1. MASSE CONTINUE E TEOREMA DI DECOMPOSIZIONE

Sia $\mathscr{A}$ un'algebra di parti di X.
Tra le masse che hanno codominio chiuso, ci sono innanzitutto le masse continue, cioé quelle masse $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ tali che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathscr{A}$ partizione di X tale che $|\mu|(A_i) < \varepsilon$ $\forall i \in \{1, .. n\}$, avendo definito, per ogni $A \in \mathscr{A}$:

$$|\mu|(A) = \operatorname{Sup} \{ \sum_{j=1}^{m} |\mu(A_j)| ; \quad \{A_1, \ldots A_m\} \subset \mathscr{A} \text{ partizione di } A \}.$$

($|\mu|$ è una massa su $\mathscr{A}$ positiva e coincide con μ se $\mu \geq 0$).
Per tali masse si ha precisamente, il seguente risultato.

TEOREMA (1.1)

Se $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty)$ è una massa sull'algebra $\mathscr{A}$ di parti di X, allora:

$$\mu \text{ è continua} \iff \forall \beta \text{ ultrafiltro in } \mathscr{A} : a_\beta := \inf \{ \mu(B) ; B \in \beta \} = 0$$
$$\iff \forall A \in \mathscr{A} : \overline{\mu(\mathscr{A}_A)} = [0, \mu(A)] \quad \text{dove} \quad \mathscr{A}_A = \mathscr{A} \cap \mathscr{P}(A)$$

Se poi $\mathscr{A}$ è una σ-algebra oppure μ è completa, cioé $\mathscr{A} = \mathscr{A}^*$ con

$\mathscr{A}^* = \{A \subset X : \forall \varepsilon > 0 \ \exists A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ tale che $A_1 \subset A \subset A_2$ e $\mu(A_2 - A_1) < \varepsilon\}$,

allora si può asserire che:

$$\mu \text{ è continua} \iff \forall A \in \mathscr{A} : \mu(\mathscr{A}_A) = [0, \mu(A)].$$

Quest'ultima proprietà è nota come **proprietà di Darboux** per funzioni d'insieme (cfr. Dinculeanu: Vector Measures, Pegamon Press (1967)).

Il teorema precedente è dovuto a vari Autori, anche se con diverse sfumature (cfr. ad esempio [5], [6] e [7]).

Le ipotesi $\mu \geq 0$ ed $\mathscr{A}$ σ-algebra sono indispensabili per la chiusura del codominio. Infatti se non è $\mu \geq 0$, anche se $\mathscr{A}$ è una σ-algebra, allora $\mu(\mathscr{A})$ può essere un intervallo aperto (cfr. [14]). Inoltre se si considera l'algebra $\mathscr{A}$

In generale, come abbiamo visto, tale ultrafiltro non dà origine ad un atomo per μ, ma questo accade se μ è fortemente atomica. Pertanto per le masse fortemente atomiche, il concetto usuale di atomo coincide con quello introdotto da Constantinescu.

OSSERVAZIONE (4.4). G.H.Greco in [13] ha provato che una condizione necessaria per la completezza dello spazio $L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ $(1 \leq p < +\infty)$, è che per la massa μ sia verificata la p.c.f. Quindi le masse candidate per la completezza di L^p, sembrerebbero essere le masse continue o quelle fortemente atomiche, almeno se $\mathscr{A}$ è una σ-algebra.

Da alcuni risultati di G.H.Greco, K.S.P.Bhaskara Rao e di G.Letta si deduce che se $\mu = \sum_{n\geq 1} a_n \beta_n$ con β_n a valori $\{0,1\}$:

$$L^p(X,\mathscr{A},\mu) \quad \text{completo} \Longrightarrow \text{fortemente atomica}$$

e se $\mathscr{A}$ è una σ-algebra, allora vale l'equivalenza.

---

(1) (nota di pag. 11)

Sia $\mathscr{A}$ un'algebra ed $\mathscr{I}$ un suo ideale (ideale di sottoinsiemi nulli). Denotiamo con

$\Lambda(\mathscr{I}) = \{\mathscr{B} \subset \mathscr{A} - \mathscr{I} : \mathscr{B} \neq \emptyset$ e $\mathscr{B}$ chiuso per l'intersezione finita $\}$

(quindi $\mathscr{B}$ è una base di filtro in $\mathscr{A} - \mathscr{I}$).

Constantinescu chiama **atomi** in $\mathscr{A}$ rispetto ad $\mathscr{I}$ gli elementi massimali di $\Lambda(\mathscr{I})$, mentre chiama **insiemi atomici**, gli insiemi $A \in \mathscr{A} - \mathscr{I}$ tali che

$$\forall B \in \mathscr{A}_A : B \in \mathscr{I} \vee A - B \in \mathscr{I}$$

Se μ è una massa sull'algebra $\mathscr{A}$ a valori in un gruppo commutativo topologico e di Hausdorff, l'insieme

$$\mathscr{M}(\mu) = \{A \in \mathscr{A} : \forall B \in \mathscr{A}_A : \mu(B) = 0\}$$

è un ideale di $\mathscr{A}$ e chiameremo **atomo** di μ, ogni atomo rispetto a $\mathscr{M}(\mu)$.