1. RICHIAMI DELLA TEORIA GLI SPAZI LOCALMENTE CONVESSI.

Per comodità di lettura raccogliamo alcuni argomenti ben noti della teoria degli slc in modo da fissare la notazione. Per trattazioni esaurienti e per le dimostrazioni rimandiamo ai trattati classici citati in bibliografia.

§1. Richiami di teoria della dualità.

Sia $\langle E,F\rangle$ una coppia duale di spazi vettoriali: indicheremo con $\sigma(E,F)$ la topologia indotta su E dalla topologia prodotto in $\mathbb{K}^F$. Ricordiamo che $\sigma(E,F)$ è la topologia localmente convessa più debole su E per cui F è il suo duale topologico.

Se U è un sottoinsieme di E indicheremo con U^o (il polare di U) il sottoinsieme di F così definito:

$$U^o = \{y \in F : |\langle x,y\rangle| \leq 1 \quad \forall x \in U\} .$$

Ricordiamo che U^o è assolutamente convesso e debolmente chiuso e che se U è a sua volta assolutamente convesso e debolmente chiuso allora $U^{oo} \equiv (U^o)^o = U$.

Se E è slc, c'è una dualità naturale $\langle E,E'\rangle$, dove E' è il duale topologico di E. Notiamo che se la topologia su E è la più forte topologia localmente convessa, cioé quella i cui intorni sono tutti gli insiemi assolutamente convessi e assorbenti (la indicheremo con $\mathscr{L}$) allora $E'=E^*$.

Un insieme $H \subset E'$ si dice equicontinuo se è contenuto nel polare di un intorno.

Sarà utile nel seguito il seguente classico

Teorema 1.1. (Alaoglu-Bourbaki).

Se U è intorno in E slc, allora $U^o \subset E'$ è $\sigma(E',E)$ compatto

Descriviamo una tecnica usuale per definire differenti topologie su E ed F, una volta che siano state introdotte le topologie deboli. Si dice bornologia su E (relativa alla dualità $\langle E,F\rangle$) una famiglia $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi $\sigma(E,F)$-limitati tali che:

(i) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Longrightarrow \exists B \in \mathcal{B} : B_1 \cup B_2 \subset B$;

(ii) $B \in \mathcal{B}, \rho \in \mathbb{K} \Longrightarrow \exists C \in \mathcal{B} : \rho B \subset C$;

(iii) $\mathrm{span}\{\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B\}$ è $\sigma(E,F)$ denso in E.

Data una bornologia $\mathcal{B}$ su E, si definisce una topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ localmente convessa su F prendendo come intorni in F i polari degli elementi di $\mathcal{B}$. Osserviamo esplicitamente che tale topologia è quella della convergenza uniforme sugli elementi di $\mathcal{B}$.

Esempi. Sia E slc e consideriamo la dualità $\langle E,E'\rangle$.

1. Se $\mathcal{B}$ è la famiglia di tutti i sottoinsiemi finiti di E', $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ coincide con $\sigma(E,E')$.

2. Se $\mathcal{B}$ è la famiglia degli insiemi precompatti di E (o compatti) $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ è la topologia su E' della convergenza uniforme sui precompatti (compatti) di E e sarà denotata con $\mathcal{T}_{pc}(E',E)$

($\mathcal{T}_c(E',E)$).

3. Se $\mathcal{B}$ è la famiglia degli insiemi assolutamente convessi e $\sigma(E',E)$-compatti in E', $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ sarà denotata con $\mu(E,E')$ (topologia di Mackey su E) ed è la topologia localmente convessa più forte per cui il duale topologico di E è E'.

4. Se $\mathcal{B}$ è la famiglia di tutti gli insiemi $\sigma(E',E)$-limitati di E', $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ è la topologia forte su E e sarà indicata $\beta(E,E')$.

E' ovvio che negli esempi precedenti si possono scambiare E ed E'.

Non è difficile convincersi che la topologia debole si conserva passando ai sottospazi ed ai quozienti, e che la topologia di Mackey si conserva passando ai quozienti. Invece la topologia μ non si conserva in generale per restrizione ai sottospazi; infine, la topologia forte in generale non si mantiene né per passaggio ai quozienti né per passaggio a sottospazi.

Dualità di operatori.

Sia T un operatore debolmente continuo fra due slc E ed F. Si definisce l'operatore aggiunto $T':F' \to E'$ tramite l'equazione

$$\langle x, T'y' \rangle = \langle Tx, y' \rangle \quad \forall x \in E,\ \forall y' \in F'.$$

T' risulta debolmente continuo e valgono le seguenti relazioni:

$$\text{Ker } T' = [T(E)]^0$$

$$\text{Ker } T = [T'(F')]^0 ,$$

da cui si deduce, per esempio, che T' è 1-1 se e solo se T(E) è denso in F. Nel seguito useremo il seguente

Teorema 1.2 del rango chiuso.

Se E ed F sono spazi di Fréchet e $T:E \to F$ è continuo, sono equivalenti:

(i) T(E) è chiuso in F

(ii) T'(F') è $\sigma(E',E)$ chiuso in E'.

In generale questo teorema non vale in slc. E' invece generale il seguente

Teorema 1.3 di omomorfismo debole.

$$E,F \text{ slc}, \; T : E \to F ;$$

T'(F') è $\sigma(E',E)$ chiuso se e solo se T è omomorfismo debole.

E' interessante anche sapere quando un operatore $T:E \to F$ debolmente continuo resta continuo rafforzando le topologie di E e di F.

Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono bornologie in E' ed F' si ha che T è $E[\mathcal{T}_{\mathcal{B}}]$-$F[\mathcal{T}_{\mathcal{C}}]$ continuo se e solo se $T'(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{B}$, come si verifica con un calcolo standard per polarità (cf. per esempio il

Lemma 2.9). In particolare se T è debolmente continuo, è anche fortemente continuo e Mackey continuo.

Da ciò si deduce la seguente

Proposizione 1.4

Se $T : E \to F$ è omomorfismo debole e $T(E) = F$ allora è anche omomorfismo per le topologie di Mackey.

§2. Limiti induttivi di slc.

Ci limiteremo a ricordare i fatti essenziali della teoria dei limiti induttivi stretti di slc.

Sia $E_n[\mathcal{T}_n]$ una successione di slc tali che $E_n \subsetneq E_{n+1}$ $\forall n$, e che la topologia $\mathcal{T}_{n+1}$ ristretta ~~ad~~ E_n coincida con $\mathcal{T}_n$. Posto $E = \bigcup_n E_n$, E è ovviamente uno spazio vettoriale; definiamo una topologia $\mathcal{T}$ (localmente convessa) su E come segue:

$U \subset E$ assolutamente convesso è intorno in $\mathcal{T}$ se e solo se $U \cap E_n$ è intorno in E_n per ogni n.

Notiamo che $\mathcal{T}$ è la topologia localmente convessa più fine su E per cui tutte le inclusioni $j_n : E_n \to E$ risultano continue. Si verifica facilmente che un operatore T definito su E è $\mathcal{T}$-continuo se e solo se $T \circ j_n$ é continuo su E_n per ogni n. Lo spazio $E[\mathcal{T}]$ si dice limite induttivo stretto degli slc E_n, e la successione E_n si dice una successione di definizione di E. Si può provare che la topologia indotta da E su ogni E_n coincide con $\mathcal{T}_n$ e che se ogni E_n è chiuso in E_{n+1} (e.g.

se ogni E_n è completo) allora un insieme $B \subset E$ è limitato se e solo se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $B \subset E_n$ ed è ivi limitato; inoltre se ogni E_n è completo anche E è completo.

Se tutti gli E_n sono spazi di Fréchet allora E si dice spazio (LF)-stretto. Osserviamo che ogni spazio (LF)-stretto E è di prima categoria; infatti $E = \bigcup_n E_n$, e se fosse di seconda categoria uno degli E_n - sia E_{n_o} - conterrebbe un aperto, e quindi sarebbe $E = E_{n_o}$, contro l'ipotesi che la successione E_n sia strettamente crescente. Ne segue che E non è metrizzabile.

Per esempio, lo spazio $\mathscr{D}(\Omega)$ è limite induttivo stretto degli spazi di Fréchet $\mathscr{D}(K_j)$, dove K_j è una successione strettamente crescente di compatti invadenti Ω .

§3. Prodotti e somme dirette.

Sia $(E_\alpha[\mathscr{T}_\alpha])_{\alpha \in A}$ una famiglia di slc; indicheremo con $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha$ lo spazio (localmente convesso) prodotto topologico degli E_α .

Indicheremo con $\bigoplus_{\alpha \in A} E_\alpha$ (somma diretta degli E_α) il sottospazio lineare di $\prod_\alpha E_\alpha$ degli $x = (x_\alpha)$ tali che $x_\alpha \neq 0$ per un numero finito di indici. Su $\bigoplus_\alpha E_\alpha$ si può considerare la topologia indotta da $\prod_\alpha E_\alpha$, ma più frequentemente esso si dota della topologia localmente convessa $\bigoplus_\alpha \mathscr{T}_\alpha$, la più fine per cui ogni iniezione canonica $j_\alpha: E_\alpha \to \bigoplus_\alpha E_\alpha$ è continua.

Tale topologia è più fine della topologia prodotto e si chiama topologia somma diretta.

Questa è la topologia che useremo tacitamente nel seguito.

Osserviamo che una base d'intorni per $\bigoplus_\alpha \mathcal{T}_\alpha$ in $E=\bigoplus_\alpha E_\alpha$ è data dalla famiglia $\{\Gamma_\alpha U_{\alpha\beta}\}_\beta$, dove $\{U_{\alpha\beta}\}_\beta$ percorre una base d'intorni in E_α; ne segue che la topologia indotta da $\bigoplus_\alpha \mathcal{T}_\alpha$ su E_α coincide con $\mathcal{T}_\alpha$.

Se $\mathbb{A} = \mathbb{N}$ e $E_n = E$ per ogni n useremo le seguenti notazioni:

$$E^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$$

$$E^{(\mathbb{N})} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n \quad .$$

Osserviamo che se $\mathbb{A}$ è finito allora $\prod_\alpha E_\alpha$ coincide algebricamente e topologicamente con $\bigoplus_\alpha E_\alpha$; perciò in tal caso, useremo indistintamente i due simboli. In particolare $E^2 = E\times E = E\oplus E$.

Notiamo anche che un operatore $T: F \to \prod_\alpha E_\alpha$ (F slc) è continuo se e solo se $p_\alpha \circ T : F \to E_\alpha$ è continuo $\forall \alpha$, p_α essendo la proiezione canonica su E_α; analogamente $T: \bigoplus_\alpha E_\alpha \to F$ è continua se e solo se $T \circ j_\alpha: E_\alpha \to F$ è continuo $\forall\alpha$.

Mostriamo come sono fatti gli insiemi limitati in $E=\bigoplus_\alpha E_\alpha$; sia $B \subset E$ limitato e supponiamo che esistano infiniti indici (basta considerare il caso numerabile) per cui $B_n = q_n(B) \neq \{0\}$ (q_n proiezione di E su E_{α_n}); se allora $0 \neq x_n \in B_n$, esiste U_n intorno in E_{α_n} tale che $\frac{1}{n} x_n \notin U_n$; ne segue che $(x_n)_n \subset B$ non è assorbito dall'intorno $\Gamma_n U_n$, contro l'ipotesi che B sia limitato. Pertanto gli insiemi limitati di E sono contenuti in insiemi del tipo $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} B_{\alpha_i}$, B_{α_i} limitato in E_{α_i}.

Dualità tra prodotti e somme dirette.

Sono facili da vedere gli isomorfismi algebrici tra $(\prod_\alpha E_\alpha)'$ e $\oplus_\alpha E'_\alpha$, e tra $(\oplus_\alpha E_\alpha)'$ e $\prod_\alpha E'_\alpha$.

E' interessante vedere quando tali isomorfismi sono topologici. Sia $(\mathcal{B}_\alpha)$ bornologia su E_α; e siano $\mathcal{B} = \prod_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ e $\mathcal{B}' = \oplus_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ rispettivamente, le bornologie prodotto su $\prod_\alpha E_\alpha$, e somma su $\oplus_\alpha E_\alpha$, i cui elementi sono del tipo:

$$\mathcal{B} \ni B = \prod_\alpha B_\alpha, \quad B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha ,$$
$$\mathcal{B}' \ni B' = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} B_{\alpha_i} , \quad B_{\alpha_i} \in \mathcal{B}_{\alpha_i} .$$

Si verifica con un calcolo per polarità che la topologia $\mathcal{T}_\mathcal{B}$ su $\oplus_\alpha E'_\alpha$ è la topologia somma diretta $\oplus_\alpha \mathcal{T}_{\mathcal{B}_\alpha}$ e analogamente che $\mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ su $\prod_\alpha E'_\alpha$ coincide con la topologia prodotto delle $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_\alpha}$.

Tenendo conto dei legami tra le famiglie di insiemi limitati, debolmente compatti e finiti in $\oplus_\alpha E_\alpha$, $\prod_\alpha E_\alpha$ e nei singoli E_α si deducono le seguenti eguaglianze:

$$\beta(\prod_\alpha E'_\alpha , \oplus_\alpha E_\alpha) = \prod_\alpha \beta(E'_\alpha , E_\alpha)$$
$$\mu(\prod_\alpha E'_\alpha , \oplus_\alpha E_\alpha) = \prod_\alpha \mu(E'_\alpha , E_\alpha)$$
$$\sigma(\prod_\alpha E'_\alpha , \oplus_\alpha E_\alpha) = \prod_\alpha \sigma(E'_\alpha , E_\alpha)$$

$$\beta(\bigoplus_{\alpha} E'_{\alpha} \;, \prod_{\alpha} E_{\alpha}) = \bigoplus_{\alpha} \beta(E'_{\alpha} \;, E_{\alpha})$$

$$\mu(\bigoplus_{\alpha} E'_{\alpha} \;, \prod_{\alpha} E_{\alpha}) = \bigoplus_{\alpha} \mu(E'_{\alpha} \;, E_{\alpha}) \quad .$$

E' da notare che l'uguaglianza

$$\sigma(\bigoplus_{\alpha} E'_{\alpha}, \prod_{\alpha} E_{\alpha}) = \bigoplus_{\alpha} \sigma(E'_{\alpha} \;, E_{\alpha})$$

vale se e solo se $\mathbb{A}$ è finito; infatti altrimenti il prodotto delle bornologie degli insiemi finiti non è la bornologia degli insiemi finiti sul prodotto.

§4. Prodotti tensoriali

Nozione algebrica.

La nozione algebrica di prodotto tensoriale tra spazi vettoriali è stata introdotta per studiare applicazioni bilineari: infatti ogni applicazione bilineare sul prodotto di due spazi vettoriali si può leggere come applicazione lineare sul loro prodotto tensoriale.

Il primo esempio di applicazione dei prodotti tensoriali nello studio di problemi di analisi funzionale è dovuto a Schatten [27] che introduce il prodotto tensoriale di due spazi di Hilbert.

Lo studio sistematico di "buone topologie" sul prodotto tensoriale di slc è intrapreso, però, solo nel 1955 con la fondamentale tesi di Grothentieck [9] nella quale è messa in luce l'importanza dei prodotti tensoriali praticamente in tutti i campi dell'analisi funzionale.

Siano E,F spazi vettoriali: denotiamo con $B(E,F)$ lo spazio delle forme bilineari definite su $E\times F$ e con $B^*(E,F)$ il suo duale algebrico. Consideriamo l'applicazione bilineare:

$$\otimes : E \times F \to B^*(E,F)$$

così definita:

$$\otimes(x,y)(b) = b(x,y) \qquad \forall b \in B(E,F) .$$

Posto $x\otimes y = \otimes(x,y)$, denoteremo con $E\otimes F$ l'inviluppo lineare dell' immagine dell'applicazione $\otimes$ in $B^*(E,F)$. Notiamo che se $(e_i)_{i\in I}$ e $(f_j)_{j\in J}$ sono basi di Hamel per E ed F rispettivamente, allora $(e_i \otimes f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ è base di Hamel per $E\otimes F$. Inoltre valgono le seguenti relazioni:

$$E \otimes F \simeq F \otimes E$$
$$E \otimes (F\otimes G) \simeq (E\otimes F)\otimes G$$
$$E \otimes (F\times G) \simeq (E\otimes F) \times (E\otimes G)$$
$$E \otimes \mathbb{K} \simeq E .$$

dove $\simeq$ denota isomorfismo algebrico.

Sia ora $T\in L(E\otimes F,G)$; poniamo $\tilde{T} = T\circ\otimes$; $\tilde{T}\in B(E,F;G)$ (spazio delle funzioni bilineari da $E\times F$ in G). L'applicazione $T\mapsto\tilde{T}$ è lineare e bigettiva, e l'inversa $\tilde{T}\mapsto T$ è data da:

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{T}(x_i,y_i).$$

Gli spazi $L(E\otimes F,G)$ e $B(E,F;G)$ sono allora algebricamente isomorfi.

In particolare, se $G=\mathbb{K}$ si ha $(E\otimes F)^* = B(E,F)$.

Consideriamo ora l'applicazione

$$\chi: E^* \otimes F \to L(E,F)$$

così definita:

$$\chi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i^* \rangle y_i;$$

essa induce un isomorfismo algebrico tra $E^*\otimes F$ e il sottospazio degli operatori di rango finito in $L(E,F)$.

Definiamo infine il prodotto tensoriale di due applicazioni: se $T_1 \in L(E_1,F_1)$, $T_2 \in L(E_2,F_2)$ sia

$$T_1 \otimes T_2 : E_1 \otimes E_2 \to F_1 \otimes F_2$$

così definita:

$$(T_1 \otimes T_2)(x \otimes y) = (T_1 x) \otimes (T_2 y)$$

estesa per linearità a tutto $E_1\otimes E_2$; evidentemente $T_1\otimes T_2 \in L(E_1\otimes E_2, F_1\otimes F_2)$ ed è il prodotto tensoriale di T_1 e T_2.

Prodotto tensoriale proiettivo di slc.

Siano ora E ed F slc; denotiamo con $E\otimes_\pi F$ (prodotto tensoriale proiettivo di E ed F) il prodotto tensoriale $E\otimes F$ munito della topologia localmente convessa più fine per cui l'applicazione $\otimes$ è continua. Se U è intorno in E e V è intorno in

F, posto $U\otimes V=\otimes(U\times V)$, proviamo che la famiglia $\mathscr{W} = \{\Gamma(U\otimes V)\}$, al variare di U e V in due basi d'intorni in E ed F rispettivamente, è base d'intorni in $E\otimes_\pi F$.

$W = \Gamma(U\otimes V)$ è assorbente; infatti, sia $z\in E\otimes F$, $z=\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i$; poiché U e V sono assorbenti, esistono $\lambda_i, \mu_i>0$ tali che

$$x_i \in\lambda_i U,\ y_i\in\mu_i \qquad \forall i=1,\dots,n;$$

ne segue

$$(*) \qquad z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i \left(\frac{x_i}{\lambda_i}\right) \otimes \left(\frac{y_i}{\mu_i}\right) \in \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i\right)W.$$

E' chiaro inoltre che $\mathscr{W}$ è base di filtro, poiché $\Gamma(U_1\otimes V_1)\cap\Gamma(U_2\otimes V_2) \supset \Gamma((U_1\cap U_2)\otimes(V_1\cap V_2))$ e quindi definisce una topologia su $E\otimes F$; per come è definita essa è evidentemente la più fine per cui $\otimes$ è continua, e quindi è la topologia proiettiva su $E\otimes F$.

Osserviamo che se E ed F sono metrizzabili allora anche $E\otimes_\pi F$ è metrizzabile perché prendendo basi d'intorni numerabili in E ed F $\mathscr{W}$ risulta anch'essa numerabile.

Con un rapido calcolo si verifica la seguente relazione fra i funzionali di Minkowski associati a U,V e $W=\Gamma(U\otimes V)$:

$$p_W(z) = \inf\{\sum_{i=1}^{n} p_U(x_i)p_V(y_i)\},$$

dove l'inf è su tutte le rappresentazioni di $z=\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i$.

Ne segue subito che se E,F sono spazi normati allora anche $E\otimes_\pi F$ è spazio normato con norma

$$\|z\| = \inf\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \ \|y_i\|\} \quad .$$

L'isomorfismo algebrico tra $L(E\otimes F,G)$ e $B(E,F;G)$ ristretto a $\mathscr{L}(E\otimes_\pi F,G)$ è un isomorfismo algebrico su $\mathscr{B}(E,F;G)$. Infatti $\tilde{T} = T\circ\otimes$ è continua su $E\times F$ per composizione; viceversa, se $b \in \mathscr{B}(E,F;G)$ e T è definita da $T(\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i) = \sum_{i=1}^{n} b(x_i,y_i)$ allora $\tilde{T}=b$, e T è continua su $E\otimes_\pi F$; per provarlo, sia W intorno (assolutamente convesso) in G: esistono U,V intorni in E ed F tali che $b(U\times V) \subset W$; per come è definito T ne segue $T(\Gamma(U\otimes V)) \subset W$, cioé la continuità di T. In particolare, se $G=\mathbb{K}$ si ottiene $(E\otimes_\pi F)' \simeq \mathscr{B}(E,F)$ algebricamente.

In generale, $E\otimes_\pi F$ non è completo anche se E ed F lo sono; $E\tilde{\otimes}_\pi F$ denoterà il suo completamento.

Prodotto tensoriale iniettivo di slc.

Siano E,F slc; consideriamo l'applicazione:

$$\chi : E \otimes F \to \mathscr{L}(E'_\sigma ,F)$$

(dove $E'_\sigma = E'[\sigma(E',E)]$) definita da

$$\chi(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i)(x') = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i,x'\rangle\, y_i \qquad \forall x'\in E';$$

essa è isomorfismo algebrico sul sottospazio $\mathscr{F}(E'_\sigma ,F)$ di $\mathscr{L}(E'_\sigma ,F)$ degli operatori di rango finito.

Introduciamo su $\mathscr{L}(E'_\sigma, F)$ la topologia $\mathcal{T}_\varepsilon$ della convergenza uniforme sugli insiemi equicontinui di E'; una base d'intorni per $\mathcal{T}_\varepsilon$ è data da:

$$W_{U,V} = \{T \in \mathscr{L}(E'_\sigma, F) : T(U^0) \subset V\},$$

quando U e V variano in basi d'intorno di E ed F.

$E \otimes F$, munito della topologia $\mathcal{T}_\varepsilon$ indotta tramite χ, è il prodotto tensoriale iniettivo di E ed F e verrà indicato con $E \otimes_\varepsilon F$. Si vede facilmente che le seminorme che definiscono la topologia in $E \otimes_\varepsilon F$ sono date da:

$$\varepsilon_{U,V}(z) = \sup\{|\sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x'\rangle \langle y_i, y'\rangle| ; x' \in U^0, y' \in V^0\},$$

per $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$.

Facciamo notare che se E,F sono metrizzabili allora anche $E \otimes_\varepsilon F$ lo è; inoltre se E ed F sono normati la topologia $\mathcal{T}_\varepsilon$ è quella della norma degli operatori in $\mathscr{L}(E', F)$ e quindi $E \otimes_\varepsilon F$ è normato.

L'applicazione bilineare $\chi \circ \otimes : E \times F \to \mathscr{L}(E'_\sigma, F)$ applica $U \times V$ in $W_{U,V}$ con ovvia notazione e quindi $\otimes : E \times F \to E \otimes_\varepsilon F$ è continua; se segue che $\mathcal{T}_\varepsilon$ è meno fine della topologia proiettiva. In particolare, se E ed F sono normati vale la relazione $\|z\|_\varepsilon \leq \|z\|_\pi$.

Come prima, indicheremo con $E \tilde{\otimes}_\varepsilon F$ il completamento di $E \otimes_\varepsilon F$.

Osservazione.

Con le topologie ε e π si verifica facilmente che le proprietà formali algebriche del prodotto tensoriale (p.10) valgono anche in senso topologico; in particolare gli isomorfismi sono isometrie nel caso di spazi normati.

2. TEOREMI DI GRAFICO CHIUSO.

§1. Teoria classica.

E' ben nota l'importanza che tanto nell'analisi funzionale astratta quanto nelle applicazioni rivestono teoremi di grafico chiuso e teoremi di omomorfismo. I primi risultati in questa direzione sono i classici teoremi di Banach del grafico chiuso e dell'applicazione aperta tra spazi di Fréchet ([1]); la nascita della teoria delle distribuzioni ha motivato la ricerca di generalizzazioni agli spazi (LF), classe in cui rientrano gli spazi $\mathscr{D}(\Omega)$. Dieudonné e Schwartz [6] hanno provato il seguente teorema di cui presentiamo la dimostrazione originale:

Teorema 2.1.

Siano E,F spazi (LF) stretti: $T : E \to F$ lineare continuo e surgettivo è aperto.

Dimostrazione.

Siano $E = \text{ind } E_n, F = \text{ind } F_n$.