\begin{aligned} t_1^j &\in (a_j, a_j + h_j) \\ t_i^j &\in (a_j + l_j/2 - h_j/2, a_j + l_j/2 + h_j/2) \\ t_3^j &\in (b_j - h_j, b_j) \end{aligned}$$

e sia inoltre

$$\int_{\partial B_{t_i^j}} \phi_E dH_{n-1} \leq \frac{v_j}{h_j}$$

Posto  $v_i^j = |E \cap (t_i^j, t_{i+1}^j)|$ ,  $i=1,2$ , scegliamo

$$(a_{j+1}, b_{j+1}) = \begin{cases} (t_1^j, t_2^j) & \text{se } v_1^j \leq v_2^j \\ (t_2^j, t_3^j) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo modo si definiscono le successioni  $\{a_j\}, \{b_j\}$ .

Ponendo ora

$$m_j = \max_{i=1,2,3} \int_{\partial B_{t_i^j}} \phi_E dH_{n-1}$$

si tratta di dimostrare che, con un'opportuna scelta di  $A, p$  e  $\{h_j\}$  risulta

$$\lim_j m_j = 0 .$$

Questo si fa procedendo in modo analogo a quanto fatto per il passo c) a pagina 15. La nuova difficoltà risiede nel fatto che ad ogni passo, nella successione di stime che si fanno, bisogna che sia verificata la condizione (34), cioè, che sia

$$v_j \leq \omega_n \left( \frac{b_j - a_j}{2} \right)^n$$

Le scelte opportune di  $\{h_j\}$ ,  $A$  e  $p$  (vedi [1], citato a p.22) sono

$$h_j = \frac{l_0}{4^{2+j}}$$

$$A = \min \left\{ \frac{\omega_n}{2^{n(q+1) - (q-1)}}, \frac{1}{c_3}, \frac{\omega_n N^{-q}}{c_3} \right\}$$

$$p = n \left( \frac{1}{N^q} + 1 \right)$$

dove  $c_3 = c_3(n)$  è una costante e  $q$  è il più piccolo intero positivo tale che

$$N^q > n-1$$

Si noti che  $p \in (n, \frac{n^2}{n-1})$  !

In questo modo si ottiene la (36).

Dal fatto che  $\int_{\partial B_t} \phi_E dH_{n-1} = 0$ , segue subito che  $|E \cap B_t| < |B_t|$ .

D'altra parte,  $E \cap B_t$  deve ovviamente essere una sfera. Basta quindi prendere come  $B_2$  una qualunque sfera contenuta in  $B_t$  che sia disgiunta con  $E \cap B_t$  (in realtà si può vedere che  $E \cap B_t = \emptyset$ ).

*Proprietà qualitative per le soluzioni del pbm di Plateau con vincolo di volume.*

I seguenti risultati sono stati dimostrati da E. Gonzalez, U. Mas-sari, I. Tamanini in [9].

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aperto limitato con  $\partial\Omega$  lipschitziana, sia  $\Gamma \subset \partial\Omega$ ,  $V \in (0, |\Omega|)$ . Sappiamo già che il pbm di minimizzare il funzionale

$$(38) \quad F(E) = \int_{\Omega} |D\phi_E| + \int_{\partial\Omega} |\phi_E - \phi_{\Gamma}| dH_{n-1}$$

nella classe

$$(39) \quad \varepsilon_V = \{E \subset \Omega : |E| = V\}$$

ha soluzione ed inoltre che la frontiera  $\partial E$  di ogni soluzione è regolare (nel senso detto precedentemente). Vale il seguente

*Teorema*

Sia  $E$  una soluzione del pbm (38)-(39), siano  $x_1, x_2$  due punti regolari di  $\Omega \cap \partial E$ . Allora

$$(40) \quad \operatorname{div} \left( \frac{Du_1(x_1)}{\sqrt{1+|Du_1(x_1)|^2}} \right) = \operatorname{div} \left( \frac{Du_2(x_2)}{\sqrt{1+|Du_2(x_2)|^2}} \right)$$

dove  $u_1, u_2$  sono funzioni che descrivono  $\partial E$  vicino ad  $x_1$  e  $x_2$  ri-spettivamente.

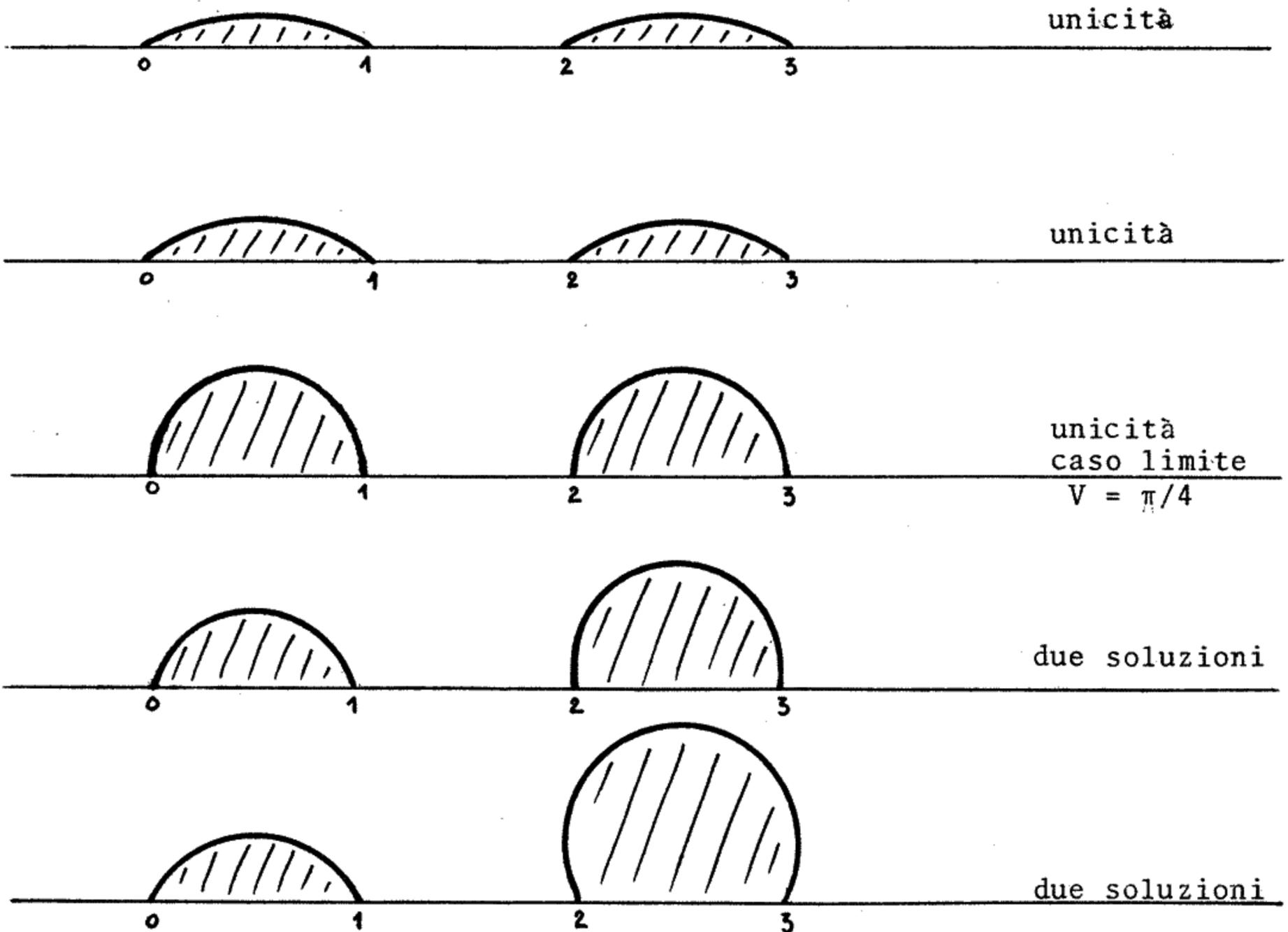
In altre parole, la curvatura della frontiera di  $E$  deve essere costante, anche se  $E$  può essere non connesso.

*Esempio.*

$$\Omega = \{(x, y) : y > 0\}$$

$$\Gamma = [0, 1] \cup [2, 3]$$

Le diverse soluzioni del pbm (38) - (39) per diversi valori di  $V$  (a partire da valori vicini a zero) sono nelle figure seguenti:



N.B. ogni soluzione è data da calotte sferiche. Che queste siano le soluzioni segue dalla proprietà isoperimetrica del cerchio.

Un altro risultato dimostrato in [9] è che se  $E$  non prende il dato al bordo, allora  $\partial E$  arriva a  $\partial \Omega$  in modo tangenziale. Più precisamente:

*Teorema.*

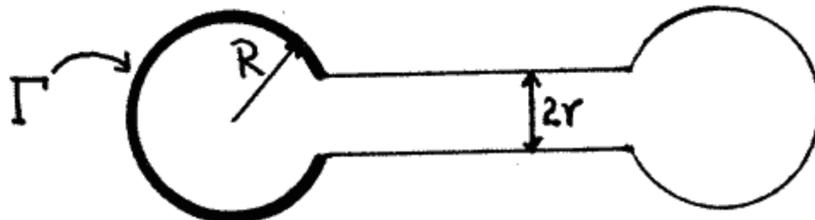
Sia  $0 \in \partial\Omega$  un punto regolare della frontiera di  $\Omega$ . Se  $0 \in \bar{\Gamma}$  allora esiste  $B_\rho(0)$  tale che  $\partial E \cap B_\rho(0)$  è di classe  $C^1$  (eventualmente  $\emptyset$ ).

Analogamente, se  $0 \in \overset{\circ}{\Gamma}$ , allora  $\partial(\Omega-E) \cap B_\rho(0)$  è di classe  $C^1$ .

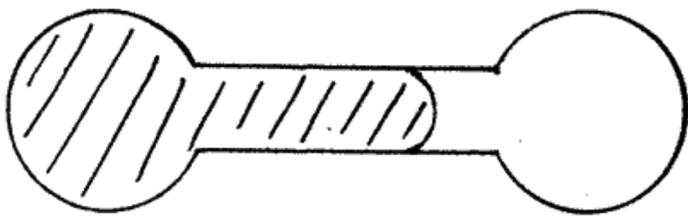
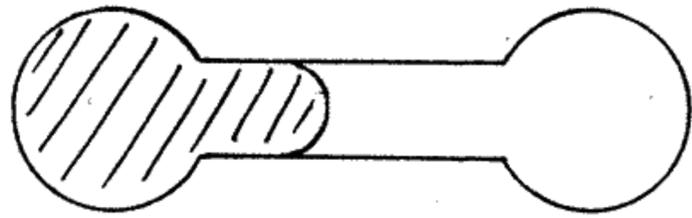
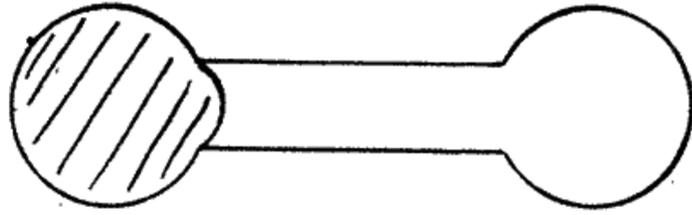
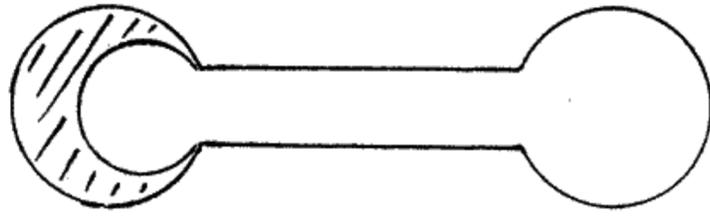
Non ci possiamo aspettare né unicità di soluzione per il pbm (38)-(39) né dipendenza continua della curvatura media  $\Omega \cap \partial E$  volume  $V$ . Consideriamo il seguente

*Esempio.*

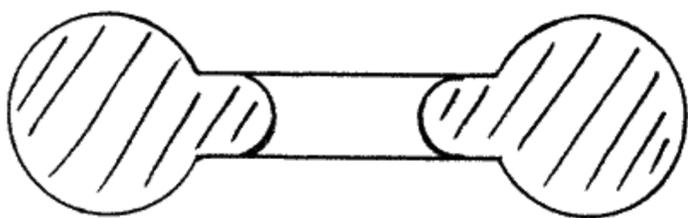
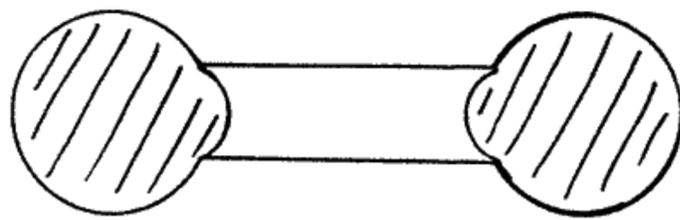
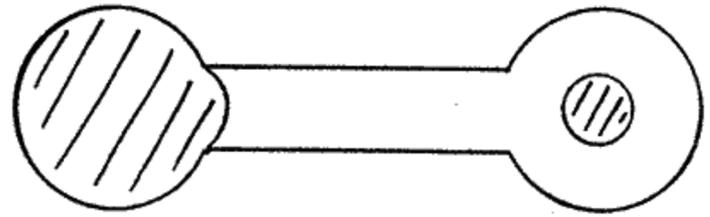
Siano  $\Omega, \Gamma$  come in figura,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$



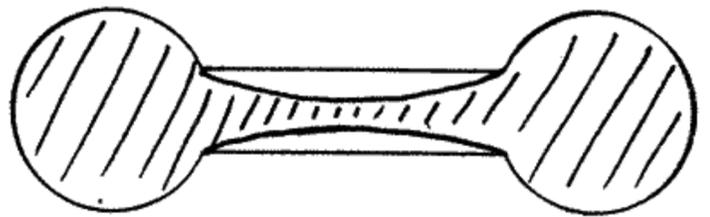
Le soluzioni, a mano a mano che  $V$  cresce, sono indicate nelle figure successive.

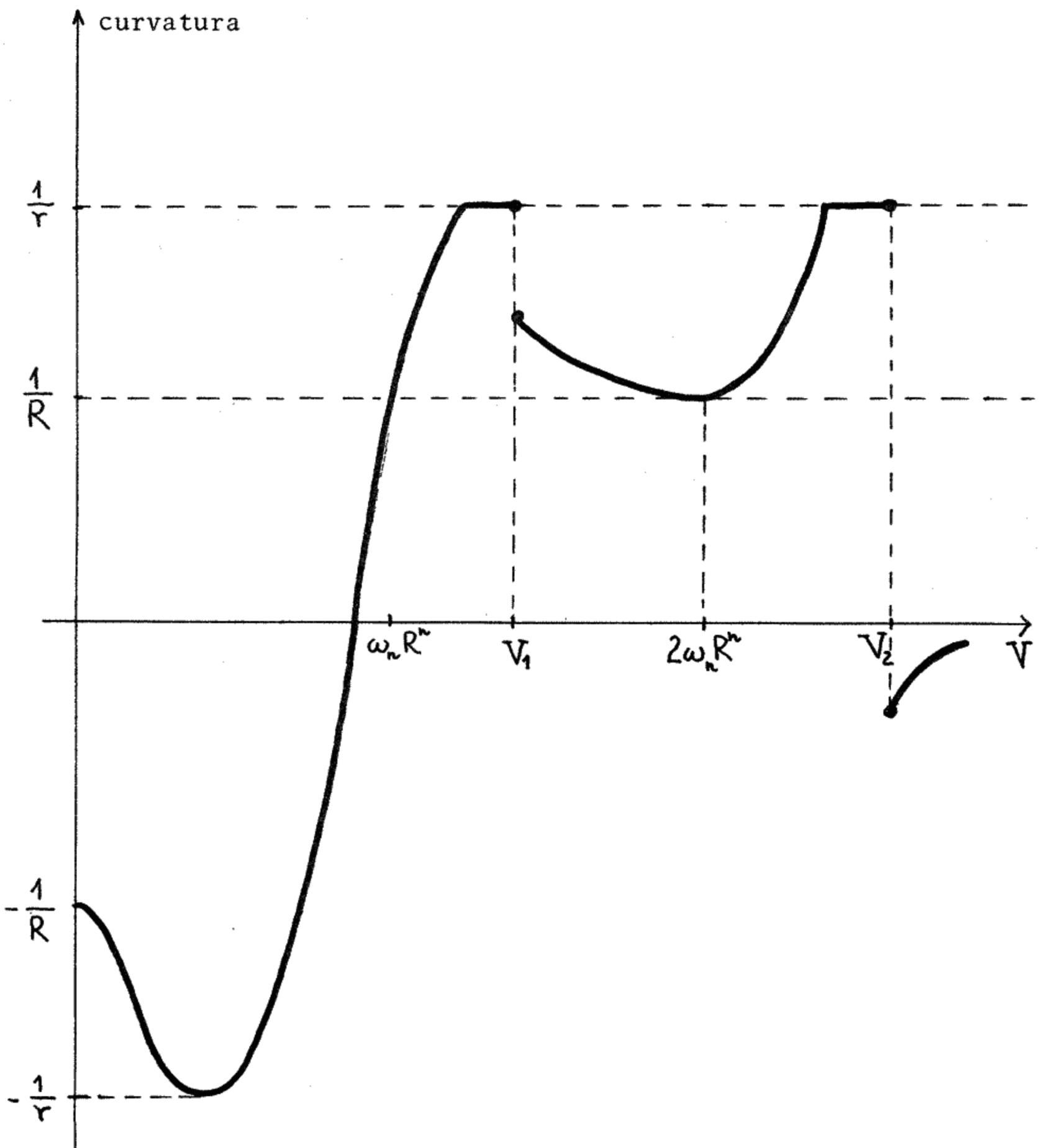


$$V = V_1$$



$$V = V_2$$





*Problema di Plateau con volume fissato e moltiplicatori di Lagrange.*

I seguenti risultati sono stati presentati per la prima volta da G. Congedo, E. Gonzalez in [2].

Nel seguito  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  sarà un aperto limitato con  $\partial\Omega$  lipschitziana e  $\Gamma \subset \partial\Omega$ . Se  $V_0 \in (0, |\Omega|)$  possiamo considerare il pbm di minimizzare

$$(41) \quad F(E) = \int_{\Omega} |D\phi_E| + \int_{\partial\Omega} |\phi_E - \phi_{\Gamma}| dH_{n-1}$$

nella classe

$$(42) \quad \varepsilon_{V_0} = \{E \subset \Omega : |E| = V_0\}$$

Sappiamo già diverse cose rispetto a questo problema. Ci poniamo ora la seguente questione:

*Esiste una funzione  $g : [0, |\Omega|] \rightarrow \mathbb{R}$  "regolari t.c. il pbm (41)-(42) sia equivalente a minimizzare il funzionale*

$$(43) \quad F_g(E) = F(E) + g(|E|)$$

nella classe

$$(44) \quad \varepsilon = \{E \subset \Omega\} ?$$

La risposta naturalmente dipende da che richieste si fanno sulla penalizzazione  $g$ . Ad esempio, se la funzione

$$g(v) = \begin{cases} k & \text{se } v = v_0, \text{ } k \text{ costante positiva grande} \\ 0 & \text{se } v = V_0. \end{cases}$$

è ammessa, la risposta è banalmente affermativa. Ma a noi interessa considerare, per quanto possibile, penalizzazioni "regolari".

Indicheremo con  $G$  la famiglia delle penalizzazioni ammissibili.  
Su  $G$  facciamo le seguenti richieste:

$G_1$ ) ogni  $g \in G$  è continua in  $[0, |\Omega| ]$

$G_2$ )  $\forall V_0 \in (0, |\Omega| ) \forall M > 0 \quad \forall \delta > 0$  con

$$0 < V_0 - \delta < V_0 + \delta < |\Omega|$$

esiste  $g \in G$  tale che

$$g(v) \geq g(V_0) \quad \forall v \in [0, |\Omega| ]$$

$$g(v) - g(V_0) \geq M \quad \forall v \notin (V_0 - \delta, V_0 + \delta)$$

Ad esempio, la famiglia di tutte le parabole

$$(43) \quad g_{\lambda, v_0}(v) = \lambda(v-v_0)^2, \quad \lambda > 0, v_0 \in (0, |\Omega|)$$

è una famiglia  $G$  ammissibile.

*Primi risultati.*

Nel seguito considereremo sempre famiglie  $G$  verificanti  $G_1$ ) e  $G_2$ ).  
Dal teorema di compattezza, dalla limitatezza inferiore di  $g \in G$  e  
dalla s.c.i. del funzionale  $F_g$  si ha subito il seguente:

*Teorema*

$\forall g \in G \exists E_g$  (in genere non unico) minimizzante il funzionale  $F_g$ .

Dimostriamo ora un facile risultato di densità:

*Teorema*

L'insieme

$$(44) \quad v(G) = \{ |E_g| : g \in G \}$$

è denso in  $(0, |\Omega| )$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $V_0 \in (0, |\Omega|)$ , sia  $\varepsilon > 0$  t.c.  $0 < v_0 - \varepsilon < v_0 + \varepsilon < |\Omega|$ .

Sia  $F_t = \{x \in \Omega: x_n < t\}$

Si ha  $F(F_t) \leq c(\Omega) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ .

Sia  $g \in \mathcal{G}$  tale che

$$g(v) - g(v_0) > c(\Omega) \quad \forall v \notin (v_0 - \varepsilon, v_0 + \varepsilon).$$

Sia  $t \in \mathbb{R}$  t.c.  $|F_t| = V_0$ ; supponiamo per assurdo che

$$v = |E_g| \notin (v_0 - \varepsilon, v_0 + \varepsilon)$$

Si avrebbe

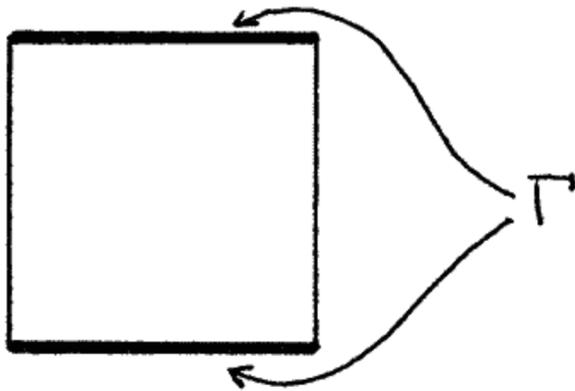
$$\begin{aligned} F_g(E_g) - F_g(F_t) &= F(E_g) - F(F_t) + g(v) - g(v_0) > \\ &> 0 - c(\Omega) + c(\Omega) = 0 \end{aligned}$$

contraddicendo la proprietà di minimo di  $E_g$ .

N.B.

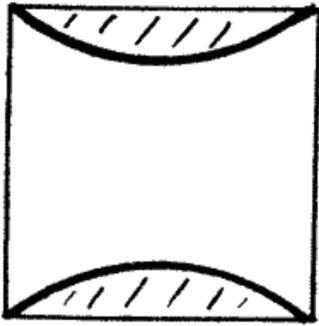
Poiché ogni minimo  $E_g$  di  $F_g$  è un minimo per il pbm di Plateau con vincolo di volume, sappiamo già che la frontiera di  $E_g$  è regolare nel senso visto in precedenza.

Il precedente risultato di densità non basta per assicurare una risposta affermativa al nostro quesito. Consideriamo infatti la famiglia  $\mathcal{G}$  di parabole definita in (43) nel caso in cui  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  e  $\Gamma \subset \partial\Omega$  sono come indicato

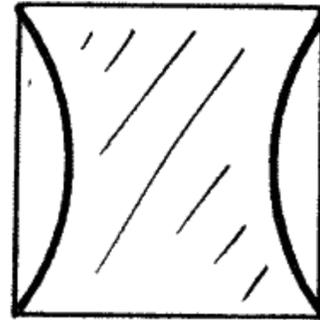


$$\Omega = (0,1) \times (0,1)$$

Dalla proprietà isoperimetrica della sfera segue facilmente che ogni minimo  $E_{g_{\lambda, v_0}}$  di  $F_{g_{\lambda, v_0}}$  sarà necessariamente di uno dei due tipi indicati in figura



A



B

A) Soluzione disconnessa

B) Soluzione connessa

dove, in entrambi i casi,  $\Omega \cap \partial E_{g_{\lambda, v_0}}$  è costituita da due archi di cerchio dello stesso raggio. Inoltre, per ogni  $(\lambda, v_0) \in (0, +\infty) \times (0, |\Omega|)$  ci può essere al più un minimo di tipo A) ed al più un minimo di tipo B) per  $F_{g_{\lambda, v_0}}$ .

Questo segue dalla stretta convessità di

$$t \mapsto \sqrt{1+t^2}$$

e quindi, del funzionale dell'area) e dalla stretta convessità di  $g_{\lambda, v_0}$ .

Si vede inoltre facilmente che, nella situazione A) è

$$\frac{d(\text{lunghezza})}{d(\text{misura 2-dimensionale})} > 0 ,$$

mentre nella situazione B) è

$$\frac{d(\text{lunghezza})}{d(\text{misura 2-dimensionale})} < 0 .$$

Poiché il minimo di  $g_{\lambda, v_0}$  si trova in  $v = v_0$ , dove  $g'_{\lambda, v_0} = 0$ , da questo ne segue che

(i) se  $E_{g_{\lambda, v_0}}$  è del tipo A), allora  $|E_{g_{\lambda, v_0}}| < v_0$ ,

mentre

(ii) se  $E_{g_{\lambda, v_0}}$  è del tipo B), allora  $|E_{g_{\lambda, v_0}}| > v_0$ .

Vediamo ora che il valore  $v_0 = \frac{1}{2}$  non è mai assunto, cioè che

$$|E_{g_{\lambda, v_0}}| \neq \frac{1}{2} \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall v_0 \in (0, |\Omega|)$$

1° Caso)  $v_0 \leq 1/2$

Allora, se  $E_{g_{\lambda, v_0}}$  è del tipo A), da i) segue che

$$|E_{g_{\lambda, v_0}}| < \frac{1}{2}$$

Supponiamo quindi che l'insieme  $E$  di tipo B) e misura  $1/2$  sia minimo di  $F_{g_{\lambda, v_0}}$ . Ma allora si avrebbe poiché

$$F_{g_{\lambda, v_0}}(E) = F_{g_{\lambda, v_0}}(E^*) ,$$

dove  $E^*$  è l'insieme di tipo A) e misura  $1/2$ , che anche  $E^*$  sarebbe un minimo di  $F_{g_{\lambda, v_0}}$ , assurdo.

2° Caso)  $v_0 > 1/2$ .

Si ragiona allo stesso modo.

N.B.

Si noti che questo esempio funziona per ogni famiglia  $G$  di funzioni derivabili nel pto di minimo.

*Penalizzazione con coni.*

Consideriamo ora la famiglia  $G$  costituita da tutte le funzioni del tipo

$$g_{\lambda, v_0}(v) = \lambda |v - v_0| , \quad \lambda > 0, \quad v \in (0, |\Omega|) .$$

Sia  $v_0 \in (0, |\Omega|)$ . Vogliamo ora dimostrare che, per  $\lambda$  sufficientemente grande, se  $E_\lambda$  è un minimo di

$$(45) \quad F_{\lambda, v_0}(E) = F(E) + g_{\lambda, v_0}(|E|)$$

in  $\varepsilon$ , allora  $|E_\lambda| = v_0$ .

A questo scopo ci serviamo di due lemmi:

*Lemma*

Sia  $Q$  un ipercubo aperto in  $\mathbb{R}^n$  di lato  $\ell > 0$ , sia  $E$  un insieme tale che

$$(46) \quad \begin{cases} 0 < a < |E \cap Q| < b < |Q| = \ell^n \\ \int_Q |D\phi_E| < c \end{cases}$$

(a, b, c costanti).

Allora,  $\forall p \in (0, \frac{n^2}{n-1})$ ,  $\forall A > 0$  esiste

$$(47) \quad r = r(a, b, c, \ell, p, A)$$

e due sfere  $B_1, B_2$  di raggio  $r$  contenute in  $Q$  t.c.

$$(48) \quad |E \cap B_1| < A r^p, \quad |B_2 - E| < A r^p$$

*Dimostrazione.*

Basta notare che nella dimostrazione del lemma a p. 24 tutte le maggiorazioni fatte dipendono soltanto da  $\ell$ ,  $|E \cap Q|$ ,  $\int_Q |D\phi_E|$ ,  $A$  e  $p$ .

*Lemma*

Sia  $v_0 \in (0, |\Omega|)$ . Allora esistono  $\lambda_0 = \lambda_0(v_0)$  ed  $r_0 = r_0(v_0)$  t.c.,  $\forall \lambda \geq \lambda_0$ , indicato con  $E_\lambda$  un minimo di  $F_{\lambda, v_0}$ , esistono due sfere  $B_\lambda, \tilde{B}_\lambda$  di raggio  $r_0$  contenute in  $\Omega$  t.c.

$$(49) \quad |E_\lambda \cap B_\lambda| = 0, \quad |E_\lambda \cap \tilde{B}_\lambda| = |\tilde{B}_\lambda| = \omega_n r_0^n.$$

*Dimostrazione.*

Poiché  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} |E_\lambda| = v_0$ , presi  $\tilde{a}, \tilde{b}$ ,

$$0 < \tilde{a} < v_0 < \tilde{b} < |\Omega|,$$

esiste  $\lambda$  tale che

$$(50) \quad \tilde{a} \leq |E_\lambda| \leq \tilde{b} \quad \forall \lambda \geq \lambda_0.$$

Da (50) segue subito che esiste  $\ell > 0$ , ed esistono  $a, b$ ,  $0 < a < b < \ell^n$ ,

tali che  $\forall \lambda \geq \lambda_0$  esiste  $Q_\lambda$  ipercubo aperto di lato  $\ell$  contenuto in  $\Omega$  con

$$(51) \quad a \leq |E_\lambda \cap Q_\lambda| \leq b \quad \forall \lambda \geq \lambda_0 .$$

Si scelgano  $A$  e  $p$  come nella dimostrazione del teorema a p. , ed applicando il precedente lemma, due sfere  $B_1 = B_1(x_\lambda)$ ,  $B_2 = B_2(x_\lambda)$  di raggio  $r = r(a, b, c, \ell, p, A)$  contenute in  $Q_\lambda$  e verificanti (48). Si procede ora come nella dimostrazione del teorema a pagina ma partendo, nel processo ricorsivo, dai valori  $a_0 = r/2$ ,  $b_0 = r$ . Si ottiene così la tesi con  $r_0 = r/2$ .

Dimostriamo ora il

*Teorema*

Sia  $V_0 \in (0, |\Omega|)$ , sia  $E_\lambda$  minimo di  $F_{\lambda, V_0}$  con

$$(52) \quad \lambda > \max \left\{ \lambda_0, \frac{n}{r_0} \right\}$$

dove  $\lambda_0, r_0$  sono come nel lemma precedente. Allora

$$|E_\lambda| = V_0.$$

*Dimostrazione.*

Supp.  $|E_\lambda| < V_0$ . Possiamo allora muovere la palla  $\tilde{B}_\lambda$  del lemma precedente, rimanendo sempre in  $\Omega$ , fino a raggiungere una nuova posizione  $\tilde{\tilde{B}}_\lambda$  tale che

$$|E_\lambda| < |E_\lambda \cup \tilde{\tilde{B}}_\lambda| \leq V_0 .$$

Dalla (10) a pagina si ha

$$F_{\lambda, V_0}(E_\lambda \cup \tilde{\tilde{B}}_\lambda) = F(E_\lambda \cup \tilde{\tilde{B}}_\lambda) + \lambda(V_0 - |E_\lambda \cup \tilde{\tilde{B}}_\lambda|) \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_{\Omega} |D\phi_{E_{\lambda}}| + \int_{\partial\Omega} |\phi_{E_{\lambda}} - \phi_{\Gamma}| dH_{n-1} + \\
 &+ \frac{n}{r_0} |B_{\lambda}^{\sim} - E_{\lambda}| + \lambda(v_0 - |E_{\lambda} \cup B_{\lambda}^{\sim}|) = \\
 &= F(E_{\lambda}) + \frac{n}{r_0} |B_{\lambda}^{\sim} - E_{\lambda}| + \lambda(v_0 - |E_{\lambda}|) - \lambda |B_{\lambda}^{\sim} - E_{\lambda}| = \\
 &= F_{\lambda, v_0}(E_{\lambda}) + \left(\frac{n}{r_0} - \lambda\right) |B_{\lambda}^{\sim} - E_{\lambda}| < F_{\lambda, v_0}(E_{\lambda}),
 \end{aligned}$$

contraddicendo così la scelta di  $E_{\lambda}$ .

Quindi  $|E_{\lambda}| \geq V_0$ .

Analogamente si dimostra che  $|E_{\lambda}| \leq V_0$ .

#### BIBLIOGRAFIA

- [ 1 ] BAROZZI, E. "Il problema di Plateau in domini illimitati". Rend. Sem. Mat. Univ. Padova (1983).
- [ 2 ] CONGEDO, G.-GONZALEZ, E.H.A. "Sul problema di Plateau con volume fissato. Quaderno N° 15, Lecce (1981).
- [ 3 ] DE GIORGI, E. "Frontiere orientate di misura minima". Sem. Mat. Scuola Norm. Sup. Pisa (1960-61).
- [ 4 ] DE GIORGI, E. "Sulla proprietà isoperimetrica della ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura minima. Mem. Acc. Naz. Lincei (1958).
- [ 5 ] FEDERER, H. "The singular sets of area minimizing..... Bull. A.M.S. (1970).
- [ 6 ] GIUSTI, E. "Boundary value problems for nonparametric surfaces of prescribed mean curvature", Ann.Sc.Norm.Sup. Pisa (1976).
- [ 7 ] GONZALEZ, E.H.A.-GRECO, G. "Una nuova dimostrazione della proprietà isoperimetrica dell'ipersfera, nella classe ..... Ann. Univ. Ferrara (1977).
- [ 8 ] GONZALEZ, E.H.A.-MASSARI, U.-TAMANINI, I. "On the regularity of boundaries of sets minimizing perimeter with a volume constraint". Indiana Univ. Math. J. (1983).