XIII. Parallelismi regolari e piani di traslazione.

Recentemente, c'è stato molto interesse sui "parallelismi" delle geometrie proiettive. Molte delle costruzioni sono state trovate col computer.

Inoltre, Lunardon [53], Walker [63] e Prohaska, Walker [59] hanno studiato le relazioni fra parallelismi e piani di traslazione.

(3.1) Definizione.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione k su $K \cong GF(q)$ per $q = p^r$.

Una t-fibrazione parziale è una collezione di sottospazi di dimensione t che hanno a due a due intersezione identica.

Una t-fibrazione è un fibrazione parziale che copre V.

Una t-fibrazione Desarguesiana $\mathcal{F}$ è una t-fibrazione per cui esiste un corpo $L \supseteq K$, $L \cong GF(q^t)$, e gli elementi di $\mathcal{F}$ sono spazi di dimensione uno su L.

Un t-parallelismo parziale è una collezione $\mathcal{P}$ di t-fibrazioni tale ogni t-spazio è in al più un elemento di $\mathcal{P}$.

Un t-parallelismo è un t-parallelismo parziale tale che ogni t-spazio è in esattamente un elemento di $\mathcal{P}$.

Un t-parallelismo regolare è un t-parallelismo tale ogni t-fibrazione è Desarguesiana.

Dai lavori di Lunardon [53], Walker [63] ed anche di Prohaska e Walker [59] (che non è mai stato publicato) si ha che per ogni 2-parallelismo di un spazio di dimensione 4 che sia regolare, c'è un piano di traslazione di ordine q^4 che ha nucleo $K \cong GF(q)$. Le componenti consistono di $1+q+q^2$ reti derivabili che contengono lo stesso regolo $\mathfrak{R}$ di $1+q$ componenti. Anche il viceversa è vero.

Inoltre, questo risultato può essere espresso, più in generale, per 2-parallelismi in dimensione 4r. Per questo, è necessario riottenere alcuni risultati di Foulser [13] in forma più generale.

<u>(13.2) Teorema</u> (Foulser's Covering Theorem, Johnson [46]).

Sia V *un spazio vettoriale di dimensione* 2k *su* GF(p), p *un primo. Sia* $\mathcal{N}$ *una* k*-fibrazione parziale con* $1+p^t$ *spazi di dimensione* k. *Se c'è una collezione* $\mathcal{C}$ *di sottopiani di ordine* p^t *tale che* $\bigcup_{\pi\in\mathcal{C}} \pi = \bigcup_{\mathcal{L}\in\mathcal{N}} \mathcal{L}$ *(*$\mathcal{C}$ *copre* $\mathcal{N}$*), allora i sottopiani sono Desarguesiani e* $\mathcal{N}$ *è la forma vettoriale del* $(\frac{k}{t}-1)$*-regolo in* $PG(\frac{2k}{t}-1, L)$ *per un qualche campo* $L \cong GF(p^t)$.

<u>(13.3) Definizione</u>.

(1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2k su GF(q), $q = p^r$, p un primo. Sia $\mathcal{N}$ una k-fibrazione parziale e $\mathcal{P}$ una 2t-fibrazione parziale. Diciamo che $\mathcal{N}$ è <u>t-trasversale</u> a $\mathcal{P} \Leftrightarrow$ per $\mathcal{L} \in \mathcal{N}$ e $\mathcal{M} \in \mathcal{P}$, $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$ è un spazio di dimensione t di $\mathcal{M}$.

(2) Sia $\mathcal{N}$ una k-fibrazione parziale con $1+g^m$ componenti. Se c'è un corpo $L \cong GF(q^m)$ dove $\mathcal{N}$ è $x = O$,

$y = x\alpha$; $\alpha \in L$ e $V = (x,y)$ è uno spazio di dimensione due su L diciamo che $\mathcal{N}$ è <u>una rete Desarguesiana razionale di ordine q^m</u>.

Una rete Desarguesiana razionale di ordine q (dove dim. $V = 2k$) si chiama <u>un regolo</u> di V.

(13.4) (Questo è in Prohaska, Walker [59] per $t = 2$, si veda anche Jha-Johnson [34](2.5).

Con le ipotesi di (13.3), *sia* $\{A,B,C\}$ *un* k-*fibrazione parziale e sia* $\mathcal{F}$ *una* t-*fibrazione di* A. *Sia* $\mathcal{P} = \{f \oplus f^{i_c} \mid f \in \mathcal{F}$ *e* $i_c \in GL(V)/GF(q)$ *tale che* $i_c|C = 1$ *e* $A \xleftrightarrow{i_c} B\}$. *Allora,* $\mathcal{P}$ *è l'unica* $2t$-*fibrazione tale che* $\{A,B,C\}$ *è* t-*trasversale a* $\mathcal{P}$. *Inoltre, c'è un unico regolo* $\mathcal{R} = \mathcal{R}(A,B,C)$ *che contiene* $\{A,B,C\}$ *e è trasversale a* $\mathcal{P}$.

<u>(13.5) Teorema</u> (si veda Jha, Johnson [34](2.6)).

Con le ipotesi di (13.4), *c'è una* k-*fibrazione* $\mathcal{N}$ *con esattamente* $1+q^t$ *componenti* (k-*spazi*) *che è* t-*trasversale a* $\mathcal{P}$ *se e soltanto se* $\mathcal{F}$ *è Desarguesiana e* $\mathcal{N}$ *è una rete Desarguesiana razionale di ordine* q^t *che contiene il regolo* $\mathcal{R} = \mathcal{R}(A,B,C)$. *Inoltre, viceversa, se esiste una rete Desarguesiana razionale di ordine* q^t *che contiene* $\mathcal{R}(A,B,C)$ *allora i sottopiani di ordine* q^t *di* $\mathcal{N}$ *determinano una* t-*fibrazione Desarguesiana su* A. *Questa corrispondenza tra* t-*fibrazioni Desarguesiane su* A *e reti Desarguesiane razionali* $\mathcal{N}$ *che contengono il regolo* $\mathcal{R}(A,B,C)$ *è uno-uno*.

Dimostrazione.

Si può usare (13.2) e argomenti simili aquellidi Prohaska, Walker [59]. Inoltre, con (13.5) abbiamo.

(13.6) Teorema (Prohaska, Walker [59], Walker [63], Lunardon [53], si veda anche Jha, Johnson [34]).

Sia V *uno spazio vettoriale di dimensione* $4k$ *su* $K \cong GF(q)$, $q = p^r$, p *un primo. Sia* $\mathcal{R}$ *un regolo di* V *(di* $1+q$ *2k-spazi). Sia* Γ *una collezione di reti Desarguesiane razionali di ordine* q^2 *che contiene* $\mathcal{R}$. *Per ogni* $\mathcal{D} \in \Gamma$, *sia* $(A)_{\mathcal{D}} = \{A \cap \mathcal{L} \mid \mathcal{L}$ *una componente di* $\mathcal{D}\}$. *Allora,* $\cup(\Gamma-\mathcal{R}) \cup \mathcal{R}$ *è una 2k-fibrazione (parziale)* $\Longleftrightarrow \{(A)_D \mid \mathcal{D} \in \Gamma\}$ *è un 2-parallismo Desarguesiano (parziale) di* A *dove* A *è una componente di* $\mathcal{R}$.

(13.7) Note.

(1) Per (13.6) per ogni 2-parallelismo regolare (Desarguesiano) su un spazio di dimensione $4r$ su $GF(q)$, c'è un piano di traslazione π di ordine q^{2r} e nucleo $GF(q)$. π ammette il gruppo di collineazioni $\cong \Gamma L(2,q)$.

(2) Ci sono soltanto tre 2-parallismi regolari che sono conosiuti. Ce ne sono due in $V_8/GF(2)$ e uno in $V_8/GF(8)$. Allora, ci sono due piani di ordine 16 che ammettono $S_3 \cong \Gamma L(2,2)$—questi piani sono i piani di Lorimer-Rahilly e Johnson-Walker che ammettono anche $S_3 \times PSL(2,7)$. Il piano di ordine 8^4 è dovuto a Denniston e Walker (si veda [10] per un

2-parallelismo regolare in $V_8/GF(8)$).

Ora, consideriamo la possibilità di ottenere parallelismi da piani di traslazione di ordine q^{2r} che ammettano un gruppo di collineazioni isomorfo a $SL(2,q)$.

Innanzitutto,

<u>(13.8) Teorema</u> (Jha, Johnson [31], [34]).

Sia π *un piano di traslazione di ordine* q^{2r}, $q = p^r$, p *un primo, che ammetta un gruppo* $\mathcal{G} \cong SL(2,q)$ *nel complemento di traslazione.*

(1) *Se i p-elementi sono elazioni e* $\mathcal{G}$ *è* $\frac{1}{2}$*-transitivo (ogni orbita ha la stessa lunghezza) su* $\ell_\infty - \mathcal{N} \cap \ell_\infty$ *dove* $\mathcal{N}$ *indica la rete degli assi di elazione, allora il nucleo è* $GF(q)$ *e per ogni orbita* Γ, $\Gamma \cup \mathcal{N}$ *è una rete Desarguesiana razionale di ordine* q^2. (2) *Se* $\mathcal{L}$ *è un'asse di elazione allora c'è su* $\mathcal{L}$ *un 2-parallelismo regolare (*$\mathcal{L}$ *è uno spazio di dimensione* 2r *su* $GF(q)$).

Ogni piano di traslazione di ordine q^{2r} che si può costruire da un parallelismo regolare finora noto ammette il gruppo

$$SL(2,q) \times Z(q^{(2r-1)}-1/(q-1).$$

<u>Dimostrazione</u>.

Si usa (13.7) e (5.19).

Viceversa:

<u>(13.9) Teorema</u> (Jha, Johnson [34](3.2), [31]).

Sia π *un piano di traslazione di ordine* q^{2r} *che ammetta un gruppo isomorfo a* $SL(2,q) \times Z(q^{2r-1}-1)/q-1$ *nel complemento di traslazione. Allora, il nucleo è* $GF(q)$, *i* p-*elementi per* $p^s = q$ *sono elazioni e per ogni asse di elazione* $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$ *ammette un* 2-*parallismo con* $\mathcal{L}$ *spazio vettoriale di dimensione* 2r *su* $GF(q)$.

<u>Dimostrazione</u>.

Vorrei dare una traccia della dimostrazione di (13.9).

<u>(13.10) Lemma</u>.

Supponiamo che i p-*elementi di* $H \cong SL(2,q)$ *siano elazioni. Allora, vorrei mostrare che* H *agisce* 1/2-*transitivamente su* $\mathfrak{L}_\infty - \mathcal{N}$ *dove* $\mathcal{N}$ *è la rete degli assi di elazione e allora si può applicare* (13.8).

Per (5.19), c'è almeno una rete Desarguesiana razionale $\mathfrak{R}$ di ordine q^2 e $(\mathfrak{R}-\mathcal{N}) \cap \mathfrak{L}_\infty$ è un'orbita di H. Se $g \in Z(q^{(2r-1)}-1)/(q-1)$ è possibile che g fissi $\mathfrak{R}$. Se non c'è un elemento che fissa $\mathfrak{R}$, allora abbiamo il numero di reti necessario a coprire π. Se g fissa $\mathfrak{R}$ si può dimostrare che ancora si ha questo numero di reti.
È interessante notare che questa è la parte più difficile.
Per il caso in cui i p-elementi non sono elazioni abbiamo

bisogno di un teorema di Jha.

<u>(13.11) Teorema</u> (Jha [21], lemma 2).

Sia V *un gruppo abeliano elementare di ordine* $p^{sr} = q^r \geq q^2$ *e sia* u *un divisore p-primitivo di* $q^{(r-1)}-1$. *Sia* U *un gruppo di ordine* u^t *per* $t \geq 1$, $U \subseteq Aut(V,+)$.

Allora,

(a) $|Fix\ U| = q$,

(b) U *è semiregolare su* $V/Fix\ U$,

(c) U *è ciclico.*

(d) *Se* $r > 2$ *allora* $V = Fix\ U \oplus C_U$ *dove* C_U *è l'U-sottomodulo* <u>*unico*</u> *di* V *tale che* $C_U \cap Fix\ U = 0$.

(e) *Se* $r > 2$ *e* W *è un U-sottomodulo di* V *allora* $W \subseteq Fix\ U$ *o* $|W| \geqq q^{r-1}$.

<u>(13.12) Lemma</u>.

Nell'ipotesi di (13.9), *c'è un divisore p-primitivo di* $q^{(2r-1)}-1$.

<u>Dimostrazione</u>.

Se questo non è vero, $2r-1 = 1$ e $q = p^2$ per un primo p
Ma, in questo caso, abbiamo l'ordine q^2 e $SL(2,q)$. Ora, possiamo usare (7.7).

Sia $g \in Z(q^{2r-1}-1)(q-1) \ni |g| = u$ è un divisore p-primitivo e supponiamo che un p-elemento σ non sia un'elazione. Allora, possiamo supporre che $Fix\ \sigma = \pi_\sigma$ sia un sottopiano di π di ordine p^k per un qualche intero t.

(13.13) Lemma.

$\pi_\sigma \subseteq \text{Fix } g$, e $\text{Fix } g$ *è un sottopiano di ordine* q.

Dimostrazione.

Si usano le proprietà di $|g| = u$ (u è un divisore p-primitivo) per mostrare che $\pi_\sigma \subseteq \text{Fix } g$. Si usa (13.11) per provare che $|(\text{Fix } g)\ |\ (\text{una componente che è fissata})| = q$.

(13.14) Lemma.

I p-elementi non possono essere planari.

Dimostrazione.

Per (13.13), $\pi_\sigma \subseteq \text{Fix } g$. Sia $\mathcal{L}$ una componente di π_σ, allora $\mathcal{L} = (\text{Fix } g|\mathcal{L}) \oplus C_{g,\mathcal{L}}$ dove $C_{g,\mathcal{L}}$ è l'unico sottomodulo tale che $C_{g,\mathcal{L}} \cap (\text{Fix } g|\mathcal{L}) = 0$. Quindi, σ deve fissare $C_{g,\mathcal{L}}$ perché σ, g si centralizzano. Eppure, σ deve fissare alcuni punti di $C_{g,\mathcal{L}}$, cosicché $C_{q,\mathcal{L}} \cap \pi_\sigma \neq 0$, il che è una contraddizione per (13.13).

La dimostrazione per il caso in cui un p-elemento σ è tale che $\text{Fix } \sigma$ è contenuto in una componente è simile.

Allora, abbiamo la traccia della dimostrazione di (13.9).