XI. La questione della linearità per i gruppi abeliani nei piani di traslazione.

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ con un gruppo $\mathcal{G}$ nel complemento di traslazione. Se $|\mathcal{G}| = q^2$ e $\mathcal{G}$ è nel complemento <u>lineare</u> allora possiamo fare un'analisi come in sezione II e VI. Se $\mathcal{G}$ non è nel complemento lineare il problema diventa più complicato di quando $\mathcal{G}$ è lineare.

<u>La domanda sulla linearità</u>

Se π è un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ con un gruppo $\mathcal{G}$ di ordine q^2 nel complemento di traslazione, deve essere $\mathcal{G}$ contenuto nel complemento <u>lineare?</u>

Purtroppo no—se si pensa al piano di Desargues di ordine q^2 sul campo $GF(q)$ (il nucleo è $GF(q^2)$).

Allora, probabilmente non c'è ragione di pensare che la domanda sulla linearità' per gruppi <u>abeliani</u> abbia una risposta affermativa. Ma, possiamo provare:

<u>(11.1) Teorema</u> (Jha, Johnson [37]).

Sia π un piano di traslazione di ordine $q^2 = p^{2r}$, p un primo, con nucleo $K \cong GF(q)$. Supponiamo che π ammetta un gruppo abeliano $\mathcal{G}$ di ordine q^2 nel complemento di traslazione.

(1) *Allora, $\mathcal{G}$ è nel complemento <u>lineare</u>.*

(2) *Se* q *è pari, allora* π *è un piano su un semicorpo o un piano di Betten.*

(3) *Se* q *è dispari, allora* π *è un piano su un semicorpo o un piano "destrable."*

<u>Dimostrazione</u>.

<u>(11.2) Lemma</u>.

(i) *c'è un'elazione* τ *in* $\mathcal{G}$.

(ii) *Possiamo scegliere le coordinate in modo tale che* $\tau = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

(iii) *Gli elementi di* $\mathcal{G}$ *possono essere rappresentati nella forma:*

$$(x,y) \longrightarrow (x^\sigma, y^\sigma)\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

dove x,y *sono 2-vettori,* A,B *matrici 2 per 2 su* K, $\sigma \in \mathrm{Aut}(K)$.

<u>Dimostrazione</u>. $|\mathcal{G} \cap GL(4,q)| \geq \frac{q^2}{[r]_p}$ dove $[r]_p = p^t$ se $r = p^t \cdot s$, $(p,s) = 1$.

Se $E \trianglelefteq \mathcal{G}$ è il sottogruppo delle elazioni di $\mathcal{G}$ allora $|E| \geq \frac{q}{[r]_p}$.

Ora si usano argomenti simili aquelli della sezione II.

<u>(11.3) Lemma</u>.

Se $\mathcal{G} \cap GL(4,q) \neq E$, *allora* $|E| \leq q$.

Dimostrazione. Se $\mathcal{G} \cap GL(4,q) \neq E$, esiste un elemento $h \in \mathcal{G}$,

$h = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{matrix} & B \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$ per $a \neq 0$. Dunque scegliamo gli elementi

$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & A \end{array}\right]$ in $\mathcal{G} \cap GL(4,q)$ della forma $\begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{matrix} & B \\ 0 & \begin{matrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$ per

$a \in K$.

Sia $g \in E$. Allora, possiamo prendere

$g = \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix}$. Allora, $ghg^{-1}h^{-1} =$

$\begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} ac_3, & a(c_1-c_4)+a^2c_3 \\ 0, & -ac_3 \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$. Quindi, $ac_3 = 0$

cosicché $a_3 = 0$ e $a(c_1-c_4) = 0$ cosicché $c_1 = c_4$.

Allora, $E \subseteq \left\{ \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix} \;\middle|\; u \in K \text{ e } m \text{ è una} \right.$

$\left. \text{funzione di } K \right\}$.

(11.4) Lemma.

$|E| \geq \frac{q}{[r]_p} = p^{p^t \cdot s - t} > \sqrt{q}$ *o l'ordine* q^2 è 4 *o* 16.

Dimostrazione. Sia $r = p^t \cdot s$ allora $[r]_p = p^t$ e $q = p^{p^t \cdot s}$.

È facile vedere che $p^{p^t \cdot s - t} > \sqrt{q}$ se $q^2 \neq 4$ o 16.

(11.5) Lemma.

Se $\mathcal{G} \cap GL(4,q) \neq E$ *allora* $\mathcal{G} \subseteq GL(4,q)$.

Dimostrazione. Da (11.3), (11.4), $\sqrt{q} < |E| < q$ e

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix} \;\middle|\; u \in \Sigma \subseteq K \right\}$$ dove $|\Sigma| = |E|$. Sia $g \in \mathcal{G}$

della forma $(x,y) \xrightarrow{g} (x^\sigma, y^\sigma)\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A \end{bmatrix}$. $gf_u = f_u g$ per

$$f_u = \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$ cosicché $$\begin{bmatrix} u^\sigma & (m(u))^\sigma \\ 0 & u^\sigma \end{bmatrix} A = A \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix}.$$

Sia $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ cosicché

(1) $u^\sigma a_1 + (m(u))^\sigma a_3 = a_1 u$,

(2) $u^\sigma a_3 = a_3 u$.

Se $a_3 \neq 0$ allora $u^\sigma a_3 = a_3 u$ per tutti gli $u \in \Sigma$ e $|\Sigma| > \sqrt{q}$. Allora, $\sigma = 1$. Se $a_3 = 0$ di nuovo $u^\sigma a_1 = a_1 u$. Per (10.1), $\mathcal{G}$ è transitivo su $\ell_\infty - (\infty)$ cosicché A è non-singolare, allora $a_1 \neq 0$ se $a_3 = 0$ e $\sigma = 1$.

Questo argomento è vero per tutti gli elementi di $\mathcal{G}$ cosicché $\mathcal{G} \subseteq GL(4,q)$.

(11.6) Lemma.

Se $\mathcal{G} \cap GL(4,q) = E$, *supponiamo che* $\mathcal{G} \not\subseteq GL(4,q)$.

(1) *Allora* $\mathcal{G} \cap GL(4,q) = \left\{ \begin{bmatrix} I & C \\ 0 & I \end{bmatrix} \;\middle|\; C \in \lambda \text{ e } \lambda \text{ è additivo e } C \text{ è non-singolare} \right\}$.

(2) *Sia* $\mathfrak{K}\langle C \mid C \in \lambda$ di (1)$\rangle$. *Allora* $|\mathfrak{K} \cap$ *(gruppo scalare di* $GL(2,q))| \leq \sqrt{q}$.

Dimostrazione.

(1) Si veda sezione II.

(2) Se $|\mathfrak{K} \cap (Z(GL(2,q))| > \sqrt{q}$

allora per $(x,y) \xrightarrow{g} (x^\sigma, y^\sigma)\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A\end{bmatrix}$, $g \in \mathcal{G}$ si deve avere $C^\sigma A = AC$ per tutti i $C \in \lambda$. Ma, $\langle\lambda\rangle = \mathfrak{K}$ cosicché $D^\sigma A = AD$ per tutti i $D \in \mathfrak{K}$. Allora, ci sono $> \sqrt{q}$ elementi $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a\end{bmatrix}$ dove $\begin{bmatrix} a^\sigma & 0 \\ 0 & a^\sigma\end{bmatrix} A = A\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a\end{bmatrix}$ ma questo implica che $\sigma = 1$ perché A è non-singolare.

(11.7) Lemma.

$\mathfrak{K}$ contiene una collezione dielementi di ordine $\geq q^2/[r]_p$ *che agisce semiregolarmente su un spazio vettoriale* V *di dimensione due.*

Dimostrazione. $\mathfrak{K} \subseteq GL(2,q)$ e $y = xC$ per $C \in \lambda$ è una componente di π. Allora $xC = x$ implica $x = 0$ e $xC = x\bar{C}$ per $C,\bar{C} \in \lambda$, $x \neq 0$ implica $C = \bar{C}$.

(11.8) Lemma.

Se $q \neq 4$ *e* $\mathfrak{K}/\mathfrak{K} \cap Z$ $(Z = Z(GL(2,q))$ *ha un sottogruppo che è isomorfo a* $PSL(2,p^k)$ *di indice* $|4$ *allora* $SL(2,q) \subseteq \mathfrak{K}$.

Dimostrazione (una traccia). Si usa che la lunghezza dell'orbita di qualunque vettore $v \neq 0$ sotto $\mathfrak{K}$ è maggiore o uguale a $\frac{q^2}{[r]_p} - 1$.

Ora, se $SL(2,q) \subseteq \mathfrak{K}$ e $g : (x,y) \longrightarrow (x^\sigma, y^\sigma)\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A \end{bmatrix}$, $\mathcal{G} \cap GL(4,q) = \left\{\begin{bmatrix} I & C \\ 0 & I \end{bmatrix} \;\middle|\; C \in \lambda\right\}$ e $\mathfrak{K} = \langle\lambda\rangle$ abbiamo $\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^\sigma A = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. In modo simile a sopra e con $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, possiamo mostrare che $a_1 d = a_4 d^\sigma$, il che implica $a_1 = a_4$, $a_3 = 0$ e $a_1 \neq 0$. Allora, $d = d^\sigma$ per tutti i $d \in K$ cosicché $\sigma = 1$.

Allora, abbiamo

(11.9) Lemma. *Se* $\mathfrak{K}/\mathfrak{K} \cap Z$ *ha un sottogruppo* $\cong PSL(2,p^k)$ *allora* $\mathcal{G} \subseteq GL(4,q)$. *Quindi,* $\mathfrak{K}/\mathfrak{K} \cap Z$:

(1) *è un sottogruppo di un gruppo* H *dove* $|H| \,\Big|\, \frac{2(q\pm1)}{d}$ *dove* $d = (2,q-1)$, *o*

(2) *è un sottogruppo di un gruppo* H *dove* $|H| \,\Big|\, \frac{2q(q-1)}{d}$,

(3) *è un sottogruppo con indice 1 o 2 che è isomorfo al* A_4, S_4, *o* A_5.

Per finire la dimostrazione si può studiare ciascuna delle situazioni (1), (2), (3). Si può usare l'argomento della lunghezza delle orbite di $\mathfrak{K}$ in ogni caso. Si veda [37] per i particolari.