IV. Involuzioni di Baer nei piani di traslazione che hanno ampi gruppi di elazioni.

Sia π un piano di traslazione di ordine p^r che ha due p-gruppi: un gruppo $\mathfrak{B}$ di Baer ($\mathfrak{B}$ fissa ogni punto di un sottopiano di Baer) e un gruppo di elazioni $\mathcal{E}$. Se p è dispari allora, Foulser [12], 1974 ha provato che si verifica l'uno o altro: $\mathfrak{B} = \langle 1 \rangle$ o $\mathcal{E} = \langle 1 \rangle$.

Ma ci sono piani di traslazione di ordine 2^r che hanno 2-collineazioni di Baer e elazioni. Per esempio, sia Σ un piano di Desargues di ordine 2^{2s}. Sia $\sigma : x \longrightarrow x^{2^s}$, $\sigma \in \mathrm{Aut}\, GF(2^{2s})$. Allora, se (x,y) sono i punti di Σ, $(x,y) \longrightarrow (x^\sigma, y^\sigma)$ è una collineazione di Baer di Σ che ha ordine due.

Nel caso più generale, Ganley [18] 1973, ha provato che $|\mathfrak{B}| \le 2$ nei piani su semicorpi. In questo caso, c'è un gruppo $\mathcal{E}$ di elazioni che fissa una componente $\mathcal{L}$ e agisce transitivamente sulle componenti $\neq \mathcal{L}$.

<u>(4.1) Definizione</u>.

Un piano finito di semi-traslazione è un piano affine di ordine q^2 che ha un gruppo H di traslazioni di ordine q^2 tale che ogni orbita di H di punti è un sottopiano di Baer.

(4.2) *Nota:* *è possibile avere p-gruppi di Baer e p-gruppi di elazioni nei piani di semi-traslazione.*

Dimostrazione.

Sia π_1 un piano di Desargues, nella catena:

$$\pi_1 \xrightarrow{\text{deriva}} \pi_2 \xrightarrow{\text{dualizza}} \pi_3 \xrightarrow{\text{deriva}} \pi_4,$$

π_4 è un piano di semi-traslazione di ordine q^2, $q = p^r$, che ha un gruppo di Baer $\mathfrak{B}$ di ordine q e un gruppo di elazioni $\mathcal{E}$ di ordine q dove $\mathfrak{B}$ e $\mathcal{E}$ si centralizzano (si veda Johnson [47]).

Allora, il risultato di Foulser per piani di traslazione è proprio sorprendente. Inoltre, per piani di ordine pari, abbiamo:

(4.3) Teorema (Jha-Johnson [25],[26]).

Sia π *un piano di traslazione di ordine* q^2, q *pari. Sia* $\mathfrak{B}$ *un 2-gruppo di Baer nel complemento (che fissa ogni elemento del sottopiano di Baer) e sia* $\mathcal{E}$ *un gruppo di elazioni.*

(1) *Se* $|B| \geq 2\sqrt{q}$ *allora* $|\mathcal{E}| \leq 2$.

(2) *Se* $|\mathcal{E}| = q$ *e* $\mathfrak{B}$, $\mathcal{E}$ *si normalizzano, allora* $|\mathfrak{B}| \leq 2$.

Dimostrazione.

La dimostrazione per (1) è simile alla dimostrazione per (2). C'è un lemma di Dempwolff [9] il quale afferma che se $|\mathfrak{B}| > \sqrt{q}$ allora c'è un 2-gruppo $\overline{\mathfrak{B}}$ di Baer di ordine $|\mathfrak{B}|$

tale che $\mathcal{E}$ e $\overline{\mathfrak{B}}$ si centralizzano.

La dimostrazione in dimensione arbitraria è simile a quella per la dimensione due ma più complicata. Qua daremo le dimostrazioni solo per nucleo $K \cong GF(q)$. Inoltre, normalmente, supporremo per semplicità che i gruppi siano nel complemento lineare.

Dunque, sia π un piano di traslazione di ordine $q^2 = 2^{2r}$ che ha nucleo K isomorfo a $GF(2^r) = GF(q)$. Sia $\pi = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \mid x_i, y_i \in K \text{ per } i = 1,2\}$. Sia π_0 un sottopiano di Baer di π che ha la rappresentazione $\{(0, x_2, 0, y_2) \mid x_2, y_2 \in K\}$. Usiamo la notazione di sezione II.

Consideriamo una fibrazione di π della forma $(x = 0)$, $(y = 0)$, $y = xM$ dove $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ e M è una matrice non-singolare di ordine due per due. Prendiamo $(x = 0)$, $(y = 0)$, $(y = x)$ come componenti di π_0.

Primo, facciamo il presupposto che π abbia un gruppo di elazioni $\mathcal{E}$ di ordine q con asse $(x = 0)$ e un gruppo $\mathfrak{B}$ di Baer che fissi ogni punto di π_0. Infine, assumiamo che $\mathcal{E}$, $\mathfrak{B}$ si normalizzino.

(4.4) *Sia* K_0 *il nucleo di* π_0 *(*π_0 *è un sottopiano di* *traslazione). Allora,* $K_0 = K$ *e* π_0 *è un piano di Desargues.*

Dimostrazione.

$\mathfrak{B}$ fissa π_0. Se $|\mathfrak{B}| > 2$ allora π_0 è un K-sottopiano (si veda Foulser [13]). Allora $K|\pi_0 \le K_0$. $|K_0| \le q$ perché

π_0 ha ordine q. Quindi, $K|\pi_0 = K_0$.

(4.5) *Possiamo scegliere coordinate tali che* $\mathcal{B}$ *abbia la forma:*

$$\left\{ \sigma_b = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; b \in \lambda \leq K \text{ con } 0,1 \in \lambda \right\}.$$

(4.6) *Le componenti di* π_0 *possono essere rappresentate nella forma:* $\left[y = x\begin{bmatrix} a & f(a) \\ 0 & a \end{bmatrix}\right]$, $(x = 0)$ *dove* $a \in K$, *e* f *è una funzione additiva su* K.

<u>Dimostrazione</u>.

Una componente $y = x\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ di π_0 è fissata da $\mathcal{B}$. Allora,

$$\begin{bmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se e soltanto se $c = 0$ e $a = d$.

$\mathcal{E}$ agisce transitivamente sulle componenti di $\pi_0-(x = 0)$ e $\mathcal{E}$ è Abeliano elementare. Quindi, f è una funzione additiva su K e

(4.7) *É possibile rappresentare* $\mathcal{E}$ *nella forma*

$$\left\{ \tau_c = \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} c & f(c) \\ 0 & c \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix} \;\middle|\; c \in K \right\}.$$

(4.8) *Per* $\sigma_d = \begin{bmatrix} 1 & d & & \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & 1 & d \\ & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $d \in \lambda$ *e* $\tau_e = \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} e & f(e) \\ 0 & e \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix}$,

$e \in K$ *si ha che* $\sigma_d\tau_e$ *è un'involuzione di Baer e una componente* $y = x\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}$, $m_i \in K$, $i = 1,2,3,4$ *è fissata da*

$\sigma_d\tau_e \Leftrightarrow m_3 = d^{-1}e$ *e* $dm_4 = f(e) + ed + m_1 d$.

<u>Dimostrazione</u>.

$\sigma_d\tau_e$ fissa $y = x\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[x\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, x\left(\begin{bmatrix} e & f(e)+de \\ 0 & e \end{bmatrix}\right.\right.$

$\left.\left. + \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right] \in \left[y = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}\right]$. Quindi, $\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} e & f(e)+de \\ 0 & e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Uguagliando gli elementi delle matrici si ottiene il risultato.

(4.9) *Per ogni* $d \in \lambda$ *e* $c \in K$, *il gruppo* $\mathcal{G}_{b,c} = \langle \sigma_b\tau_c, \sigma_1\tau_{b^{-1}c} \rangle$ *di ordine* 4 *fissa ogni punto del sottopiano* $\pi_{b,c} = \{(0, y, b^{-1}c, y_1, y_2) \mid y_1 y_2 \in K\}$.

Allora, $\mathcal{G}_{b,c}$ *fissa ogni componente* $y = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}$ *di* $\pi_{b,c}$.

Quindi, da (4.8), $dm_4 = f(e) + ed + m_1 d$ per $(d,e) \in \{(b,c),(1,b^{-1}c)\}$. *Per* $(d,e) = (1,b^{-1}c)$, *abbiamo* $m_4 = f(b^{-1}c) + b^{-1}c + m_1$. *Quindi*,

$$f(b^{-1}c) + b^{-1}c = m_1+m_4 = b^{-1}(f(c) + bc).$$

(4.10) $f(c)+bc = bf(b^{-1}c)+c$ *per* $b \in \lambda$ *e per* tutti i $c \in K$.

Dimostrazione.

Abbiamo eliminato il riferimento alla componente $y = x\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}$. Quindi, (4.10) è vero per tutti i $c \in K$.

Si mette $c = 1$ e si usa $f(1) = 0$ ($(y = x)$ è una componente di π_0) per ottenere

(4.11) $$b^{-1}(b+1) = f(b^{-1}) \quad \text{per} \quad b \in \lambda.$$

Se $c = b$ abbiamo,

(4.12)
$$f(b) + b^2 = bf(1) + b \quad \text{o}$$
$$f(b) = b+b$$

Se $c = b^2$

(4.13)
$$f(b^2) + b^3 = bf(b) + b^2 = b(b+b^2) + b^2 \quad \text{o}$$
$$f(b^2) = 0.$$

(4.14) $\qquad f(b^{2i}) = 0$ per ogni $i = 1, 2, \cdots$.

Ma $\quad b^q = b^{2\cdot 2^{r-1}} = b \quad$ cosicché $\quad f(b) = 0 = b+b^2 = b(b+1)$. Allora, $b = 0$ o 1.

Quindi, abbiamo la dimostrazione della parte (2).

La Dimostrazione di (1).

Ora, prendiamo $|\mathcal{B}| \geq 2\sqrt{q}$ e vogliamo provare che $|\mathcal{E}| \leq 2$. Di nuovo, $\mathcal{E}$ ha asse $(x = \mathit{0})$, $\mathcal{B}$ fissa ogni punto di π_0. Per Dempwolff [9](2.7) e Jha-Johnson [25](2.0), possiamo assumere che $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$ si centralizzino. Noi daremo la dimostrazione solo per piani di dimensione due--nucleo $K \cong GF(q)$.

(4.15) (Vedi (4.5)). *Possiamo scegliere le coordinate in modo che*

$$\mathcal{B} = \left\{ \sigma_b = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; b \in \lambda \subseteq K \quad \text{con } 0,1 \in \lambda \text{ e } |\lambda| \geq 2\sqrt{q} \right\},$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \tau_c = \begin{bmatrix} I & \begin{matrix} c & f(c) \\ 0 & c \end{matrix} \\ \mathit{0} & I \end{bmatrix} \;\middle|\; c \in W \subseteq K \text{ dove } 0,1 \in W \text{ e } f \text{ è una funzione additiva su } W \right\}.$$

Inoltre (4.8) è ancora vera con queste ipotesi.

(4.16) *Per ogni* $c \neq 0$ *in* W, $|\lambda c \cap \lambda| \geq 4$.

<u>Dimostrazione</u>.

λc e λ sono sottogruppi additivi di K e quindi sono sottospazi vettoriali su $GF(2)$. Se $q = 2^r$, $r \geq \dim(\lambda c + \lambda) \geq (\frac{r}{2}+1) + (\frac{r}{2}+1) - \dim(\lambda c \cap \lambda)$. Allora, $\dim(\lambda c \cap \lambda) \geq 2$.

Abbiamo,

(4.17) *Per ogni* $c \in W$, *c'è un* $b \in \lambda$ *tale che* $bc \in \lambda$. *Quindi il gruppo* $\mathscr{G}_{b,c} = \langle \sigma_b \tau_1, \sigma_{bc} \tau_c \rangle$ *di ordine* 4 *fissa ogni punto di un sottopiano* $\pi_{b,c}$ *di Baer. Inoltre, se* $y = x \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}$ *è una componente di* $\pi_{b,c}$ *allora* $m_3 = d^{-1}e$ *ed anche* $dm_4 = f(e) + ed + m,d$ *per* $(d,e) \in \{(b,1),(bc,c)\}$.

<u>Dimostrazione</u>. (Si veda (4.8) e (4.9).)

Ricorda che $f(1) = 0$ cosicché per $(d,e) = (b,1)$, $bm_4 = f(1) + b + m,b$ che implica $m_4 = m_1+1$.

Quindi,

$$(4.18) \qquad f(c) + bc^2 + bc = 0.$$

Inoltre, (4.18) è vero per tutti gli elementi di $\lambda c \cap \lambda$ e $|\lambda c \cap \lambda| \geq 4$. Quindi, $f(c) = b(c+c^2) = d(c+c^2)$ per $b \neq d$ in

$\lambda c \cap \lambda - \{0\}$ cosicché, $c+c^2 = 0$. Quindi $c = 0$ o 1.

In [25], Jha e Johnson considerano la situazione massimale dove il piano ha ordine q^2, $|\mathfrak{B}| = q$ e il gruppo che è generato dalle elazioni è diedrale di ordine massimo.

<u>(4.19) Teorema</u> (Jha-Johnson (4.1), (4.2) [25])

Sia π *un piano di traslazione di ordine* q^2, q *pari* $\neq 8$. *Sia* $\mathfrak{B}$ *un* 2-*gruppo di Baer di ordine* q *e* $\mathfrak{D}$ *un gruppo diedrale di ordine* $2(q+1)$ *che è generato da elazioni.*

(1) *Allora* π *è un piano derivato.*

(2) *Se il nucleo* K *di* π *è isomorfo a* $GF(q)$ *allora* π *è un piano di Hall e viceversa.*