V

GENERATORI, MINIMALITÀ, INIZIALITÀ

Data una Σ-algebra e dei sottoinsiemi dei suoi domini, la generazione di tali sottoinsiemi nell'algebra data è costituita da tutti gli elementi ottenibili applicando in tutti i modi possibili le operazioni dell'algebra a partire dagli elementi dei sottoinsiemi.

Tale idea può precisarsi utilizzando i termini.

21.- DEFINIZIONE

Sia $\underline{\underline{A}} \in \Sigma$-alg e $B = (B_s \mid s \in \mathcal{S})$ una famiglia di insiemi tali che

$$B_s \subseteq A_s \qquad \forall s \in \mathcal{S}$$

Sia inoltre $W = (W_s \mid s \in \mathcal{S})$ una famiglia di variabili tale che

$$|B_s| = |W_s| \qquad \forall s \in \mathcal{S}$$

e $j = (j_s \mid s \in \mathcal{S})$ con $j_s \colon W_s \to B_s$, j_s biunivoca $\forall s \in \mathcal{S}$

diciamo allora <u>chiusura</u> di B in $\underline{\underline{A}}$ la famiglia

$$(B)_{\underline{\underline{A}}} = \left(((B)_{\underline{\underline{A}}})_s \mid s \in \mathcal{S} \right)$$

ove

$$((B)_{\underline{\underline{A}}})_s = \left\{ [\![t]\!]_{sj} \mid t \in T_{\Sigma}(W) \right\}$$

(cfr. convenzione 7.3 e definizione 17)

22.- TEOREMA

i) Su $(B)_{\underline{\underline{A}}}$ è definibile una sottoalgebra di $\underline{\underline{A}}$,

$(\underline{\underline{B}})_{\underline{\underline{A}}}$ è detta <u>sottoalgebra</u> di A <u>generata</u> da B.

ii) $(\underline{\underline{B}})_{\underline{\underline{A}}}$ è la minima (rispetto all'inclusione) sot= toalgebra di $\underline{\underline{A}}$ che include B

<u>Prova</u>

Basta verificare che la definizione sopra data di $(B)_{\underline{\underline{A}}}$ è equivalente alla richiesta delle seguenti condizioni $\forall s \in \mathcal{S}$:

o) $B_s \subset ((B)_{\underline{\underline{A}}})_s$

i) $x \in ((B)_{\underline{\underline{A}}})_u \quad , \sigma \in \Sigma_{u,s} \Rightarrow \sigma^A x \in ((B)_{\underline{\underline{A}}})_s$

23.- DEFINIZIONE

B dicesi un <u>sistema di generatori</u> per $\underline{\underline{A}}$ sse.

$$(\underline{\underline{B}})_{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{A}}$$

24.- ESEMPIO

L'algebra $(N,+,0,1)$ ha $\{0,1\}$ come sistema di generatori

25.- DEFINIZIONE

Data una segnatura Σ e delle variabili V definiamo <u>l'algebra dei termini</u> $\underline{\underline{T}}_{\Sigma}(V)$ ponendo

$$\underline{\underline{T}}_{\Sigma}(V) = \Big(((T_{\Sigma}(V))_s \mid s \in \mathcal{S}), (\sigma^T \mid \sigma \in \Sigma) \Big)$$

ove

i) $\sigma^T(t) = (\sigma\, t)$

$\forall\, u,s \in \mathcal{S}^{*}, \forall\, \sigma \in \Sigma_{u,s}\ , \forall\, t \in (T_{\Sigma}(V))_u$

ii) $\sigma^T = \sigma \qquad \forall\, s \in \mathcal{S}\ , \forall\, \sigma \in \Sigma_s$

ovvero i domini di $\underline{\underline{T}}_{\Sigma}(V)$ sono i termini su Σ e le variabili di V, mentre le operazioni di $\underline{\underline{T}}_{\Sigma}(V)$ si identificano con le operazioni di costruzione di liste con cui si ottengono i termini .

Osserviamo che le condizioni i), ii), iii) della def. 20, equivalgono ad affermare che g: $g(t) = [\![t]\!]_{\rho}$ è un morfismo da $\underline{\underline{T}}_{\Sigma}(V)$ in $\underline{\underline{A}}$ che estende ρ su tutti i termini. Inoltre g è unico poichè ogni altra g che verifica i), ii), iii), come si verifica semplicemente per induzione, coincide con g.

26.- DEFINIZIONE

Una algebra dicesi <u>minimale</u> se non contiene sottoalgebre proprie (diverse da se stessa) ovvero per il teorema precedente se é generata dalle costanti.

27.- COROLLARIO

Indichiamo con $\underline{\underline{T}}_{\Sigma}$ l'algebra di termini su Σ e su una famiglia vuota di variabili i.e. $V_s = \emptyset \ \forall s$, allora $\underline{\underline{T}}_{\Sigma}$ è minimale

<u>Prova</u>

E' evidente che $\underline{\underline{T}}_{\Sigma}$ è generata dalle costanti, quindi è minimale.

28.- OSSERVAZIONE

Se $\Sigma_s = \emptyset \quad \forall s \in \mathcal{S}$ allora $\underline{\underline{T}}_{\Sigma}$ ha tutti i domini vuoti. Poichè ammettere alcuni domini vuoti porterebbe noiose eccezioni nei teoremi che seguono noi supporremo che le segnature considerate d'ora innanzi siano tali che $\forall s \in \mathcal{S} \quad (T_{\Sigma})_s \neq \emptyset$

29.- TEOREMA

Se $\underline{\underline{A}} \in \Sigma$-alg allora $\underline{\underline{A}}$ è <u>immagine epimorfica</u> di $\underline{\underline{T}}_{\Sigma}(V)$ per un opportuno sistema V di variabili; ovvero per il teorema fondamentale del morfismo

$$\underline{\underline{A}} \cong T_{\Sigma}(V)/_{\theta}$$

per una opportuna congruenza θ ($\cong$ indica isomorfismo)

Prova

Sia $B = (B_s | s \in \mathcal{S})$ un sistema di generatori per $\underline{\underline{A}}$ tale sistema esiste sempre, al limite $B = A$, si ha quindi che

$$\underline{\underline{A}} = (\underline{\underline{B}})_{\underline{\underline{A}}}$$

Consideriamo quindi una famiglia di variabili $V = (V_s | s \in \mathcal{S})$ tale che

$$|V_s| = |B_s| \qquad \forall\, s \in \mathcal{S}$$

Sia j un assegnamento biunivoco tra V_s e B_s

$$g_s(t) = [\![t]\!]_{sj} \qquad \forall\, s \in \mathcal{S} \quad , \; t \in (T_{\Sigma}(V))_s$$

in base alla definizione di valutazione $[\![\;]\!]$ si verifica subito che

$$g = (g_s | s \in \mathcal{S})$$

è un morfismo da $\underline{\underline{T}}_{\Sigma}(V)$ in $\underline{\underline{A}}$, inoltre per definizione di chiusura g è anche surgettivo su $(B)_{\underline{\underline{A}}}$ e quindi su $\underline{\underline{A}}$, allora la congruenza θ dell'enunciato, per il teorema del morfismo è data dalla condizione:

$$t \; \theta \; t' \Leftrightarrow [\![t]\!]_j = [\![t']\!]_j$$

30.- DEFINIZIONE

Sia $\mathcal{C} \subseteq \Sigma$-alg, una algebra $\underline{\underline{I}}$ dicesi <u>iniziale</u> in $\mathcal{C}$ sse. $\underline{\underline{I}} \in \mathcal{C}$ e $\forall\, \underline{\underline{A}} \in \mathcal{C}$ esiste un unico Σ-morfismo da $\underline{\underline{I}}$ in $\underline{\underline{A}}$.

31.- TEOREMA

Se $\underline{\underline{I}}$ è iniziale in $\mathcal{C}$ allora $\underline{\underline{I}}$ è unica a meno di isomorfismi.

<u>Prova</u>

Supponiamo vi sia un'algebra $\underline{\underline{I}}'$ iniziale per $\mathcal{C}$ allora per la inizialità di I avremmo un unico morfismo

$$f : \underline{\underline{I}} \longrightarrow \underline{\underline{I}}'$$

e per quella di $\underline{\underline{I}}'$ un unico morfismo

$$g : \underline{\underline{I}}' \longrightarrow I$$

ma $g \circ f$ essendo composizione di morfismi è ancora un morfismo, allora $g \circ f : \underline{\underline{I}} \longrightarrow \underline{\underline{I}}$ deve coincidere con l'identità su I , essendo l'identità un morfismo ed es= sendoci per inizialità un tale morfismo tra $\underline{\underline{I}}$ e se stessa, quindi

$$g \circ f = i_A$$

cioè g ed f sono biunivoco, ovvero isomorfismi cioè

$\underline{\underline{I}}$ ed $\underline{\underline{I}}'$ sono algebre isomorfe.

32.- DEFINIZIONE

Se $\mathcal{C} \subseteq \Sigma$-alg , una algebra $\underline{\underline{F}} \in \mathcal{C}$ dicesi <u>finale</u> in $\mathcal{C}$ sse

$\forall\ \underline{\underline{A}} \in \mathcal{C}$ esiste un unico morfismo $f: \underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{F}}$

In modo analogo al teorema 31 si dimostra che un'algebra finale è unica a meno di isomorfismi

33.- TEOREMA

$$\underline{\underline{T}}_{\Sigma} \text{ è iniziale in } \Sigma\text{-alg}$$

<u>Prova</u>

Sia $\underline{\underline{A}} \in \Sigma$-alg , allora ogni morfismo da $\underline{\underline{T}}_{\Sigma}$ in $\underline{\underline{A}}$ deve verificare le condizioni

$$f(\sigma^{T}) = \sigma^{A} \qquad \forall\, \sigma \in \Sigma_{s}$$

$$f(\sigma^{T}x) = \sigma^{A}(fx) \quad \forall\, \sigma \in \Sigma_{u,s} \;,\; x \in (T_{\Sigma})_{u}$$

ma tali condizioni definiscono per induzione una funzione da T_{Σ} in A , ovvero vi è un unico morfismo da $\underline{\underline{T}}_{\Sigma}$ in $\underline{\underline{A}}$.

34.- TEOREMA

Se $\underline{\underline{A}}$ è minimale allora $\underline{\underline{A}} \cong \underline{\underline{T}}_{\Sigma}/_{\theta}$ per una opportuna congruenza θ

<u>Prova</u>

Infatti dato un morfismo f da $\underline{\underline{T}}_{\Sigma}$ in $\underline{\underline{A}}$ (che esiste ed è unico per la inizialità di $\underline{\underline{T}}_{\Sigma}$ in Σ-alg) per la minimalità di $\underline{\underline{A}}$ f deve essere surgettivo (altri= menti $\underline{\underline{A}}$ avrebbe sottoalgebre proprie) quindi per il teorema del morfismo

$$\underline{\underline{A}} \cong \underline{\underline{T}}_{\Sigma}/_{\varepsilon_f}$$

35.- OSSERVAZIONE

L'inizialità è uno strumento essenziale per la definizione di concetti algebrici.

Infatti un requisito fondamentale per essi è quel= lo di essere caratterizzati a meno di isomorfismi.

Non appena ci si assicura che essiste ed è inizia= le l'algebra verificante certe condizioni, allora si può assumere che dette condizioni costituiscono una buona definizione di algebra.

L'esempio più immediato al riguardo è l'algebra $\underline{\underline{T}}_{\Sigma}$ che è univocamente individuata dalla segnatura Σ in quanto algebra iniziale di Σ-alg .