<u>VII. Piani di traslazione di ordine p^t che hanno un gruppo di collineazioni isomorfo a $SL(2,p^r)$ con r maggiore di $t/2$.</u>

Circa nel 1964, Lüneburg [52] ha iniziato i suoi studi sui piani proiettivi di ordine p^r con gruppi di collineazioni isomorfi a $SL(2,p^r)$. Successivamente, Yaqub [64] ha eliminato alcuni ipotesi aggiuntive che Lüneburg aveva fatto.

<u>(7.1) Teorema</u> (Lüneburg-Yaqub).

Sia π *un piano proiettivo di ordine* p^r *che ammetta* $SL(2,p^r)$ *come gruppo di collineazioni. Allora* π *è Desarguesiano.*

Prohaska [59] ha studiato i piani di traslazione π di ordine q^2 che hanno un gruppo di collineazioni isomorfo a $SL(2,q)$. Inoltre, ha assunto che π abbia nucleo $GF(q)$, q pari e che gli elementi di ordine 2 siano elazioni. Di nuovo, sotto queste ipotesi, i piani sono Desarguesiani.

Inoltre, Foulser, Johnson e Ostrom hanno esteso i risultati di Prohaska.

<u>(7.2) Teorema</u> (Foulser, Johnson, Ostrom [16]).

Sia π *un piano di traslazione di ordine* q^2 *che abbia un gruppo di collineazioni isomorfo a* $SL(2,q)$ *nel complemento di traslazione e dove* $q = p^r$. *Se gli elementi di ordine* p *sono elazioni allora* π *è Desarguesiano.*

(Si veda (5.19) per un'estensione di (7.2).)

(7.3) Esempi.

(1) I piani di Desargues e di Hall di ordine q^2 ammettono $SL(2,q)$ ove i p-elementi, $p = q^r$ sono elazioni o di Baer rispettivamente.

(2) I piani di Hering hanno ordine q^2 e ammettono $SL(2,q)$ ove i p-elementi, $q = p^r$, fissano un spazio vettoriale di dimensione uno mentre π è un spazio vettoriale di dimensione quattro. In questo caso, $SL(2,q)$ è irriducibile su π.

(3) I piani di Ott-Schaeffer (si veda [57], [60]) di ordine q^2, q pari, sono simili a quelli di Hering. Anche loro ammettono $SL(2,q)$ ove il gruppo agisce irriducibilmente su π. Inoltre, questi piani sono derivabili.

Walker [63] (per q dispari) e Schaeffer [60] (per q pari) hanno studiato i piani di traslazione di ordine q^2 che ammettono il gruppo $SL(2,q)$ e che hanno nucleo $K \cong GF(q)$. Essi hanno provato il seguente teorema:

(7.4) Teorema (Walker-Schaeffer).

Sia π *un piano di traslazione di ordine* q^2 *e nucleo* $GF(q)$. *Se* π *ammette un gruppo isomorfo a* $SL(2,q)$ *allora* π *è Desarguesiano, Hall, Hering, Ott-Schaeffer o un piano di ordine* 25 *di Walker (ci sono due tali piani).*

Si può osservare che nei piani di Ott-Schaeffer i 2-gruppi di Sylow di SL(2,q) fissano esattamente q punti sulla retta. Senza l'ipotesi sul nucleo ho provato:

<u>(7.5) Teorema</u> (Johnson [40]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2, q *pari. Sia* $\mathcal{G}$ *isomorfo a* SL(2,q) *un gruppo nel complemento di traslazione i cui elementi di ordine* 2 *siano di Baer e i cui 2-sottogruppi di Sylow fissino sottorette di Baer* (q *punti sulla retta). Allora,* π *è un piano di Ott-Schaeffer.*

Ho anche studiato i piani di traslazione di ordine 16 che hanno SL(2,4) nel complemento di traslazione. In questo caso esiste un piano eccezionale: il piano di Dempwolff.

<u>(7.6) Teorema</u> (Johnson [42]).

Esistono esattamente i seguenti piani di traslazione di ordine 16 *che ammettono* SL(2,4) *nel complemento di traslazione: Desargues, Hall o Dempwolff.*

Foulser ed io abbiamo studiato i piani di traslazione di ordine q^2 che ammettono SL(2,q) senza alcune ipotesi sul nucleo, estendendo in tal modo, il risultato di Walker e Schaeffer.

<u>(7.7) Teorema</u> (Foulser, Johnson [14], [15]).

Sia π *un piano di traslazione di ordine* q^2 *che ammetta* $SL(2,q)$ *o* $PSL(2,q)$ *nel complemento di traslazione. Allora,* π *è un piano di Desargues, Hall, Hering, Ott-Schaeffer, Walker di ordine* 25 *o Dempwolff di ordine* 16.

Per lo studio di cui sopra è necessario usare la teoria della rapresentazione dei gruppi.

Recentemente, ho iniziato a studiare piani di traslazione di ordine p^t che ammettono gruppi nel complemento che sono isomorfi a $SL(2,p^r)$ ove $p^r \geq p^t/2$. Quando ho iniziato questo studio, ho pensato che probabilmente si doveva usare la teoria della rappresentazione. Però, ho trovato un'argomentazione abbastanza semplice per provare che tali piani sono solo quelli elencati in (7.7)

Vorrei dare una traccia di questo risultato.

<u>(7.8) Teorema</u> (Johnson [39]).

Sia π *un piano di traslazione di ordine* p^t *che ammetta un gruppo* $\mathcal{G}$ *isomorfo a* $SL(2,p^r > p^t/2)$ *nel complemento di traslazione. Allora,* $r = t$ *e* π *è Desarguesiano.*

<u>Dimostrazione</u>. Per i risultati di Lüneburg-Yaqub, possiamo supporre che $t > r > t/2$. Sia $F \cong GF(p)$.

Della teoria della rappresentazione si usa soltanto il seguente risultato.

<u>(7.9) Lemma</u> (Foulser-Johnson [14]).

Un $F\mathcal{G}$-*modulo che non sia riducibile ha dimensione* $\geq 2r$.

<u>(7.10) Lemma</u>.

$\mathcal{G}$ *non fissa né punti né rette.*

<u>Dimostrazione</u>. Se $\mathcal{G}$ fissa un punto, allora $\mathcal{G}$ fissa una componente $\mathcal{O}P$ dove $\mathcal{O}$ è il vettore zero.

Possiamo assumere che $\mathcal{G}$ fissi la componente $\mathcal{L}$. π è uno spazio vettoriale di dimensione $2t$ su F, pertanto la dimensione di $\mathcal{L}$ è t. D'altra parte $t/2$ è minore di r, perciò $\mathcal{G}$ deve fissare ogni punto di $\mathcal{L}$. Ma allora gli elementi di ordine p sono elazioni le quali generano $\mathcal{G}$. Questo non è compatibile con i risultato di Hering e Ostrom (si veda [[19], [55]).

<u>(7.11) Lemma</u>.

$p^{2r}-1$ *ha un divisore* p-*primitivo*.

<u>Dimostrazione</u>. Se ciò non è vero, allora per Zsigmondy [65], si ha una delle due seguenti possibilità: $r = 1$ o $p = 2$ e $r = 3$. Nel primo caso è $t/2 < 1$. Si ha una contraddizione a meno che non sia $t = 1$, ma, in questo caso, $r \nmid t$. Quindi, $t = 4$ o $t = 5$ e questi casi possono essere trattati con argomenti elementari.

(7.12) Lemma.

I p-sottogruppi si indichino con $\mathcal{S}_i$, $i = 1,2,\dots,p^r+1$. *Le componenti che non hanno intersezione identica con* $Fix(\mathcal{S}_i)$ *si indichino con* Λ_i. *Allora,* $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \phi$ *per* $i \neq j$.

Dimostrazione. Se $\mathcal{L} \in \Lambda_i \cap \Lambda_j$ allora $\langle \mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j \rangle = \mathcal{G}$ deve fissare $\mathcal{L}$, il che è contro il Lemma (7.10).

(7.13) Lemma.

(i) *Se* $Fix(\mathcal{S}_i)$ *è contenuto in una componente* $\mathcal{L}_i$, *allora* $\mathcal{G}$ *fissa una collezione di* p^t-p^r *componenti.*

(ii) *Se* $Fix(\mathcal{S}_i)$ *è un sottopiano di ordine* p^{s_i}, *allora* $s_i = s_j = s$ *e* $\mathcal{G}$ *fissa una collezione di* $p^t+1 - (1+p^r)(1+p^s)$ *componenti.*

Dimostrazione. Ci sono $1+p^r$ p-sottogruppi di Sylow e $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \phi$ per il lemma (7.12).

Se $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_j^g$, $g \in \mathcal{G}$, allora $Fix(\mathcal{S}_j)g = Fix(\mathcal{S}_i)$. Quindi, $|\Lambda_j| = |\Lambda_i|$. (i) e (ii) sono ora facili da provare.

(7.14) Lemma.

Ogni elemento $g \in \mathcal{G}$, *dove* $|g|$ *è un divisore p-primitivo di* $p^{2r}-1$, *fissa almeno due componenti di* π.

Dimostrazione. Se g non fissa una componente allora per il lemma (7.13), (i), $|g| \mid p^t-p^r$ o (ii), $|g| \mid p^t-(p^r+p^s+p^{r+s})$.

Nel caso (i), $p^t-p^r = p^r(p^{t-r}-1)$ e se $|g| \mid p^r(p^{t-r}-1)$ allora $|g| \mid p^{t-r}-1$. Ma $|g| \mid p^{2r}-1$, quindi $|g| \mid p^{(2r,t-r)}-1$. Inoltre, $t/2 < r < t$ cosicché $t-r < r$. Sia $d = (t-r,2r)$, allora $|g| \mid p^d-1$ il che è una contraddizione.

Il caso (ii) è simile e lo lasciamo al lettore.

Pertanto, g deve fissare almeno due componenti.

<u>(7.15) Lemma</u>.

Le componenti che sono fissate dagli elementi di ordine un divisore p-primitivo sono distinte.

<u>Dimostrazione</u>. Due qualsiasi elementi devono gener[illegible] Quindi, se una componente $\mathcal{L}$ è fissata da due elementi, allora $\mathcal{L}$ è fissata da $\mathcal{G}$, il che è una contraddizione per il lemma 2.

Ci sono $\frac{1}{2}\, p^r(p^r-1)$ sottogruppi di ordine p^r+1 e ogni gruppo ha un elemento che fissa almeno due componenti distinte di π. Queste componenti sono nelle collezioni di ordine p^t-p^r o in quelle di ordine $p^t-(p^r+p^s+p^{r+s})$. Quindi, $p^r(p^r-1) \leq p^t-p^r = p^r(p^{t-r}-1)$. Pertanto, $r = t-r$, ma $t-r < r$, si ha quindi una contraddizione.

Ciò prova il teorema.