e quindi $T':\varphi \to H'(\mathbb{C})$ è 1-1.

Come prima si vede che $T'\varphi$ è debolmente chiuso in $H'(\mathbb{C})$ e quindi che T è surgettivo. $\square$

3. RAPPRESENTAZIONI DI SPAZI DI FUNZIONI CONTINUE.

§1. Alcuni risultati classici.

Un vecchio problema lasciato aperto da Banach nel suo celebre trattato era il seguente:

E' vero che $C([0,1]\times[0,1])$ è isomorfo a $C([0,1])$?

E' da notare che Banach sapeva che non potevano essere isometrici perché aveva provato, nel caso $C(H)$ e $C(K)$ separabili (o equivalentemente H e K metrizzabili) il seguente teorema dovuto a M.H.Stone nella sua formulazione generale:

Teorema 3.1. (Banach-Stone)

Siano H e K spazi compatti; $C(H)$ è isometrico a $C(K)$ se e solo se H è omeomorfo a K.

La risposta a questo problema (affermativa) si è avuta oltre trent'anni dopo la sua formulazione, ed è contenuta nel famoso

Teorema 3.2 (Milutin).

Se K è un compatto metrico non numerabile, allora $C(K)$ è isomorfo a $C([0,1])$.

Segnaliamo che esiste una classificazione isomorfa di tutti gli spazi $C(K)$, con K compatto metrizzabile, per la quale rinviamo a Lindenstrauss e Tzafriri [14].

Nello studio degli spazi di funzioni continue, come si vedrà anche nel seguito, sono utili strumenti teoremi di estensione che siano legati alla struttura vettoriale degli spazi in oggetto: il teorema di Tietze è perciò inadeguato in quanto l'operatore di estensione che fornisce non è lineare.

Di grande utilità è invece il seguente teorema di estensione simultanea dovuto a Borsuk e Kakutani (cf. [14], [2] e [40]).

Teorema 3.3.

Sia K compatto, e $H \subset K$ chiuso e metrizzabile; esiste un operatore $T : C(H) \to C(K)$ tale che $(Tf)_{|H}=f \ \forall f \in C(H)$, $\|Tf\| = \|f\|$ e $T1_H = 1_K$ dove 1_H e 1_K sono rispettivamente l'identità di $C(H)$ e $C(K)$.

Una immediata conseguenza è il seguente utile

Corollario 3.4.

Nelle ipotesi del teorema 3.3, esiste un sottospazio E di $C(K)$ isometrico a $C(H)$ e complementato in $C(K)$ con proiezione di norma uno.

Dimostrazione.

Siano $T : C(H) \to C(K)$ l'operatore dato dal teorema 3.3, $R : C(K) \to C(H)$ operatore di restrizione, ed $E=T(C(H))$.

E è evidentemente isometrico a $C(H)$, e $P = TR$ è la proiezione cercata.

§2. Il metodo di decomposizione di Pełczyński.

Il metodo in esame è stato introdotto da Pełczyński in [19] per studiare una situazione di questo tipo:

Siano E ed F spazi di Banach (o, più in generale, slc), con E isomorfo ad un sottospazio complementato di F e F isomorfo ad un sottospazio complementato di E (scriveremo nel seguito $E < F$, $F < E$ rispettivamente):

in quali ipotesi su E ed F si può concludere che E ed F sono isomorfi?

Noi esporremo questo procedimento prima attraverso alcuni esempi, e poi nella formulazione astratta dovuta a D.Vogt [45].

Negli esempi che seguono supporremo di essere nella ipotesi del problema enunciato, con $E \simeq F \oplus F_0$, $F \simeq E \oplus E_0$.

Esempio 1.

Se $E \simeq E^2$ $(= E \oplus E)$ e $F \simeq F^2$ allora $E \simeq F$. Infatti

$$E \oplus F \simeq F \oplus F_0 \oplus F \simeq F \oplus F_0 \simeq E$$

$$E \oplus F \simeq E \oplus E \oplus E_0 \simeq E \oplus E_0 \simeq F$$

da cui $E \simeq F$.

Esempio 2.

Se $E \simeq (E \oplus E \oplus \ldots)_p$ $(1 \leq p \leq \infty$, oppure $p=0)$ allora $E \simeq F$.

Intanto, risulta $E \simeq E \oplus E$, e quindi come nell'esempio 1

$$E \oplus F \simeq F;$$

inoltre:

$$\begin{aligned} E \oplus F &\simeq (E \oplus E \oplus \ldots)_p \oplus F \simeq \\ &\simeq ((F \oplus F_o) \oplus (F \oplus F_o) + \ldots)_p \oplus F \simeq \\ &\simeq (F_o \oplus F_o \oplus \ldots)_p \oplus (F \oplus F \oplus \ldots)_p \oplus F \simeq \\ &\simeq (F_o \oplus F_o \oplus \ldots)_p \oplus (F \oplus F \oplus \ldots)_p \simeq \\ &\simeq ((F \oplus F_o) \oplus (F \oplus F_o) \oplus \ldots)_p \simeq (E \oplus E \oplus \ldots)p \simeq E. \end{aligned}$$

Quest'esempio è servito a Pełczyński (ed a Lindenstrauss nel caso di ℓ^∞) per provare che ogni sottospazio complementato di ℓ^p $(1 \leq p \leq \infty)$ e di c_o è isomorfo allo spazio stesso (notare che $\ell^p \simeq (\ell^p \oplus \ell^p \oplus \ldots)_p$ e $c_o \simeq (c_o \oplus c_o \oplus \ldots)_o$).

Esempio 3.

Siano E ed F slc e $E \simeq G^{\mathbb{N}}$, con G slc.

Allora $E \simeq F$. Infatti, come prima, $E \simeq E^2$, e quindi $E \oplus F \simeq F$. Inoltre:

$$E \oplus F \simeq G^{\mathbb{N}} \oplus F \simeq (G^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \oplus F \simeq (F \oplus F_o)^{\mathbb{N}} \oplus F \simeq F^{\mathbb{N}} \oplus F_o^{\mathbb{N}} \simeq (F \oplus F_o)^{\mathbb{N}} \simeq E^{\mathbb{N}} \simeq (G^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \simeq G^{\mathbb{N}} \simeq E.$$

Seguendo Vogt esponiamo ora la formulazione astratta del metodo di Pełczyński.

Sia A un'applicazione che assegna ad ogni slc E un altro slc AE, in modo che:

(i) $A(AE) \simeq AE \simeq E \oplus AE$

(ii) $A(E \oplus F) \simeq AE \oplus AF$.

Proposizione 3.5.

Siano E,F slc. Supponiamo che $AE<F$ e $F<AE$; allora $AE \simeq F$.

Dimostrazione.

Siano F_0, E_0 t.c. $AE \simeq F \oplus F_0$, $F \simeq AE \oplus E_0$, allora si ha

$$AE \simeq A(AE) \simeq A(F \oplus F_0) \simeq AF \oplus AF_0 \simeq F \oplus AF \oplus AF_0 \simeq F \oplus A(AE) \simeq F \oplus AE$$

ed anche

$$F \simeq AE + E_0 \simeq A(AE) \oplus E_0 \simeq A(AE \oplus E) \oplus E_0 \simeq A(AE) \oplus AE \oplus E_0 \simeq$$

$\simeq AE \oplus F$. □

Osserviamo che negli esempi precedenti l'applicazione A era:

$AE = E \oplus E$ nell'esempio 1,

$AE = (E \oplus E \oplus \ldots)_p$ nell'esempio 2,

$AE = E^{\mathbb{N}}$ nell'esempio 3,

e si supponeva $E \simeq AE$. Diamo altri esempi:

Esempio 4.

Se $AE = E^{(\mathbb{N})}$ la (i), (ii) si verificano facilmente.

Esempio 5.

Sia G uno slc tale che $G \simeq G \oplus \mathbb{K}$ e $G \simeq G \tilde{\otimes}_\alpha G$, con $\alpha = \varepsilon, \pi$; definiamo $AE = G \tilde{\otimes}_\alpha E$.

La verifica di (ii) è immediata tenendo conto delle proprietà del prodotto tensoriale. Proviamo (i):

$$A(AE) = G \tilde{\otimes}_\alpha (G \tilde{\otimes}_\alpha E) \simeq (G \tilde{\otimes}_\alpha G) \tilde{\otimes}_\alpha E \simeq G \tilde{\otimes}_\alpha E = AE$$

$$AE = G \tilde{\otimes}_\alpha E \simeq (G \tilde{\oplus} \mathbb{K}) \tilde{\otimes}_\alpha E \simeq G \tilde{\otimes}_\alpha E \oplus E = AE \oplus E \; . \quad \square$$

§3. Rappresentazione di $C(\Omega)$ e di $C_o(K)$.

Siano $K, \Omega \subset \mathbb{R}^n$, K compatto con interno non vuoto e $\Omega(\neq\emptyset)$ aperto, $C(\Omega)$ sarà lo spazio di Fréchet delle funzioni continue su Ω con la topologia della convergenza uniforme sui compatti, $C_o(K)$ lo spazio di Banach delle funzioni continue su $\mathbb{R}^n$ e a supporto contenuto in K con la norma del sup.

In questo paragrafo proveremo i seguenti risultati (dovuti a M.Valdivia (cf. [40],[37]).

Teorema 3.6

$$C_o(K) \simeq C([0,1]).$$

Teorema 3.7

$$C(\Omega) \simeq C([0,1])^{\mathbb{N}}.$$

Alla dimostrazione è necessario premettere i seguenti lemmi.

Lemma 3.8

(i) $C([0,1]) \simeq C([0,1]) \oplus \mathbb{K}$

(ii) $C([0,1]) \simeq C([0,1]) \tilde{\otimes}_{\varepsilon} C([0,1])$

Dimostrazione.

(i)Per H e K compatti l'applicazione $T : C(K) \oplus C(H) \to C(K \dot{\cup} H)$ ($\dot{\cup}$ = unione disgiunta) definita da

$$T(f,g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in K \\ g(x) & \text{se} \quad x \in H \end{cases}$$

è un isometria fra gli spazi indicati.

Se $K = [0,1]$ e H è un punto per il teorema di Milutin si ha la (i).

(ii) Per il teorema di Milutin è sufficiente provare che

$$C([0,1] \times [0,1]) \simeq C([0,1]) \tilde{\otimes}_{\varepsilon} C([0,1]).$$

Dimostriamo più in generale che

$$C(H \times K) \equiv C(H) \tilde{\otimes}_{\varepsilon} C(K) \qquad \text{H e K compatti.}$$

Posto per $z = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i \in C(H) \otimes_{\varepsilon} C(K)$,

$$Tz(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y) \in C(H \times K).$$

Tz non dipende dalla rappresentazione di z e T è un'isometria; infatti:

$$\varepsilon(z) = \sup_{\|\mu\|=\|\nu\|=1} \left| \sum_{i=1}^{n} <f_i,\mu><g_i,\nu> \right| =$$

$$= \sup_{\|\mu\|=\|\nu\|=1} \left| \sum_{i=1}^{n} \int_H f_i d\mu \int_K g_i d\nu \right| =$$

$$= \sup_{\|\mu\|=\|\nu\|=1} \left| \int_{HxK} \sum_{i=1}^{n} f_i \; g_i d(\mu \otimes \nu) \right| \leq$$

$$\leq \sup_{(x,y)\in HxK} \left| \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y) \right| ;$$

d'altra parte

$$\sup_{(x,y)\in HxK} \left| \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y) \right| =$$

$$\sup_{(x,y)\in HxK} \left| \sum_{i=1}^{n} <f_i,\delta_x><g_i,\delta_y> \right| \leq \varepsilon(z)$$

poiché $\|\delta_x\| = \|\delta_y\| = 1.$

Allora a meno di isometrie $C(H) \otimes_\varepsilon C(K)$ è denso in $C(HxK)$ per il teorema di Stone-Weierstrass e quindi il suo completamento $C(H) \tilde{\otimes}_\varepsilon C(K)$ è $C(HxK)$.

Lemma 3.9.

Sia $\emptyset \neq \Omega \subset R^n$ aperto. Esiste un ricoprimento di Ω di scatole compatte che subordina una partizione dell'unità di classe C^∞.

Dimostrazione.

Sia (K_j) una successione di compatti invadenti Ω tali che $\emptyset \neq \mathring{K}_j \subset K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ $\forall j$. Ricopriamo K_1 con un numero finito di scatole $\{M_1^{(1)},\dots M_{m_1}^{(1)}\}$ contenute in $\mathring{K}_2$, prendendo per ogni $x \in K_1$ una scatola $M_x \subset \mathring{K}_2$ ed estraendo poi un ricoprimento finito di K_1. Allo stesso modo, per $j \geq 2$, ricopriamo $K_j \setminus \mathring{K}_{j-1}$ con un numero finito di scatole $\{M_1^{(j)},\dots,M_{m_j}^{(j)}\}$ contenute in K_{j+1}.

La famiglia $(M_i^{(j)})$ è localmente finita e quindi si può costruire in modo standard una partizione dell'unità di classe C^∞ ad essa subordinata. $\square$

Dimostrazione del teorema 3.6.

Per il lemma 3.8 si può applicare il metodo di decomposizione di Pełczyński come nell'esempio 5; basta quindi provare che $C([0,1]) < C_0(K)$ e $C_0(K) < C([0,1])$.

Sia P una scatola compatta di R^n che contiene K, e poniamo $M = P \setminus \mathring{K}$. Se T è l'operatore di estensione fornito dal Teorema di Borsuk, $T : C(M) \to C(P)$, proviamo che si ha $C(P) = T(C(M)) \oplus C_0(K)$.

Infatti se $f \in C_0(K) \cap T(C(M))$, $f_{|M} = 0$ ed $f = T(f_{|M}) = 0$ per la linearità di T; ne segue che $C_0(K) \cap T(C(M)) = \{0\}$. Inoltre, se $f \in C(P)$, $f = T(f_{|M}) + (f - T(f_{|M}))$, con $T(f_{|M}) \in T(C(M))$ e $(f - T(f_{|M})) \in C_0(K)$. Quindi $C_0(K) < C([0,1]) \simeq C(P)$.

Sia ora $Q \neq \emptyset$ una scatola chiusa contenuta in $\overset{\circ}{K}$ e $\psi \in C_0(K)$ una funzione che vale 1 su Q, ($\|\psi\| = 1$); tramite il teorema di Borsuk si costruisce immediatamente un operatore di estensione isometrico S da $C(Q)$ in $C_0(K)$. Se allora $R : C_0(K) \to C(Q)$ è l'operatore restrizione si ha

$$I_{C(Q)} = RS,$$

e quindi $P = SR$ è proiezione di $C_0(K)$ su $C(Q) \simeq C([0,1])$.

Dimostrazione del teorema 3.7.

In virtù della Proposizione 3.5 con $AE = E^{\mathbb{N}}$, è sufficiente provare che $C(\Omega) < C([0,1])^{\mathbb{N}}$ e che $C([0,1])^{\mathbb{N}} < C(\Omega)$.

Siano $\mathcal{M} = (M_i)$ come nel Lemma 3.9 e (ψ_i) una partizione dell'unità ad essa subordinata. Definiamo gli operatori

$$R : C(\Omega) \to \prod_{i=1}^{\infty} C(M_i)$$

$$Rf = (f_{|M_i})_i$$

e

$$T : \prod_{i=1}^{\infty} C(M_i) \to C(\Omega)$$

$$T(f_i)_i = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i f_i$$

evidentemente $TR = I_{C(\Omega)}$, e quindi, al solito, $C(\Omega) < \prod_{i=1}^{\infty} C(M_i)$ che è isomorfo a $C([0,1])^{\mathbb{N}}$ per il Teorema di Milutin.

Per dimostrare l'altra relazione siano (N_i) e (P_i) due successioni di scatole compatte contenute in Ω e tali che $N_i \subset \mathring{P}_i$ $\forall i$, $P_i \cap P_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$, e siano (η_i) funzioni tali che $\eta_i \in C_0(P_i)$, $\eta_i = 1$ in N_i $\|\eta_i\| = 1$, $\forall i$.

Definiamo gli operatori

$$S : \prod_{i=1}^{\infty} C(N_i) \to C(\Omega)$$

$$S(f_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \tilde{f}_i ,$$

dove $\tilde{f}_i \in C(P_i)$ sono le estensioni date dal teorema di Borsuk e

$$R : C(\Omega) \to \prod_{i=1}^{\infty} C(N_i)$$

$$Rf = (f_{|N_i}) .$$

Ancora una volta si ha $RS = I_{\prod_{i=1}^{\infty} C(N_i)}$ e pertanto $C([0,1])^{\mathbb{N}} \simeq$

$\simeq \prod_{i=1}^{\infty} C(N_i) < C(\Omega)$. $\square$

Dalle proprietà generali dei duali di prodotti topologici, essendo $\mathcal{M}(\Omega) = C(\Omega)'$ e $\mathcal{M}([0,1]) = C([0,1])'$, segue

Corollario 3.10

$$\mathcal{M}(\Omega) \simeq \mathcal{M}([0,1])^{(\mathbb{N})} .$$

I risultati mostrati in questo paragrafo possono essere generalizzati nel caso che Ω sia aperto di uno spazio topologico più generale, utilizzando tecniche analoghe a quelle viste qui. Per questi sviluppi confronta [40], [37] e [38].

4. RAPPRESENTAZIONI DI SPAZI DI FUNZIONI INFINITAMENTE DIFFERENZIABILI E DI DISTRIBUZIONI.

§1. Spazi di successioni.

Esporremo rappresentazioni degli spazi $C^{\infty}_{2\pi}$, $C^{\infty}([0,1])$, $H(\mathbb{C})$, $H(D)$, $\mathscr{D}(K)$, $\mathscr{D}(\Omega)$, $\mathscr{D}'(\Omega)$, $\mathscr{E}(\Omega)$, $\mathscr{E}'(\Omega)$ tramite spazi di successioni. Perciò richiamiamo brevemente gli aspetti fondamentali della teoria di questa spazi (cf. [12], [25]).

Uno spazio vettoriale λ t.c. $\varphi \subset \lambda \subset \omega$, si dirà spazio di successioni. Il suo duale di Köthe $\lambda^{\times}$ è definito da $\lambda^{\times} = \{\alpha \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \alpha_n| < \infty \ \forall \xi \in \lambda\}$, ed è anch'esso ovviamente uno spazio di successioni. la dualità $\langle \xi, \alpha \rangle = \sum_n \xi_n \alpha_n$ induce in modo naturale la topologia debole $\sigma(\lambda, \lambda^{\times})$ su λ; più utile nel seguito sarà però la topologia $\nu(\lambda, \lambda^{\times})$, che chiameremo normale, definita dalla famiglia di seminorme

$$p_{\alpha}(\xi) \equiv \sum_n |\xi_n \alpha_n| \qquad \alpha \in \lambda^{\times} .$$

Osserviamo che il completamento di $\lambda[\nu]$ è $\lambda^{\times\times}$ e che φ è denso in $\lambda[\nu]$. Inoltre ν è compatibile con la dualità $\langle \lambda, \lambda^{\times} \rangle : \lambda^{\times} \subset \lambda'$ perché, dato $\alpha \in \lambda^{\times}$, $\langle \xi, \alpha \rangle = \sum_n \xi_n \alpha_n$ definisce un funzionale continuo, essendo $|\langle \xi, \alpha \rangle| \leq \sum_n |\xi_n \alpha_n| = p_{\alpha}(\xi)$; d'altra parte, se $f \in \lambda'$, esistono p_{α} ed $\varepsilon > 0$ tali che $p_{\alpha}(\xi) \leq \varepsilon \Rightarrow |f(\xi)| \leq 1$;